

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

На правах рукописи

СТАРИЦЫН Максим Владимирович

**ПРИНЦИП МАКСИМУМА
ДЛЯ ЗАДАЧ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА
И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМАЛЕЙ**

05.13.01 — “Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике)”

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Е.В. Гончарова

Иркутск - 2012

Оглавление

Введение	3
1 Импульсное управление при фазовых и смешанных ограничениях на меру и траекторию	27
1.1 Импульсная гибридная система (ИГС). Постановка задачи оптимального управления	27
1.1.1 Формальная модель	28
1.1.2 Понятие решения дифференциального уравнения с мерами. Дополнение графика разрывной траектории	30
1.1.3 Задача оптимального управления ИГС	33
1.2 Преобразование задачи	35
1.3 Необходимые условия оптимальности	45
1.3.1 Формулировка результата	45
1.3.2 Доказательство необходимых условий оптимальности	49
1.3.3 Обсуждение	59
2 Вычислительные методы оптимального импульсного управления	63
2.1 Улучшение дискретно-непрерывных процессов	63
2.1.1 Задача оптимального управления ДНС	64
2.1.2 Вспомогательные результаты	66
2.1.3 Общая процедура улучшения дискретно-непрерывных процессов	72
2.2 Численные методы решения задач оптимального управления нелинейными дифференциальными уравнениями с мерами	78
3 Численный анализ модельных и прикладных задач	97
3.1 Решение тестовых примеров	97
3.1.1 Базовый алгоритм улучшения	97
3.1.2 Вычислительный эксперимент	98
3.1.3 Замечания	104
3.2 Прикладные задачи	107
3.2.1 Оптимальное импульсное управление популяцией паразитических организмов	107
3.2.2 Телескопический манипулятор с блокируемой степенью свободы	114
3.2.3 Двухзвенный манипулятор с блокируемой степенью свободы . . .	118
Литература	125

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию задач оптимального управления импульсными гибридными системами. Этот класс моделей описывается дифференциальными уравнениями с мерами при ограничениях смешанного типа, связывающих фазовую траекторию и управляющую меру.

Данное исследование инспирировано, в первую очередь, работами [68–74, 123, 170–172] и ориентировано на решение следующих вопросов: разработку методов эквивалентных преобразований задач импульсного управления с ограничениями новых типов, вывод необходимых условий оптимальности и построение вычислительных процедур поиска оптимального импульсного управления. В методологическом плане основной упор сделан на систематическое использование сингулярных пространственно-временных преобразований.

Актуальность темы работы и обзор имеющихся результатов

Задачи импульсного управления

Объектом исследования теории оптимального импульсного управления выступают задачи оптимизации с разрывными траекториями и управлениями типа мер или — более широко — типа обобщенных функций (распределений). Исторически, задачи импульсного управления возникают при расширении некоторых классов *вырожденных* стандартных задач, решение которых не достигается в исходном множестве допустимых управлений (в первую очередь речь идет о системах с линейной зависимостью от неограниченного управления). Под расширением понимается взятие подходящего замыкания множества допустимых процессов исходной модели. При этом руководствуются желанием обеспечить существование оптимального решения в расширенной постановке.

Внимание к данной тематике было во многом обусловлено потребностями моделирования реальных объектов, управление которыми производится на протяжении пренебрежимо малых промежутков времени, таких что протекающие в них процессы можно идеализировать как мгновенные, а результаты управляющих воздействий выражаются в скачкообразных изменениях фазовой траектории. На практике импульсные системы возникают в различных высокотехнологичных отраслях, таких как ракетодинамика, лазерная технология, телекоммуникация, энергетика, робототехника, квантовая электроника, а также в экономике, экологии, при исследовании демографических и эпидемических процессов [39, 43, 52, 62, 107, 185, 193].

Основы теории импульсного управления были заложены в работах Н.Н. Красовского, С.Т. Завалищина, А.Б. Куржанского, В.Ф. Кротова, В.И. Гурмана, Р. Ришела, Дж. Варги. Дальнейшее развитие этой теории связано с именами российских и зарубежных ученых А.В. Арутюнова, А. Брессана, Р. Винтера, В.А. Дыхты, Б.М. Миллера, М. Мотта, Ф.Л. Перейра, Ф. Рампаццо, А.Н. Сесекина, Ж.Н. Силва, Т.Ф. Филипповой, А.Г. Ченцова и др.

Наибольшую сложность и практический интерес представляют задачи импульсного управления с траекториями ограниченной вариации и управлениями типа векторной меры. Разные классы таких задач при фазовых ограничениях и некоторых типах смешанных ограничений изучались в работах Б.М. Миллера и Е.Я. Рубиновича, А.В. Арутюнова, Д.Ю. Карамзина и Ф.Л. Перейра, В.А. Дыхты и О.Н. Самсонюк и др. Важной спецификой подобных моделей является неоднозначная интерпретация условий фазового и смешанного типа, что порождает различные возможные постановки задач, типы локального оптимума и условия оптимальности.

Преобразование задач импульсного управления

В оптимизации импульсных систем широко распространен следующий подход: задача с импульсами преобразуется к некоторой задаче с ограниченными управлениями, для исследования которой применяются уже известные регулярные методы. Последние могут быть впоследствии подвергнуты *расшифровке* с тем, чтобы можно было дать интерпретацию полученных результатов в терминах задачи импульсного управления. На сегодняшний день уже имеется ряд эффективных методов эквивалентного преобразования задач импульсного управления к задачам с ограниченными

ми управлениями (и конструктивных методов расширения, если решение не достигается в исходном классе допустимых), в том числе,

- *метод преобразования Гурмана* к производной задаче, предложенный В.И. Гурманом для вырожденных задач оптимального управления [30, 31, 34]. Для применения этого метода в задаче импульсного управления достаточно, чтобы векторные поля при неограниченном линейно входящем управлении были линейно независимы и обладали свойством инволютивности;
- *нелинейный вариант преобразования Гоха* [145, 146], близкий по замыслу к методу В.И. Гурмана, но отличающийся большей симметрией. Разработка этого преобразования в задачах импульсного управления принадлежит В.А. Дыхте [36, 37, 39, 40]. Для применения нелинейного преобразования Гоха достаточно, чтобы в импульсной системе были выполнены условия полной интегрируемости Фробениуса (векторные поля при неограниченных управлениях коммутируют);
- *метод разрывной замены времени* — в различных его вариациях — является эффективным инструментом преобразования в задачах с траекториями из BV . В основе метода разрывной замены времени лежит известная теорема Лебега о замене переменной под знаком интеграла Стильтьеса [74]. Этот подход берет свое начало, вероятно, в работах Р. Ришела [182] и Дж. Варги [195]. В принятой нами форме метод замены времени был впервые предложен Б.М. Миллером сначала для задач со скалярным импульсным управлением [68] и затем — для векторного случая [69]. Последующие обобщения метода были получены в работах А.Н. Сесекина [89–92]. Та же идея, что и в подходе Б.М. Миллера, облеченная в несколько иную форму, лежит в основе техники, которая применялась в работах А. Брессана и Ф. Рампаццо [125, 127], а также Ф. Рампаццо и М. Мотта [173–175]. Для гибридных систем с односторонними ограничениями специальное сингулярное преобразование предложено Б.М. Миллером и Дж. Бентсманом как развитие метода пенализации [123, 171, 172]. В работах Р. Винтера, Ф.Л. Перейра и Ж. Силва [176–178, 180, 186, 188] техника разрывной замены времени была распространена на задачи, в которых динамика описывается нелинейным дифференциальным включением с мерами.

Метод замены времени успешно применялся при решении широкого круга задач, примыкающих к теории импульсного управления. Преобразования этого типа использовались при обосновании различных подходов к определению понятия решения дифференциальных уравнений с мерами, а также в качестве конструктивного приема расширения в моделях,

описываемых уравнениями в распределениях (Дж. Дал Мазо, А. Бресан, Ф. Рампаццо, М. Мотта [128, 138, 173–175], С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин [43, 92], Т.Ф. Филиппова [141–143, 179], Р. Винтер, Ф.Л. Перейра и Ж. Силва [176, 186] и др.).

Рассмотрим задачу оптимального управления дифференциальным уравнением с мерами:

$$\begin{aligned} I &= F(x(T)) \rightarrow \min, \\ dx &= f(t, x, u)dt + G(t, x)d\nu, \quad x(0-) = x^0, \\ u(t) &\in U, \quad \int_0^T |d\nu| \leq M, \end{aligned} \quad (0.1)$$

в предположении, что матрица G удовлетворяет условию корректности типа Фробениуса:

$$[G^i(t, x), G^j(t, x)] := \frac{\partial}{\partial x} G^i(t, x) G^j(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} G^j(t, x) G^i(t, x) = 0.$$

Здесь $i, j = \overline{1, m}$, G^k означает k -й столбец матрицы G , $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли.

Метод разрывной замены времени

В основе метода [74] лежит специальное сингулярное пространственно-временное преобразование, при котором время в исходной модели становится новой фазовой переменной. Преобразование времени состоит в растяжении моментов приложения импульса в интервалы конечной длины, пропорциональной интенсивности соответствующего импульсного воздействия, и в “раскрытии” соответствующих сингулярностей. Это позволяет уложить в единую временную шкалу “быстрые движения” и процессы, протекающие в естественном масштабе времени. Соответствующая (0.1) редуцированная задача [74] определена на нефиксированном отрезке времени $[0, S]$, $T \leq S \leq T + M$, и имеет вид

$$\begin{aligned} J &= F(y(S)) \rightarrow \min, \\ \dot{y} &= \alpha f(\xi, y, v) + (1 - \alpha)G(\xi, y)e, \quad y(0) = x^0, \\ \dot{\xi} &= \alpha, \quad \xi(0) = 0, \\ \xi(S) &= T, \\ v(s) &\in U, \quad \alpha(s) \in [0, 1], \quad e(s) \in B, \quad s \in [0, S]. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Здесь управления $\omega(\cdot) = (v(\cdot), \alpha(\cdot), e(\cdot))$ — ограниченные измеримые по Борелю функции, траектории $z(\cdot) = (\xi(\cdot), y(\cdot)) \in AC([0, S], \mathbb{R}^{n+1})$, B — единичный шар в $\mathbb{R}^m$ с нормой $|\cdot| = \|\cdot\|_1$ и центром в нуле.

Любому допустимому процессу $(z(\cdot), \omega(\cdot), S)$ задачи (0.1) соответствует допустимый процесс задачи (0.2). Прямое преобразование осуществляется следующим образом. Определим на $[0, T]$ функцию $\Gamma(\cdot)$:

$$\Gamma(t) = t + \int_0^t |d\nu(\theta)|, \quad t \in [0, T].$$

Поскольку функция $\Gamma(\cdot)$ монотонно возрастает, существует обратная к ней $\xi = \Gamma^{-1}$. Функция $\xi(\cdot)$ абсолютно непрерывна и не убывает на отрезке $[0, \Gamma(T)]$. Положим $S = \Gamma(T)$. Определим управление $v(\cdot)$ как суперпозицию $u(\xi(\cdot))$, а в качестве управлений $\alpha(\cdot)$ и $e(\cdot)$ возьмем борелевские функции, такие что $\alpha(s) = \dot{\xi}(s)$ и $e(s) = l(\xi(s))$ почти всюду по мере Лебега $\mathcal{L}$ на $[0, S]$. Здесь $l(t) = \frac{d\nu(t)}{|d\nu(t)|}$ — производная Радона-Никодима меры $d\nu$ по мере полной вариации. Управление $\omega(\cdot) = (v(\cdot), \alpha(\cdot), e(\cdot))$ удовлетворяет всем ограничениям в задаче (0.2). Решая задачу Коши, мы найдем допустимую траекторию $z(\cdot) = (\xi(\cdot), y(\cdot))$. Тем самым будет определен допустимый процесс в преобразованной задаче.

Наоборот, если процесс $(z(\cdot), \omega(\cdot), S)$ является допустимым в задаче (0.2), то набор $(x(\cdot), u(\cdot), d\nu)$, определенный соотношениями

$$x(t) = y(\Gamma(t)), \quad u(t) = v(\Gamma(t)), \quad \nu(t) = \int_0^{\Gamma(t)} (1 - \alpha(s))e(s)ds,$$

$$\Gamma(t) = \inf\{s \in [0, S] : \xi(s) > t\},$$

оказывается допустимым процессом задачи импульсного управления (0.1).

Утверждение 0.0.1 ([74]) Пусть функция $\xi(\cdot)$ абсолютно непрерывна на $[0, S]$ и удовлетворяет условиям

$$0 \leq \dot{\xi}(s) \leq 1, \quad \xi(0) = 0, \quad \xi(S) = T.$$

Тогда функция $\Gamma(\cdot)$, определяемая условиями

$$\Gamma(t) = \inf\{s : \xi(s) > t\} \text{ при } t \in [0, T], \quad \Gamma(t) = S \text{ при } t \geq T,$$

есть неубывающая, непрерывная справа функция, и выполняются соотношения:

$$\xi(\Gamma(t)) = t \quad \text{при всех } t \in [0, T],$$

$$\Gamma(\xi(s)) = s, \quad \text{если } t = \xi(s) \text{ есть точка непрерывности } \Gamma(\cdot).$$

Отображение $\Gamma(\cdot)$ задает обратное преобразование времени.

Нелинейное преобразование Гоха

Нелинейное преобразование Гоха [37] упрощает вид сингулярностей в исходной задаче. Оно задается формулами

$$y(t) = \eta(t, x(t), \nu(t)), \quad l(t) = \frac{d\nu(t)}{|d\nu(t)|},$$

где $\eta(t, x, \nu) = \zeta(t, x, -\nu)$, а $\zeta(t, x, \nu)$ есть решение допредельной системы

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \zeta = G(t, \zeta), \quad \zeta|_{\nu=0} = y.$$

Глобальная разрешимость допредельной системы обеспечивается предположением корректности. Результатом применения преобразования Гоха в задаче (0.1) является следующая задача оптимального управления [39]

$$\begin{aligned} F(y(T)) &\rightarrow \min, \\ \dot{y} &= g(t, y, u, \nu), \quad u(t) \in U && \mathcal{L}\text{-п.в.}, \\ d\nu &= l d\mu, \quad l(t) \in B && d\mu\text{-п.в.}, \\ d\mu &\geq 0, \\ t &\in [0, T], \quad y(0) = x^0, \quad \nu(0-) = 0, \\ \mu(T) &\leq M, \end{aligned} \tag{0.3}$$

где $g(t, y, u, l) = \{\eta_t(t, x, l) + \eta_x(t, x, l)f(t, x, u)\} \big|_{x=\zeta(t,y,l)}$, а $d\mu$ и $l(\cdot)$ — новые управления. Здесь $d\mu$ — мера, порожденная полной вариацией функции $\nu(\cdot)$ (а значит, скалярная и неотрицательная). Исходная траектория $x(\cdot)$ восстанавливается по $y(\cdot)$ при помощи суперпозиции

$$x(t) = \zeta(t, y(t), \nu(t)), \quad t \in [0, T].$$

Комбинация замены времени с нелинейным преобразованием Гоха

В задачах, где выполнено условие полной интегрируемости типа Фробениуса, метод разрывной замены времени можно применять в комбинации с модифицированным преобразованием Гоха. Замена времени в задаче (0.3) приводит к еще одному варианту редуцированной задачи с ограни-

ченными управлениями и абсолютно непрерывными траекториями:

$$\begin{aligned}
F(y(S)) &\rightarrow \min, \\
\dot{\xi} &= \alpha, \quad \dot{y} = \alpha g(\xi, y, v, w), \quad \dot{w} = (1 - \alpha)e, \\
\xi(0) &= 0, \quad y(0) = x^0, \quad w(0) = 0, \\
w(S) &\leq M, \quad \xi(S) = T, \\
v(s) &\in U, \quad \alpha(s) \in [0, 1], \quad e(s) \in B, \\
s &\in [0, S], \quad T \leq S.
\end{aligned} \tag{0.4}$$

Соответствия между процессами задач (0.3) и (0.4) легко устанавливаются по аналогии с тем, как это делается для задач (0.1) и (0.2).

Продолжение редуцированной задачи на фиксированный отрезок времени

Как отмечено выше, преобразование времени (как и его комбинация с преобразованием Гоха) приводят к стандартным задачам оптимального управления, которые, однако, рассматриваются на нефиксированных интервалах времени. Обратимся к постановке (0.2). Заметим, что множество скоростей редуцированной системы в (0.2) содержит нуль. Поэтому всякий процесс задачи (0.2) можно продолжить [74] на максимальный отрезок времени $[0, \tilde{S}]$, $\tilde{S} = T + M$, полагая $\alpha(s) = 0$ и $e(s) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в. на $(S, \tilde{S}]$ с сохранением свойства быть измеримыми по Борелю функциями. Данный способ продолжения сохраняет информацию о реальном эффективном расходе ресурса импульсного управления. Такое доопределение процесса можно интерпретировать как выработку остаточного ресурса “на холостом ходу” системы. Таким образом, (0.2) может быть сведена к задаче на фиксированном отрезке времени $[0, \tilde{S}]$

$$\begin{aligned}
\tilde{J} &= F(y(\tilde{S})) \rightarrow \min, \\
\dot{y} &= \alpha f(z, v) + (1 - \alpha)G(z)e, \quad y(0) = x^0, \\
\dot{\xi} &= \alpha, \quad \xi(0) = 0, \quad \xi(\tilde{S}) = T, \\
\omega(s) &\in \mathcal{U}, \quad s \in [0, \tilde{S}].
\end{aligned} \tag{0.5}$$

Здесь $z(\cdot) = (\xi(\cdot), y(\cdot))$, $\omega(\cdot) = (v(\cdot), \alpha(\cdot), e(\cdot))$, и $\mathcal{U} = U \times [0, 1] \times B$.

Оптимальная продолжительность времени в задаче (0.2) определяется величиной

$$S^* = T + \int_0^{\tilde{S}} (1 - \alpha^*(s))|e^*(s)|ds,$$

где $\alpha^*(\cdot)$, $e^*(\cdot)$ — компоненты *оптимального* управления $\omega^*(\cdot)$ в продолженной задаче (0.5). Для того чтобы восстановить оптимальное управление в (0.2), следует переопределить управления из (0.5) сдвигом влево по интервалам времени, где одновременно $\alpha^*(s) = 0$ и $e^*(s) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в.

Продолжение процессов задачи (0.4) осуществляется аналогично.

Необходимые условия оптимальности импульсных процессов

Необходимые и достаточные условия оптимальности в теории импульсного управления были получены как для задач без ограничений на распределения (когда траектории являются функциями класса L_∞), так и при наличии таковых (с траекториями ограниченной вариации). Наиболее сильные необходимые условия первого порядка для импульсных и особых режимов в случае L_∞ -траекторного расширения принадлежат В.А. Дыхте и носят название вариационного принципа максимума [36, 37, 39, 40]. Квадратичные необходимые условия оптимальности получены в работах В.А. Дыхты и И.А. Никифоровой [36, 78]. Вариационный принцип максимума высокого порядка и его обобщение на нелинейные системы и дифференциальные включения с неограниченной правой частью получены Г.А. Колокольниковой [48].

Для задач с траекториями ограниченной вариации необходимые условия оптимальности в основном сконцентрированы вокруг различных вариантов принципа максимума, а развитие достаточных условий происходило через обобщение методов динамического программирования и условий типа К. Каратеодори и В.Ф. Кротова. Первые и наиболее полные результаты по необходимым условиям оптимальности в задачах с траекториями ограниченной вариации получены в серии работ Б.М. Миллера [70, 71]. В [74, 123, 171] содержатся необходимые условия оптимальности для специальных классов задач импульсного управления, в том числе, задач оптимального управления *дискретно-непрерывными* системами (в терминах обобщенных решений), задач с ограниченным числом импульсов, линейно выпуклых задач импульсного управления, задач оптимального управления *гибридными системами с односторонними ограничениями*, а также для задачи импульсного управления с траекториями ограниченной вариации при фазовых ограничениях. Близкие результаты для гладких задач импульсного управления с траекториями из BV получены А. Брессаном и Ф. Рампаццо [126, 127] с привлечением метода разрывной замены времени, а также в работах С.Т. Завалищина и А.Н.

Сесекина [43, 91].

Негладкие задачи оптимального управления в импульсных системах, не обладающих свойством корректности, с терминальными и *промежуточными фазограничениями* на фиксированном и свободном отрезках времени рассматривались в [39], где для таких задач получены необходимые условия оптимальности. В этой работе рассматривается случай конечного числа импульсов и тривиальной сингулярной непрерывной компоненты управляющей меры. При обосновании условий оптимальности импульсная система трактуется как модель многоэтапного процесса. Квадратичные необходимые условия оптимальности в задачах импульсного управления с траекториями ограниченной вариации получены О.Н. Самсонок [85].

Ряд вопросов, связанных с необходимыми условиями первого и второго порядков для задач оптимального управления нелинейными импульсными системами (в частности, проблема вырождения), исследовался в работах А.В. Арутюнова, Д.Ю. Карамзина. Условия второго порядка получены в [108], “невырожденный принцип максимума” — в их совместной работе с Ф.Л. Перейра [109], и необходимые условия второго порядка без априорного предположения нормальности — в работе А.В. Арутюнова, В.А. Дыхты и Ф.Л. Перейра [110]. В [160] исследуются метрические и топологические свойства пространства импульсных управлений.

Необходимые условия экстремума в задачах управления дифференциальными уравнениями с мерами, а также включениями с мерами получены в работах Р. Винтера, Ф.Л. Перейра, Ж. Силва с помощью специального обобщения метода разрывной замены времени [176, 177, 186, 188, 194]. Задачи с фазовыми ограничениями исследовались в [144, 187]. Необходимые условия оптимальности импульсных процессов в банаховых пространствах получены в [103, 104].

Приближенные методы оптимального управления

Успех теории оптимального управления динамическими системами и ее активное применение во многих областях приложений естественным образом стимулировали и развитие вычислительных методов.

Для классических задач управления обыкновенными дифференциальными уравнениями большинство известных вычислительных алгоритмов можно условно разделить на два типа: *локальные*, в основе которых лежит та или иная процедура варьирования в пространстве управлений, и *гло-*

бальные методы, связанные с построением приближенного синтеза управления. В ряде локальных методов широко распространен подход, основанный на использовании вариаций игольчатого типа. По-видимому, впервые этот подход, получивший название *метода последовательных приближений*, был предложен И.А. Крыловым и Ф.Л. Черноусько [57], и развивался в дальнейшем в [58], а также в работах А.А. Любушина [63–65], О.В. Васильева и В.А. Срочко [14–16, 93]. Некоторые алгоритмы основаны на исследовании первой и второй вариаций функционала [17, 18, 87, 93, 96, 102, 156]. К ним относятся все методы градиентного спуска и их модификации. Такие алгоритмы оказываются эффективными в задачах без ограничений на управление, а также в случае, когда оптимальное управление содержится внутри допустимой области.

Одно из направлений развития глобальных вычислительных методов связано с принципом динамического программирования Беллмана и исследованием уравнения Гамильтона-Якоби [158]. Большая серия вычислительных методов опирается на достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова и принцип расширения, сформулированный в работах В.И. Гурмана. На основе принципа расширения развита серия методов слабого и сильного улучшения первого и второго порядков (В.И. Гурман, В.А. Батулин, И.В. Расина, Д.Е. Урбанович и др. [4, 11, 32–35, 51–56, 153, 161]). Эти процедуры позволяют улучшать не оптимальные (в локальном смысле) процессы даже в том случае, когда такие процессы удовлетворяют необходимым условиям оптимальности (принципу максимума Понтрягина, либо условиям стационарности). Близкие по технике методы улучшения, связанные с локальным оцениванием множеств достижимости, развивались в работах В.И. Гурмана, В.А. Батурина, Е.В. Гончаровой [5, 6, 35]. Методы из [4] были дополнены эффективными процедурами параметрического поиска [8]. В [41] предложена общая процедура нелокального улучшения, где для построения приближенного синтеза управления используется решение квазивариационного неравенства Гамильтона-Якоби и метод проксимального прицеливания.

На фоне внушительного списка работ по численным методам для классических задач оптимального управления библиографию, посвященную вычислительным аспектам исследования задач импульсного управления, едва ли можно назвать обширной. В [33, 35, 37, 117–120] представлены алгоритмы улучшения для задач оптимального управления системами с линейно входящим неограниченным управлением и траекториями из L_∞ , использующие преобразование Гурмана к производной задаче и нелиней-

ный вариант преобразования Гоха. Исследование задач управления многоэтапными процессами было проведено в работах [19, 61, 79]. В [7] были получены достаточные условия оптимальности многоэтапных управляемых процессов, на основе которых разработаны методы улучшения управления первого и второго порядков. Итеративные алгоритмы улучшения управления логико-динамическими системами предложены в [10, 121, 122]. Обзор приближенных методов оптимального управления в различных гибридных моделях дан в [9]. В [114, 115] для задач оптимального управления импульсными гибридными системами с априори конечным числом автономных переключений разработаны методы градиентного спуска. Среди последних работ выделим [38], где на основе аппроксимации многогранниками множеств достижимости и полярных множеств развиты численные алгоритмы синтеза импульсных управлений для линейной системы с траекториями ограниченной вариации. Отметим также диссертацию [197], посвященную, преимущественно, численному исследованию задач оптимального управления механическими системами в форме дифференциальных уравнений с мерами при комплементарных ограничениях.

Гибридные системы

Термин *гибридные системы* объединяет в себе большое многообразие моделей, эволюция состояния которых во времени характеризуется взаимодействием обычной непрерывной динамики и динамики, определяемой выделенными “событиями”. Нам едва ли удастся охватить весь спектр работ, посвященных моделированию и исследованию качественных свойств гибридных моделей различных классов. Библиография по этим вопросам насчитывает сотни наименований, приведем лишь некоторые из известных нам: [74, 105, 106, 112, 124, 140, 154, 166, 167, 169, 183–185, 192] (см. также цитируемую в них литературу). В [31, 74, 114–116, 129, 130, 133, 157, 162] изучались задачи оптимального управления для гибридных систем специального вида.

За подробной классификацией гибридных систем можно обратиться к работам М. Браники, см., например, [124]. Большинство гибридных систем можно записать в виде:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (0.6)$$

$$x(\tau) = g(x(\tau-), \nu_\tau), \text{ если } x(\tau-) \in \mathcal{Z}_-, \quad (0.7)$$

$$u \in U, \quad \nu_\tau \in W. \quad (0.8)$$

Дифференциальное уравнение (0.6) описывает непрерывную динамику состояния системы (или семейства подсистем, отвечающих разным режимам поведения моделируемого объекта). Соотношения (0.7) определяют схему переключений между подсистемами. Здесь f и g — векторные функции со стандартным набором свойств, U и W — заданные множества, ограничивающие выбор управляющих воздействий u и ν , $\mathcal{Z}$ — подмножество расширенного фазового пространства, формирующее условия переключения.

Выделим частные случаи, наиболее типичные для практических приложений.

(M₁) Функция g не зависит от управления ν . Объект управления подвержен естественным импульсным воздействиям, которые неизменно проявляются по достижении определенных фазовых состояний, что имеет место, например, в механических системах с ударами и сухим трением [123, 131, 166–168, 171, 172].

(M₂) Функция g не зависит от x . В этом случае (0.7) превращается в ограничения на пределы траектории в точках разрыва (т.е. в моменты смены режима функционирования системы):

$$x(\tau-) \in \mathcal{Z}_-, \quad x(\tau) \in \mathcal{Z}_+,$$

где $\mathcal{Z}_+ = g(W) := \{g(\nu) | \nu \in W\}$. Этот случай типичен для ряда моделей из механики. Скачкообразные изменения состояния могут иметь место только в моменты попадания траектории на заданное подмножество $\mathcal{Z}_-$ расширенного фазового пространства, называемое *множеством переключения*, англ. “resetting set”, “jump permitting set” [124, 137, 154] (к примеру, повышение или понижение передачи при управлении автомобилем возможно только по достижении определенной скорости). Результатом смены режима является перевод фазовой траектории на *множество назначения* $\mathcal{Z}_+$, англ. “jump destination set”. Эта ситуация характерна, в частности, для импульсных гибридных систем вида [114–116, 166, 167] и механических систем с переменным числом степеней свободы [196, 197], возникающих в робототехнике при моделировании манипуляторов, передвижных механизмов и т.д. (см., например, [98, 100, 107, 152, 163, 164]).

(M₃) Множество $\mathcal{Z}_-$ совпадает со всем расширенным фазовым пространством. Такие модели называются дискретно-непрерывными системами [74], или системами “с толчками” [97]. Здесь в качестве управлений

выступают измеримая функция $u(\cdot)$ и набор $\mathfrak{I} = \{\tau, \nu_\tau\}$ моментов τ переключения динамики и параметров ν_τ , подаваемых “на вход” при переключении и выбираемых из ограниченного множества W . Мы рассмотрим этот случай подробнее в § 2.1 в контексте построения численного метода решения соответствующей экстремальной задачи.

В (M_2) и (M_3) событие смены динамики, а также моменты переключения являются предметом управления и подлежат выбору. Подобные математические модели можно отнести к гибридным системам с *управляемыми переключениями*. С другой стороны, в моделях (M_1) , т.н. гибридных системах с *автономными переключениями*, достижение определенных состояний обязательно приводит к смене режима, при этом результат переключения может, по-прежнему, определяться выбором некоторого управления. Перечисленные случаи являются, в своем роде, пограничными. В практических приложениях часто возникают модели следующего вида.

(M_4) Случай, когда часть компонент фазового вектора — кусочно постоянные функции, описывается *логико-динамическими*, или *переключаемыми* системами (англ. “switched systems”) [12, 13, 124, 129, 133, 140, 162, 192]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_q(t, x) := f(t, x, q), \quad q(t) \in \mathcal{Q}, \\ q(\tau) &= g(\tau, x(\tau-), q(\tau-), \nu_\tau).\end{aligned}\tag{0.9}$$

Здесь $\mathcal{Q}$ — некоторый конечный набор индексов (номер подсистемы), $q(\cdot)$ — “логическая” компонента, задающая режим, в котором эволюционирует состояние $x(t)$. Функция g определяет конечный автомат (“с памятью”): $g(\tau, x(\tau-), i, \nu_\tau) = j(\tau, x(\tau-), \nu_\tau) \in \mathcal{Q}$, где $j(\tau, x(\tau-), \nu_\tau) = j_k(\nu_\tau)$, если $(\tau, x(\tau-), q(\tau-)) \in \mathcal{Z}_k$, а множества $\mathcal{Z}_k$ задают некоторый набор условий переключения. Переключения логической переменной $q(\cdot)$ между различными значениями из $\mathcal{Q}$ трактуются как смена динамики. Точки множества $\mathcal{Q}$ могут рассматриваться, к примеру, как узлы некоторого графа, и мгновенный переход из одного узла в другой возможен лишь в случае, если существует ребро графа, связывающее эти узлы.

Дифференциальные уравнения с мерами как универсальный способ описания дискретно-непрерывной динамики

В процессе развития теории гибридных систем были обнаружены обширные связи с теорией импульсного управления. На сегодняшний день можно наблюдать глубокое взаимное проникновение этих двух парадигм.

Вернемся к гибридной системе (0.6)–(0.8). Предположим, что $g(x, \nu)$ при любых (x, ν) удастся трактовать как результат действия оператора сдвига по траекториям некоторого вспомогательного дифференциального уравнения, т.е. $g(x, \nu) = \varkappa(1; x, \nu)$, где $\varkappa(\cdot; t, x, \nu)$ удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ следующей *предельной* системе

$$\dot{\varkappa} = G(\varkappa(\theta))\nu, \quad \varkappa(0) = x.$$

Тогда модель (0.6)–(0.8) эквивалентна дифференциальному уравнению:

$$dx = f(x, u) dt + G(x) d\mu \quad (0.10)$$

с дискретной мерой $d\mu(t) = \sum_{\tau \leq t} \nu_\tau \delta(t - \tau) dt$.

Описание скачка с помощью предельной системы в случае произвольной функции g остается для нас открытым вопросом. Подобное представление заведомо имеет место, если функция g обладает свойством робастности [74] (в частности, полугрупповым свойством по переменной ν). Матрица G тогда определяется условием

$$G(x) = \frac{\partial}{\partial \nu} g(x, \nu) |_{\nu=0}.$$

В общем случае соотношения (0.7) можно рассматривать как смешанные ограничения, связывающие траекторию $x(\cdot)$, управления ν_τ и некоторое импульсное управление.

Смешанные ограничения на меру и траекторию как условия смены режимов в гибридных системах

Пусть динамика состояния объекта описывается дифференциальным уравнением с мерами (0.10). Предположим, что в моменты приложения импульсного управления фазовая траектория подчинена дополнительным условиям:

$$Q_-(t, x(t-)) = 0, \quad Q_+(t, x(t)) = 0, \quad \Psi(t, x(t)) \leq 0 \quad |d\mu|-\text{п.в.}, \quad (0.11)$$

где компоненты вектор-функций $Q_{\pm}$ — неотрицательные функции (что не снижает общности). Условия (0.11) могут рассматриваться как некоторое обобщение смешанных ограничений типа равенств и неравенств в классических задачах с ограниченными управлениями.

Отметим, что смешанные ограничения, конечно, возникали в задачах импульсного управления (см., например, [36]), однако речь шла об условиях, содержащих обычное управление. Ограничения же (0.11) определяют зависимость между импульсным управлением и траекторией. При этом сама модель приобретает новое качество: управляющая мера теряет свойство быть “экзогенным” параметром.

Ю.В. Орлов рассматривал задачи оптимального управления уравнениями в распределениях нулевого порядка

$$\dot{x} = f(t, x, u) + G(t, x, u)\dot{u}, \quad (0.12)$$

при ограничениях

$$\Psi(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad (0.13)$$

называемых в [80] смешанными. Управлениями при этом считались функции ограниченной вариации $u(\cdot)$. Мы склонны рассматривать условия (0.13) в модели (0.12) скорее как фазовые ограничения, каковыми они и становятся после введения нового управления $v := \dot{u}$ и доопределения системы тривиальным уравнением $\dot{u} = v$. В ряде случаев не существенно, что рассматривать в качестве управления, меру, или функцию ее распределения. Для нас же важно различать эти случаи: ограничение (0.13) выполняется при всех t , в то время как в (0.11) мы налагаем условия на фазовую траекторию лишь в точках приложения импульса. Отметим также, что результаты в [80] получены в рамках концепции *виброкорректных решений*. Последнее, в частности, предполагает выполнение условий Фробениуса, которые, как известно, является весьма жесткими предположениями и существенно сужают круг возможных приложений.

В работе [111] рассматривается задача оптимального импульсного управления при смешанном ограничении вида $R(t, x, u) \in \mathcal{C}$, где R — некоторая аналитическая функция, а $\mathcal{C}$ — замкнутое выпуклое множество. Это ограничение трактуется в обобщенном смысле — как система условий, которые накладываются на управляемые процессы в естественном и “быстром” времени (т.е. данное условие охватывает исходные траектории и управления, и такого же вида соотношение связывает некоторое управление и соответствующую траекторию в предельной системе, отвечающие каждому моменту приложения импульса).

Задача оптимального управления дифференциальным включением с мерами рассматривалась в [137] при смешанных ограничениях конусного типа. Последние представляют собой вариант нестандартных смешанных ограничений и могут быть переписаны в виде (0.11). Однако, задача оптимизации в [137] ставилась в специальном классе позиционных импульсных управлений вида $d\nu(t, x)$ — векторных мер, определенных на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ и непрерывных по x . Феномен позиционного импульсного управления на сегодняшний день малоизучен, а исследование задач позиционного импульсного управления представляет новое направление исследований.

Модели вида (0.10), (0.11) не встречались в известной нам литературе. В связи с этим, их изучение представляет чисто академический интерес. С другой стороны, ограничения вида (0.11) возникают как условия смены режимов в широком классе гибридных систем с управляемыми переключениями динамики. Для того чтобы пояснить это, вновь обратимся к соотношениям (0.6)–(0.8). Если представить скачки с помощью оператора сдвига не удастся, их явное описание в (0.7) можно интерпретировать как смешанное ограничение

$$(x(t-), x(t)) \in \mathcal{Z} \text{ } |d\mu|\text{-п.в.,}$$

где $\mathcal{Z} := \{(x, y) : y \in g(x, W), x \in \mathcal{Z}_-\}$, и мера $d\mu$ сосредоточена на $\{\tau\}$. При этом динамика определяется уравнением (0.10), где функция G отвечает за описание быстрых процессов, результаты которых мы интерпретируем как скачки траектории. В случае, когда характер быстрых движений не имеет содержательного смысла (скажем, как в логико-динамических моделях (M_4)), можно положить $G(x) = I$ (единичная матрица), $d\mu(t) = \sum_{\tau \leq t} c_\tau \delta(t - \tau) dt$. Ясно, что допустимые управляющие параметры c_τ в конечном счете имеют вид $c_\tau = g(x(\tau-), \nu_\tau) - x(\tau-)$, т.к. учет смешанного ограничения не оставляет иных вариантов скачка, кроме тех, что описываются условием (0.7).

Очевидно, случаи (M_1) и (M_3) укладываются в приведенное описание. Модель (M_2) есть частный вариант системы (0.10), (0.11), когда мера $d\mu$ дискретна и $\Psi = 0$, а $Q_i, i \in \{-, +\}$, — скалярные неотрицательные непрерывные функции, обращающиеся в нуль только на соответствующих множествах $\mathcal{Z}_i$. Функции Q_i с требуемыми свойствами существуют. Классический результат Х. Уитни утверждает, что для любого замкнутого множества найдется бесконечно гладкая функция, характеризующая его в указанном смысле. В (M_4) переключения логической переменной

можно понимать как скачки кусочно-постоянной траектории:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_q(t, x) := f(t, x(t), q(t)), \\ \dot{q} &= 0, \quad q(\tau) = g(\tau, x(\tau-), q(\tau-), \nu_\tau).\end{aligned}$$

Поэтому эта модель также охватывается соотношениями (0.10), (0.11).

В дальнейшем условимся называть модели вида (0.10), (0.11) *импульсными гибридными системами*, сокращенно ИГС (термин принят из [124] и [116], эпитет “гибридные” подчеркивает наличие специфических смешанных ограничений (0.11)). Такая терминология наиболее точно отражает принятую в работе точку зрения, когда выделенные “события” (переключения динамики) в моделях гибридных систем трактуются как результат применения импульсного управления. На языке теории гибридных систем наша модель может быть охарактеризована как система с управляемыми переключениями. Отметим, что гибридные системы с автономными переключениями описывают многоэтапные процессы [135, 136, 190]. В случае конечного числа переключений многоэтапный процесс определяется простой конкатенацией движений, происходящих на отрезках функционирования каждой из непрерывных подсистем.

Предмет и объект исследования

Объектом исследования являются задачи оптимального управления импульсными гибридными системами (ИГС), которые описываются дифференциальными уравнениями с мерами при ограничениях следующего вида:

$$Q(t, x(t-)) = 0, \quad Q(t, x(t)) = 0, \quad \Psi(t, x(t)) \leq 0 \quad d\mu\text{-п.в.}$$

Здесь $x(\cdot)$ — фазовая траектория импульсной системы, удовлетворяющая дифференциальному уравнению с мерами, $d\mu$ — скалярная неотрицательная мера Лебега-Стилтьеса (импульсное управление). Предмет исследования — необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления ИГС и численные методы решения нелинейных задач оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации.

Цель работы

Целью диссертационного исследования является доказательство принципа максимума для задач оптимального управления импульсными ги-

бридными системами и построение вычислительных методов импульсного управления в некоторых классах задач с траекториями ограниченной вариации.

Методы исследования

Исследование базируется на принципе максимума для классических задач оптимального управления [82] и его варианте для задач с фазовыми ограничениями [46], серии методов численного решения классических задач оптимального управления [93], методе разрывной замены времени [72], а также модифицированном преобразовании времени (адаптированном для задач оптимального управления импульсными гибридными системами). Метод разрывной замены времени сводит задачу импульсного управления к классической, а окончательные результаты получаются путем расшифровки в терминах исходной модели принципа максимума и алгоритмов улучшения в соответствующих преобразованных классических задачах.

Кроме того, в работе используются теория функции вещественного переменного и аппарат дифференциальных уравнений с мерами.

Научная новизна и полученные результаты

Выделим основные положения, выносимые на защиту:

1. Построено преобразование задачи оптимального управления импульсными гибридными системами в форме дифференциальных уравнений с мерами при смешанных ограничениях на меру и траекторию к эквивалентной классической задаче оптимального управления.
2. Доказан принцип максимума для задачи оптимального управления импульсной гибридной системой.
3. Разработаны численные алгоритмы поиска экстремалей в классе слабых и понтрягинских вариаций управления для нелинейных задач импульсного управления. Получено численное решение задач оптимального импульсного управления динамикой конкурирующих популяций и быстрогодействия в моделях движения манипуляторов с блокируемыми степенями свободы.

В работе предложена новая модификация метода разрывной замены времени, подходящая для задачи оптимального управления ИГС. Отметим, что другие реализации метода замены времени не применимы в этой задаче.

Полученный в работе принцип максимума является первым из известных автору результатов по необходимым условиям оптимальности первого порядка для задач оптимального импульсного управления со смешанными ограничениями на меру и траекторию.

Разработанные в диссертации процедуры численного решения нелинейных задач импульсного управления с траекториями ограниченной вариации при ограничении на полный импульс управляющего воздействия являются новыми.

Предложены новые формализации задач оптимального импульсного управления динамикой численностей конкурирующих популяций и быстрой динамики в двух моделях манипуляторов с блокируемой степенью свободы.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в работе результаты по преобразованию задачи оптимального управления ИГС к классической могут применяться для разработки методов качественного исследования задач оптимального управления ИГС (например, для получения условий оптимальности, инвариантности и др.). Принцип максимума может применяться при решении задач оптимального управления ИГС. Практическое значение полученных результатов определяется широким спектром прикладных задач импульсного управления, которые описываются классом моделей ИГС, и возможностью их численного решения на базе разработанных методов.

Проблематика работы является составной частью исследований, выполнявшихся в ИДСТУ СО РАН по базовому проекту “Методы оптимального управления при структурных воздействиях и неопределённости с приложением к техническим и социально-эколого-экономическим системам” (№ гос. регистрации 01.2.007 08580) в рамках программы фундаментальных исследований СО РАН, 2007–2009, по проекту III.24.1.3.10 “Методы и вычислительные технологии исследования задач управления с приложениями к социальным, экономическим, природным и техническим системам” (№ гос. регистрации 01.2.010 01345), 2010, 2011 а также по проектам РФФИ 05–01–00477, 08–01–00156.

Апробация работы

Результаты представлены на всероссийских и международных научных конференциях:

1. IX школе-семинаре “Математическое моделирование и информационные технологии”, Иркутск, 2007,
2. VIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 2007,
3. Международном симпозиуме “Обобщенные решения в задачах управления” (GSCP’08), 2008, Улан-Удэ,
4. The 8th Portuguese Conference on Automatic Control (CONTROLO’2008), UTAD – Vila Real, Portugal, 2008,
5. X Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию, информационным технологиям и управлению, п. Ханх, Монголия, 2009,
6. II Международной школе-семинаре “Нелинейный анализ и экстремальные задач”, Иркутск, 2010,
7. XIV и XV Байкальских международных школах-семинарах “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск-Северобайкальск, 2008 и Иркутск-Листвянка, 2011,
8. Российско-монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению, Иркутск, Россия — Ханх, Монголия, 2011,
9. The 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, August 28 — September 2, 2011,
10. The 5th International Conference on Physics and Control (PhysCon’2011), León, Spain, September 5–8, 2011,

а также на ежегодных конференциях “Ляпуновские чтения”, Иркутск, 2008–2010. Результаты обсуждались на семинаре в Институте математики Университета г. Севилья (Испания) (май, 2010) и регулярно — на семинарах Института динамики систем и теории управления СО РАН.

Публикации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах [21–28], [94, 147–151].

Структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на 17 разделов, заключения и списка литературы, включающего 198 наименований. Общий объем работы составляет 143 страницы, включая 29 рисунков.

Во **Введении** обосновывается актуальность темы работы, дается краткий обзор литературы и анонсируются основные результаты. Здесь мы также обсуждаем некоторые вопросы, относящиеся к проблеме моделирования сложных процессов.

Первая глава содержит постановки задач и изложение основных теоретических результатов. В § 1.1 поставлена задача оптимального управления импульсной гибридной системой в форме дифференциального уравнения с мерами при фазовых и смешанных ограничениях на меру и траекторию. Раздел 1.2 посвящен развитию метода разрывной замены времени для задач оптимального управления ИГС. В § 1.3 мы докажем необходимые условия сильного экстремума в задаче со смешанными ограничениями. Глава завершается обсуждением основных теоретических результатов.

Вторая глава посвящена методам численного анализа задачи оптимального управления ИГС. Здесь дается описание концептуального подхода к разработке методов улучшения импульсных управлений на основе редукции с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований. Мы начинаем с рассмотрения простейшей гибридной системы — модели с толчками. Описанию общей схемы улучшения управлений в таких моделях посвящен параграф 2.1. В § 2.2 рассматривается простейшая задача оптимального управления дифференциальным уравнением с мерами при ограничении на полный импульс управления и в предположении корректности. Решена задача о расшифровке локальных алгоритмов слабого варьирования в соответствующей редуцированной задаче. Формулируются алгоритмы улучшения импульсных процессов, исследуются их свойства.

Третья глава посвящена апробации разработанного метода редук-

ции и предложенной вычислительной процедуры. Здесь идеи и методы, изложенные в предыдущих главах, применяются для численного исследования ряда иллюстративных и прикладных моделей. В § 3.1 описывается вычислительный эксперимент, приводятся результаты расчетов для некоторых тестовых задач оптимального управления ДНС. Параграф 3.3 включает анализ трех содержательных моделей из математической теории биологических систем и робототехники: исследуется задача оптимального импульсного управления популяцией паразитических организмов, проведен численный анализ двух моделей манипуляторов с блокируемыми степенями свободы.

Список обозначений

- $:=$ — равно по определению;
- $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство функций, непрерывных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ (сокращенно $C([0, T])$, C , если T и n ясны из контекста);
- $C^k([0, T], \mathbb{R}^n)$ ($C^k([0, T])$, C^k) — пространство функций, определенных на отрезке $[0, T]$, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ и имеющих непрерывную производную порядка k ;
- $AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ ($AC([0, T])$, AC) — пространство функций, абсолютно непрерывных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^n$;
- $L^p([0, T], \mathbb{R}^n)$ ($L^p([0, T])$, L^p), $p = \overline{1, \infty}$, — банахово пространство n -мерных вектор функций, суммируемых со степенью p , если $p < \infty$, и существенно ограниченных измеримых по Лебегу, если $p = \infty$;
- $BV([0, T], \mathbb{R}^n)$ (сокращенно $BV([0, T])$, BV) — банахово пространство n -мерных функций ограниченной вариации на отрезке $[0, T]$;
- $BV^+([0, T], \mathbb{R}^n)$ (сокращенно $BV^+([0, T])$, BV^+) — пространство n -мерных вектор-функций класса BV , непрерывных справа на $[0, T]$;
- $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- $|\cdot| := \|\cdot\|_1$ — норма в $\mathbb{R}^n$ вида $|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма вектора: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$;

- $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $\mathbb{R}^n$ вида $\|x\|_\infty = \max_{i=1,n} |x_i|$;
- A' — транспонированная матрица A ;
- $x(t-)$ — левый предел функции $x(\cdot)$ в точке t ;
- $[x(t)] := x(t) - x(t-)$ — скачок непрерывной справа функции $x(\cdot)$ в точке t ;
- $\text{Var}_{[0,t]} x$ — полная вариация функции $x(\cdot)$ на отрезке $[0, t]$;
- $\mathcal{B}_A$ — совокупность борелевских подмножеств множества A ;
- $\delta(t - \tau)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке τ ;
- $\mathcal{L}(\cdot) := dt$ — мера Лебега на прямой;
- $d\mu$ — мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией ограниченной вариации $\mu(\cdot)$;
- $|d\mu|$ — мера, порожденная функцией $\text{Var}_{[0,\cdot]} \mu$ (мера полной вариации);
- $d\mu_{ac}$, $d\mu_{sc}$ и $d\mu_d$ — соответственно, абсолютно-непрерывная, сингулярная непрерывная и дискретная (атомическая) компоненты разложения Лебега $d\mu = d\mu_{ac} + d\mu_{sc} + d\mu_d$ меры $d\mu$;
- “ $d\mu$ -п.в.” — сокращенная запись для “почти всюду по мере $d\mu$ ”,
“ $\mathcal{L}$ -п.в.” — “почти всюду с точки зрения меры Лебега”;
- $\nabla f(x) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ — градиент вектор-функции f в точке x ;
- $\partial_x f(x, y)$ — частный субдифференциал Кларка функции f в точке (x, y) , т.е. замыкание множества всех частичных пределов, которые можно получить при вычислении частной производной $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$;
- $[H, G] := \nabla H G - \nabla G H$ — коммутатор (скобка Ли) векторных полей $H, G \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$;
- $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества A : $\chi_A(t) = 1$, если $t \in A$, и $\chi_A(t) = 0$, если $t \notin A$;

Перечень специфических обозначений и сокращений

- ДНС — дискретно-непрерывная система, система с чисто импульсными управлениями, с “толчками”;
- ИГС — импульсная гибридная система — в узком смысле используется нами для обозначения импульсной модели, описываемой дифференциальным уравнением с мерами при смешанном ограничении на меру и траекторию;
- $\text{Sign}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, — “многозначная сигнатура”: $\text{Sign}(s) = 1$, если $s > 0$, $\text{Sign}(s) = -1$, если $s < 0$, и $\text{Sign}(s) = [-1, 1]$, если $s = 0$;
- $\oplus$ — символ псевдообращения: $a^\oplus = a^{-1}$, если $a \neq 0$ и $a^\oplus = 0$, если $a = 0$, $a \in \mathbb{R}$;
- $D_\mu := \{\tau : [\mu(\tau)] > 0\}$ — множество точек разрыва функции $\mu(\cdot)$;
- $\text{supp}\{d\mu\}$ — множество, на котором сосредоточена мера $d\mu$, т.е. объединение носителя непрерывной компоненты $d\mu_c$ меры $d\mu$ (носитель $d\mu_c$ — наименьшее замкнутое множество полной меры $d\mu_c$) и множества всех атомов меры $d\mu$ (точек τ , таких что $d\mu(\{\tau\}) \neq 0$).

Глава 1

Импульсное управление при фазовых и смешанных ограничениях на меру и траекторию

Глава содержит описание модели импульсной гибридной системы и постановку задачи оптимального управления. Здесь будут получены основные теоретические результаты. Нам предстоит выработать базовый инструмент исследования — адекватную реализацию метода разрывной замены времени [74], что позволяет получить результат о редукции для задачи оптимального управления со смешанными ограничениями нового типа, связывающими фазовую траекторию и управляющую меру, а также при фазовых ограничениях в естественном и “быстром” времени. В завершение главы мы докажем необходимые условия оптимальности в этой задаче импульсного управления.

1.1 Импульсная гибридная система (ИГС). Постановка задачи оптимального управления

Начнем с формального описания управляемой системы в форме дифференциального уравнения с мерами, которую в дальнейшем будем называть “импульсной гибридной системой”, подчеркивая ее родство с рядом гибридных систем с управляемыми переключениями. После того, как будет оговорено понятие решения системы, мы сможем дать полное описание модели и сформулировать задачу оптимального управления.

1.1.1 Формальная модель

Пусть эволюция состояния объекта на отрезке времени $[0, T]$ определяется следующими условиями:

$$dx = f(t, x, u) dt + g(t, x, u) d\mu, \quad (1.1)$$

$$x(0-) = x^0, \quad (1.2)$$

$$u(t) \in U \quad \mathcal{L}, d\mu_c\text{-п.в.}, \quad (1.3)$$

$$\Phi(t, x(t)) \leq 0, \quad (1.4)$$

$$Q_-(t, x(t-)) = 0, \quad Q_+(t, x(t)) = 0 \quad d\mu\text{-п.в.}, \quad (1.5)$$

$$\Psi(t, x(t-)) \leq 0, \quad \Psi(t, x(t)) \leq 0 \quad d\mu\text{-п.в.}, \quad (1.6)$$

$$\mu(T) \leq M. \quad (1.7)$$

Здесь $x^0 \in \mathbb{R}^n$; $x(\cdot) \in BV^+([0, T], \mathbb{R}^n)$ являются непрерывными справа функциями ограниченной вариации; $u(\cdot)$ — измеримые по Борелю функции; $d\mu$ — неотрицательная мера Лебега-Стилтьеса, порожденная (неубывающей) функцией $\mu(\cdot) \in BV^+([0, T], \mathbb{R})$, $\mu(0-) = 0$, $d\mu_c$ — непрерывная компонента разложения Лебега меры $d\mu$; M — положительное число. Мы предполагаем, что $\Phi(0, x^0) \leq 0$.

В дальнейшем будем считать все функции измеримыми по Борелю, для того чтобы не заботиться об их измеримости относительно различных мер Лебега-Стилтьеса.

Введем основные предположения на входные данные модели:

(H_1) множество $U \subset \mathbb{R}^k$ выпукло и компактно;

(H_2) функции f и g непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют локальному условию Липшица по x :

$$(\forall \Delta > 0) (\exists k_\Delta^f(\cdot), k_\Delta^g(\cdot) \in L^1([0, T])) : |x| \leq \Delta, |y| \leq \Delta \Rightarrow$$

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leq k_\Delta^f(t)|x - y|,$$

$$|g(t, x, u) - g(t, y, u)| \leq k_\Delta^g(t)|x - y|,$$

при $u \in U$ и $t \in [0, T]$;

(H_3) функции f и g удовлетворяют следующим условиям роста: для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$ и $t \in [0, T]$ существуют такие положительные константы C_1 и C_2 , что

$$|f(t, x, u)| \leq C_1(|x| + 1)|u|, \quad |g(t, x, u)| \leq C_2(|x| + 1)|u|;$$

- (H₄) $Q_i, i \in \{-, +\}$, — непрерывные неотрицательные вектор-функции;
(H₅) вектор-функции Φ и Ψ непрерывны по (t, x) .

Отметим, что каждое из равенств

$$Q_{k,-}(t, x(t-)) = 0, \quad Q_{j,+}(t, x(t)) = 0, \quad k = \overline{1, \dim Q_-}, \quad j = \overline{1, \dim Q_+},$$

в векторных соотношениях (1.5) можно расценивать как описание некоторого замкнутого подмножества расширенного фазового пространства $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ (обозначим эти множества, соответственно, $\mathcal{Z}_{k,-}$ и $\mathcal{Z}_{j,+}$). Этот случай отвечает модели (M₂) из Введения.

► Отметим, что ограничения (1.5), (1.6) эквивалентны условию

$$\begin{aligned} \text{supp}\{d\mu\} \subseteq \{t \in [0, T] : Q_-(t, x(t-)) = 0, \quad Q_+(t, x(t)) = 0, \\ \Psi(t, x(t-)) \leq 0, \quad \Psi(t, x(t)) \leq 0\}, \end{aligned}$$

где $\text{supp}\{d\mu\}$ означает множество, на котором сосредоточена мера $d\mu$.

Модели, в которых импульсы (или переключение динамики) могут иметь место только при попадании траектории на заданное замкнутое множество широко изучаются в теории гибридных систем [124, 155, 166] и находят применение, например, в робототехнике [152].

Примерами моделей, в которых естественно возникают ограничения на правые пределы траектории в точках приложения импульсов, могут служить механические системы с блокируемыми степенями свободы, а также модели антропоморфных устройств. Простейшие модели такого типа рассматривались в [196, 197].

Пример 1.1.1 Движение телескопического манипулятора с блокируемой линейной степенью свободы [197] описывается соотношениями

$$\begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\dot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_2 x \dot{\varphi}^2 dt \\ -2m_2 x \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d\mu \\ u \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

где φ и x — соответственно, угловая и линейная координаты центра масс S_2 внутреннего звена поступательной пары, $\Theta(x) = \Theta_1 + \Theta_2 + m_1 a^2 + m_2 x^2$, m_i — масса i -го звена, a — линейная координата центра S_1 масс внешнего звена; Θ_i — осевые моменты инерции относительно осей, проходящих через центры масс. Управляющая сила u приложена к шарниру. Импульсное управление $d\mu \geq 0$ отвечает действию фрикционной силы. В результате

применения импульса происходит мгновенная остановка поступательного движения:

$$\dot{x}(t) = 0 \text{ } d\mu\text{-п.в.} \quad (1.9)$$

Данную модель и еще ряд моделей ИГС мы обсудим подробнее в Главе 3.

Модель (1.1)–(1.7) имеет своим прототипом гибридную систему (0.6)–(0.8). При исследовании моделей (1.1)–(1.7) и связанных с ними задач оптимизации целесообразно изучить круг вопросов, типичных для теории импульсного управления. В этот круг входят методы эквивалентного преобразования ИГС к системам с ограниченными управлениями, необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления ИГС и методы приближенного решения таких задач. В работах [25, 27] показано, что при стандартных предположениях и условиях робастности [74] рассматриваемая нами модель ИГС описывает все обобщенные решения гибридных систем типа (0.6)–(0.8), т.е. все слабые-* пределы последовательностей траекторий дискретно-непрерывной системы (случай (М₃) из Введения), удовлетворяющие смешанным ограничениям вида (1.5). Другими словами, модель ИГС есть результат расширения гибридной системы.

1.1.2 Понятие решения дифференциального уравнения с мерами. Пополнение графика разрывной траектории

Уравнение (1.1) содержит произведение борелевской функции на обобщенную. Чтобы придать смысл этому произведению обычно прибегают к *пополнению графика* разрывной траектории, полагая, что левый и правый ее пределы в каждой точке разрыва соединяет своего рода “путь” — результат движения в быстром масштабе времени. В общем случае такое пополнение графика не единственно, что приводит к возникновению интегральной воронки траекторий при заданном управлении. Мы будем придерживаться понятия решения [74], которое ввиду неотрицательности меры $d\mu$ допускает следующее уточнение: под *траекторией* системы (1.1), (1.2) при управлениях $u(\cdot)$, $d\mu$ мы понимаем непрерывную справа функцию $x(\cdot)$ ограниченной вариации, удовлетворяющую всюду на отрезке времени $[0, T]$ интегральному соотношению

$$x(t) = x^0 + \int_0^t f(\theta, x, u) d\theta + \int_0^t g(\theta, x, u) d\mu_c(\theta) + \sum [x(\tau)]. \quad (1.10)$$

Суммирование в (1.10) ведется по всем точкам $\tau \in D_\mu \cap [0, t]$. Здесь мы обозначаем $D_\mu = \{\tau \in [0, T] : [\mu(\tau)] \neq 0\}$ — множество точек разрыва функции $\mu(\cdot)$. Интеграл по мере понимается в смысле Лебега–Стилтьеса. Скачки функции $x(\cdot)$ в точках $\tau \in D_\mu$ определяются равенствами

$$[x(\tau)] = \varkappa_\tau(T_\tau) - x(\tau-),$$

где $T_\tau = [\mu(\tau)]$, а функции $\varkappa_\tau(\cdot) \in AC([0, T_\tau], \mathbb{R}^n)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}(\theta) &= g(\tau, \varkappa(\theta), u_\tau(\theta)), \quad u_\tau(\theta) \in U \text{ } \mathcal{L}\text{-п.в. на } [0, T_\tau], \\ \varkappa(0) &= x(\tau-). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Систему (1.11) назовем *предельной*, а семейство

$$X(\cdot) = \{\varkappa_\tau(\cdot), u_\tau(\cdot)\}_{\tau \in D_\mu},$$

будем называть *пополнением графика* разрывной траектории $x(\cdot)$. Будем рассматривать (1.1), (1.2) как компактную (хотя и весьма условную) форму записи соотношений (1.10), (1.11), полагая, что с каждой разрывной траекторией ассоциировано некоторое пополнение ее графика. Условия (H_2) – (H_4) обеспечивают глобальное существование и единственность решения системы (1.10), (1.11) при заданных $u(\cdot)$, $d\mu$ и $X(\cdot)$.

Скажем, что пополнение $X(\cdot)$ графика траектории $x(\cdot)$ является *допустимым*, если при каждом $\tau \in D_\mu$ оно удовлетворяет ограничениям

$$\Psi(\tau, \varkappa_\tau(\theta)) \leq 0, \quad \theta \in [0, T_\tau]. \tag{1.12}$$

Замечание 1.1.1 Формальная запись (1.1)–(1.7), вообще говоря, не содержит условия (1.12). При описании модели ИГС мы вводим данное ограничение в определение допустимого пополнения графика.

Замечание 1.1.2 Пусть $x(\cdot)$ — некоторая траектория импульсной системы (1.1), (1.2), отвечающая управлениям $u(\cdot)$ и $d\mu$, и $X(\cdot)$ — пополнение ее графика. Предположим, что набор $(x(\cdot), u(\cdot), d\mu, X(\cdot))$ удовлетворяет всем ограничениям (1.3)–(1.12), и

(H_6) множество $\mathcal{F}(t, x, U, [0, 1]) := \{\mathcal{F}(t, x, u, \alpha) \mid u \in U, \alpha \in [0, 1]\}$, где

$$\mathcal{F}(t, x, u, \alpha) = (1 - \alpha)f(t, x, u) + \alpha g(t, x, u),$$

выпукло при всех (t, x) .

Тогда существует [74] последовательность управлений $\{u_i(\cdot), w_i(\cdot)\}$, где $u_i(\cdot)$ и $w_i(\cdot)$ — борелевские функции, удовлетворяющие условиям

$$u_i(t) \in U, \quad w_i(t) \in \mathbb{R}^+ \quad \mathcal{L}\text{-п.в. на } [0, T], \quad \text{и} \quad \int_0^T w_i(t) dt \leq M,$$

такая что соответствующая последовательность $\{x_i(\cdot)\}$ траекторий обычной управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u_i) + g(t, x, u_i)w_i, \quad x(0) = x^0,$$

сходится к функции $x(\cdot)$ в слабой-* топологии пространства $BV([0, T], \mathbb{R}^n)$. Отметим, что точно также как в [74] мы не предполагаем удовлетворения ограничений (1.4)–(1.6), (1.12) на элементах аппроксимирующей последовательности, требуя, чтобы эти условия выполнялись в пределе. С этой точки зрения данные ограничения являются “слабыми” в терминологии [74].

Замечание 1.1.3 Заметим также, что для произвольной последовательности скалярных мер, слабо-* сходящихся к некоторой мере $d\mu$, соответствующая последовательность мер $|d\mu_i|$ полной вариации не обязана сходиться к $|d\mu|$. Однако ввиду неотрицательности всех $d\mu_i$ и $d\mu$, мы имеем

$$|d\mu_i| = d\mu_i \rightarrow |d\mu| = d\mu \quad \text{слабо-} * \quad \text{в } C^*([0, T], \mathbb{R}).$$

Это наблюдение позволяет уточнить понятие решения [74] применительно к рассматриваемой нами модели. А именно, при определении предельных траекторий мы полагаем $T_\tau = [\mu(\tau)]$. Если бы мера была знакопеременной, то длины T_τ интервалов быстрых движений, отвечающих каждому моменту τ приложения импульса, следовало бы, вообще говоря, рассматривать как дополнительные управляющие параметры.

Сделаем ряд комментариев относительно предложенной модели импульсной гибридной системы.

► В ИГС имеется два типа управлений. Управления $u(\cdot)$ подчинены жестким (поточечным) ограничениям. Импульсное управление — мера Лебега-Стилтьеса $d\mu$. Условие (1.7) представляет собой ограничение на полный “импульс” управления, называемое также мягким и энергетическим. Здесь M имеет смысл предельной величины некоего ресурса.

► Ключевую роль в системе (1.3)–(1.12) играют условия (1.5), (1.6). Эти условия можно рассматривать как нестандартные фазовые ограничения.

“Нестандартность” их проявляется в том, что выполнение этих условий требуется лишь вдоль множества, где сосредоточена мера $d\mu$. Поскольку сама мера $d\mu$ выступает в роли управления, то в контексте задачи оптимизации ограничения (1.5), (1.6) естественно трактовать как ограничения *смешанного* типа. Они могут рассматриваться как некоторое обобщение смешанных ограничений типа равенств и неравенств в классических задачах с ограниченными управлениями. Ограничения (1.5), (1.6) определяют ту качественную особенность, которая роднит нашу модель с гибридными системами. С содержательной точки зрения, эти условия могут служить формализацией естественных или конструктивных свойств моделируемого объекта. Они описывают множество “маневров”, которые объект может совершить под воздействием импульсного управления. Отметим, что мы трактуем ограничения типа равенства (1.5) как “условия переключения” и не требуем выполнения их аналога вдоль процессов предельной системы.

► Условия (1.4) и (1.12) естественно интерпретируются как фазовые ограничения, соответственно, в “естественном” и *быстром* времени (т.е. на протяжении акта импульсного воздействия). Учет таких ограничений позволяет охватить ряд моделей из механики систем с ударами (см. [131, 168, 197]). В частности, соотношения вида (1.3)–(1.12) дают описание обобщенных решений в гибридных системах с односторонними ограничениями [74, 123, 171] (типичная ситуация $\Psi = -\Phi$). В таких моделях скачкообразные изменения компонент скорости фазового вектора, возникающие при упругом соударении с препятствием, интерпретируются как результаты быстрого движения в запрещенной области (внутри препятствия). Независимые фазовые ограничения в быстром времени предъявляют дополнительные требования к “пути”, который проходит тело, погружаясь в препятствие.

1.1.3 Задача оптимального управления ИГС

Сформулируем задачу оптимального управления импульсной гибридной системой:

$$(P) \quad I = F(x(T)) \rightarrow \inf \text{ при ограничениях (1.3)–(1.12).}$$

Здесь мы дополнительно предполагаем, что

(H₇) функция $F(x)$ непрерывна.

Набор $\sigma = (x(\cdot), u(\cdot), d\mu(\cdot), X(\cdot))$, удовлетворяющий всем условиям (1.3)–(1.12), будем называть *допустимым процессом* задачи (P) . Множество допустимых управляемых процессов обозначим через $\Sigma(P)$ и будем предполагать, что $\Sigma(P) \neq \emptyset$.

Пример 1.1.2 В классических задачах импульсного управления оптимизация по обычному ограниченному управлению, как правило, производится независимо от поиска оптимальной импульсной стратегии. При этом задача, фактически, разбивается на две самостоятельные подзадачи. Следующий пример показывает, что в задачах оптимального управления ИГС имеет место принципиально иная ситуация:

$$T \rightarrow \min, \quad dx = udt - d\mu, \quad u \in [-\underline{u}, \bar{u}] \quad \mathcal{L}\text{- п.в.}, \quad (1.13)$$

$$x(0-) = 2, \quad (1.14)$$

$$x(t-), x(t) \in \{0, 3\} \quad d\mu\text{- п.в. на } [0, T], \quad d\mu \geq 0. \quad (1.15)$$

Этой модели можно условно дать следующую интерпретацию. Пусть требуется как можно скорее спуститься со второго этажа здания на нулевой уровень. Для спуска можно воспользоваться скоростным лифтом, который “мгновенно” (по сравнению со скоростью обычного движения) перемещается между этажами. Однако, лифт не совершает остановок на первом и втором этажах (как это часто бывает в российских многоэтажках), так что ближайшая к нам точка доступа к лифту располагается на третьем этаже. Здесь обычное управление $u(\cdot)$ — скорость “пешего” передвижения, $\underline{u}$ и $\bar{u}$ — абсолютные значения максимальных скоростей спуска и подъема, а применение импульсного управления $d\mu$ означает использование лифта, который может “мгновенно” перенести нас с третьего этажа на нулевой без промежуточных остановок.

Задача имеет очевидное решение, которое легко обнаружить, построив множество достижимости системы (1.13)–(1.15): если $\bar{u} < \frac{1}{2}\underline{u}$, то оптимальное управление $u^* \equiv -\underline{u}$, $d\mu^*$ — нулевая мера, т.к. условие (1.15) вообще не реализуется (спускаемся пешком). Если же $\bar{u} > \frac{1}{2}\underline{u}$, то $u^* \equiv \bar{u}$ и $d\mu^* = 3\delta(t - 1/\bar{u})$ (разумнее сначала подняться на третий этаж, а оттуда уже спуститься на лифте). В случае равенства $\bar{u} = \frac{1}{2}\underline{u}$ обе указанные управляющие стратегии дают оптимальное решение. Итак, если скорость подъема достаточно высока, то найденная нами стратегия u^* противоречит цели управления.

Этот простейший пример иллюстрирует одну из особенностей задач оптимального управления импульсными гибридными системами, отличающую их от классических постановок. А именно, при решении таких задач оптимизация по ограниченному и импульсному управлению уже не может проводиться независимо.

1.2 Преобразование задачи

Как показано в работах В.И. Гурмана, Б.М. Миллера, В.А. Дыхты, С.Т. Завалищина, А.Н. Сесекина, Ф.Л. Перейра, А. Брессана и др., при изучении задач импульсного управления методы редукции играют ключевую роль. При этом базовые инструменты исследования, такие как необходимые и достаточные условия оптимальности, условия инвариантности, а также процедуры численного анализа, могут быть получены “расшифровкой” соответствующих условий и процедур в преобразованной задаче оптимального управления.

Одним из основных результатов работы является редукция задачи оптимального управления импульсными гибридными системами на основе разрывной замены времени. При обосновании этого результата используются идея растяжения моментов импульса в интервалы и техника “расшифровки” [74]. Невозможность напрямую применить метод [74] объясняется наличием смешанных ограничений (1.5), (1.6), причем основную сложность доставляют ограничения типа равенства. Для учета последних предлагается технический прием “расщепления” фазовой траектории вдоль интервалов “быстрых” движений — растянутых моментов импульса, — что формально приводит к расширению фазового пространства. Модификация и дополнение метода Б.М. Миллера [74] с целью учета новых нестандартных ограничений потребовали использования замены времени, отличной от применяемой Б.М. Миллером, и приводят к существенно иному виду редуцированной задачи, что является развитием метода разрывной замены времени применительно к рассматриваемому классу задач.

Полезно привести следующие комментарии относительно прямого пространственно-временного преобразования задачи (P):

- каждый момент τ импульса растягивается в интервал, длина которого равна удвоенной величине интенсивности $[\mu(\tau)]$ соответствующего импульса;

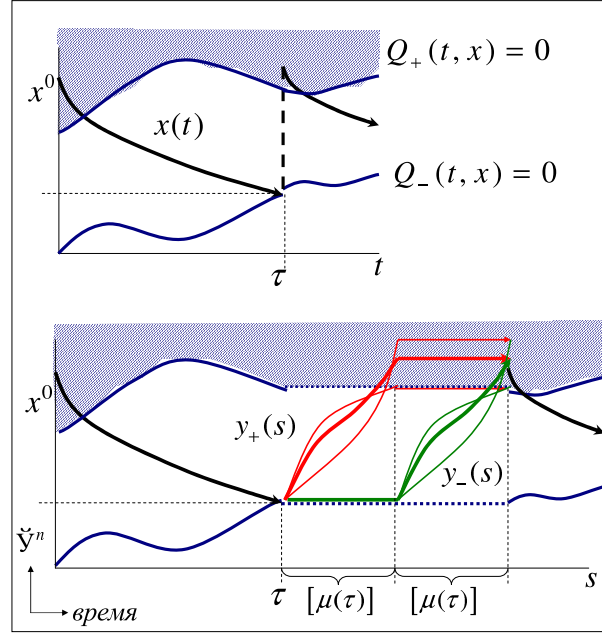


Рис. 1.1: Преобразование траектории ИГС

- вдоль таких интервалов “нового времени”, отвечающих быстрым движениям в исходной модели, траектория системы “расщепляется” (фактически, это ведет к удвоению размерности фазового пространства, см. Рис. 1.1) так, чтобы к окончанию интервала растяжения обе ветви расщепленной траектории соединились;
- на протяжении первой половины каждого интервала растяжения (отвечающего, скажем, моменту τ импульса) мы сохраняем информацию о том, что в исходном времени имело место $Q_-(\tau, x(\tau-)) = 0$: как это показано на рисунке, первая ветвь $y_-(\cdot)$ сохраняет на этом подынтервале постоянное значение $y_-(s) = x(\tau-)$;
- вдоль второй половины интервала быстрого времени другая ветвь $y_+(\cdot)$ сохраняет информацию о правом пределе $x(\tau)$ траектории $x(\cdot)$ в точке τ ее разрыва и о выполнении условия $Q_+(\tau, x(\tau)) = 0$.

Предположим также, что наряду с (H_1) – (H_7) выполнено условие (H_8) функции f и g удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста по t ,

и будем считать для простоты, что $Q_{\pm}$ — скалярные функции.

На нефиксированном отрезке времени $[0, S]$, $T \leq S$, рассмотрим задачу

$$(RP) \quad J = F(y_+(S)) \rightarrow \inf$$

при ограничениях

$$\dot{\xi} = \alpha, \quad \dot{y}_{\pm} = \alpha f(\xi, y_{\pm}, v) + (1 - \alpha)\beta_{\pm} g(\xi, y_{\pm}, v), \quad \dot{\eta}_{\pm} = (1 - \alpha)\beta_{\pm}, \quad (1.16)$$

$$\xi(0) = \eta_{\pm}(0) = 0, \quad y_{\pm}(0) = x^0, \quad (1.17)$$

$$\xi(S) = T, \quad \eta_{+}(S) = \eta_{-}(S) \leq M, \quad y_{+}(S) = y_{-}(S), \quad \Phi(S, y_{+}(S)) \leq 0, \quad (1.18)$$

$$v(s) \in U, \quad \alpha(s), \beta_{\pm}(s) \in [0, 1], \quad \beta_{+}(s) + \beta_{-}(s) = 1, \quad (1.19)$$

$$\alpha(s)\Phi(\xi(s), y_{+}(s)) \leq 0, \quad (1.20)$$

$$(1 - \alpha(s))\beta_{-}(s)\Psi(\xi(s), y_{-}(s)) \leq 0, \quad (1.21)$$

$$\eta_{-}(s) - \eta_{+}(s) \leq 0, \quad J_j = \int_0^S \Upsilon_j(s) ds = 0, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (1.22)$$

Здесь траектории $\xi(\cdot)$, $y_i(\cdot)$ и $\eta_i(\cdot)$, $i \in \{+, -\}$, являются абсолютно непрерывными функциями, управления $v(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ и $\beta_i(\cdot)$ — измеримые по Борелю, условия (1.19)–(1.21) выполняются $\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, S]$, функции Υ_j в (1.22) имеют вид

$$\Upsilon_1 = \alpha(\eta_{+} - \eta_{-} + \varphi(y_{+} - y_{-})), \quad \text{где } \varphi(x) = \langle x, x \rangle,$$

$$\Upsilon_2 = (1 - \alpha)\beta_{+}Q_{-}(\xi, y_{-}), \quad \text{и } \Upsilon_3 = (1 - \alpha)\beta_{-}Q_{+}(\xi, y_{+}),$$

(напомним, что функции Q_{+} и Q_{-} предполагаются неотрицательными в своих областях определения). Остальные входные данные в (RP) — те же, что и в задаче (P) . Через $\Sigma(RP)$ будем обозначать множество процессов $\varsigma = (z(\cdot), \omega(\cdot); S)$, допустимых в задаче (RP) , т.е. удовлетворяющих условиям (1.16)–(1.22). Здесь $z = (\xi, y, \eta)$ и $\omega = (v, \alpha, \beta)$, $y = (y_{+}, y_{-})$, а η и β определяются аналогично.

Замечание 1.2.1 Подчеркнем, что редуцированная задача рассматривается на нефиксированном отрезке времени. Это стандартная задача оптимального управления при ограничениях смешанного, фазового и функционального типа. Смешанное ограничение (1.20) отвечает фазовому ограничению (1.4), накладываемому на процессы исходной задачи (P) в естественной временной шкале. Траектории η_{+} и η_{-} есть две ветви преобразованной траектории, которые отвечают функции распределения μ меры $d\mu$, подобно тому как y_{+} и y_{-} отвечают фазовой траектории x . Управления β_{-} , β_{+} вводятся для того, чтобы выделять упомянутые “ветви”. Условие (1.20) соответствует системе ограничений (1.6) и (1.12). Совокупность условий (1.22) отвечает смешанным ограничениям типа равенства (1.5) в

исходной задаче (P) . Фазовое ограничение $\eta_- - \eta_+ \leq 0$ играет здесь ключевую роль (см. доказательство теоремы 1.2.2, п. iii)), а его учет в редуцированной задаче позволяет, в частности, различать скачки исходной фазовой траектории “с множества” и скачки “на множество”. Это ограничение не имеет прообраза в исходной задаче и не возникает как результат интерпретации какого-либо условия в ней, но отражает внутренние взаимоотношения траекторий редуцированной системы. Условие $\eta_-(S) \leq M$ отвечает ограничению на полный импульс управления. Остальные терминальные ограничения в (1.18) призваны обеспечить равенства $y_+(S) = y_-(S)$, $\eta_+(S) = \eta_-(S)$ и условие $\Phi(S, y_+(S)) = \Phi(T, x(T)) \leq 0$ в случае, когда в исходной задаче имеет место импульс в последний момент времени.

Для того чтобы избавиться от смешанных ограничений (1.20), (1.21) можно применить стандартный прием: введем в рассмотрение функции “срезки” $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Psi}$, где

$$\widehat{\Phi}(t, x) = \max\{\Phi(t, x), 0\}$$

и $\widehat{\Psi}$ определяется аналогично. Тогда условия (1.20), (1.21) преобразуются к функциональным ограничениям

$$\int_0^S \alpha(s) \widehat{\Phi}(\xi(s), y_+(s)) ds = 0, \quad (1.23)$$

$$\int_0^S (1 - \alpha(s)) \beta_-(s) \widehat{\Psi}(\xi(s), y_-(s)) ds = 0. \quad (1.24)$$

Ввиду условия (1.22), терминальные ограничения $\eta_+(S) = \eta_-(S)$ и $y_+(S) = y_-(S)$ эквивалентны одному скалярному условию

$$\eta_+(S) - \eta_-(S) + \varphi(y_+(S) - y_-(S)) = 0.$$

Предположим, в исходной задаче отсутствуют фазовые ограничения (1.4) (а значит, и в задаче (RP) нет условия $\Phi(S, y_+(S)) \leq 0$). Перепишав терминальные условия в указанном виде, получим задачу, конечной блок в которой будет, как нетрудно заметить, *регулярным* [2, 3].

Замечание 1.2.2 При редукции фазовое ограничение (1.4) исходной задачи можно интерпретировать по-разному: условие (1.20) отвечает понятию слабого решения исходной системы (говорят [74], что траектория удовлетворяет фазовым ограничениям в слабом смысле). Эпитет “слабое” связан с тем, что фазовое ограничение может нарушаться в быстром времени. Если же мы заменим смешанное ограничение (1.20) фазовым

$$\Phi(\xi, y_+) \leq 0 \text{ всюду на } [0, S],$$

то о соответствующих траекториях исходной импульсной системы можно будет сказать, что они удовлетворяют ограничению (1.4) в сильном смысле (т.е. как в обычном времени, так и вдоль процессов предельной системы). Ввиду наличия независимых условий (1.12), наложенных на процессы в быстром времени, мы пользуемся понятием слабого решения.

Редуцированная задача (RP) эквивалентна (P) в следующем смысле.

Теорема 1.2.1 Пусть задан процесс

$$\sigma = (x, u, d\mu, X) \in \Sigma(P).$$

Тогда в задаче (RP) найдется допустимый процесс $\varsigma = (z, \omega; S)$, где $S = \Gamma(T)$, $\Gamma(t) = t + 2\mu(t)$, $t \in [0, T]$, такой, что равенства

$$y_+(\Gamma(t)) = y_-(\Gamma(t)) = x(t), \quad \eta_+(\Gamma(t)) = \eta_-(\Gamma(t)) = \mu(t) \quad (1.25)$$

выполняются всюду на отрезке времени $[0, T]$.

Доказательство использует замену переменной под знаком интеграла Лебега-Стилтьеса и утверждение 0.0.1. Искомое допустимое управление $\omega(\cdot)$ в редуцированной задаче может быть определено с помощью следующей процедуры *прямого перехода*.

Рассмотрим объединение $\Omega = \bigcup_{\tau \in D_\Gamma} \Omega_\tau$ интервалов $\Omega_\tau = [\Gamma(\tau-), \Gamma(\tau)]$, где $D_\Gamma = \{\tau \in [0, T] : [\Gamma(\tau)] > 0\}$, и обозначим

$$\Omega_{\tau,-} = \Gamma(\tau-) + [0, [\mu(\tau)]], \quad \Omega_{\tau,+} = \Gamma(\tau-) + [[\mu(\tau)], [\Gamma(\tau)]], \quad (1.26)$$

$$\Omega_i = \bigcup_{\tau \in D_\Gamma} \Omega_{\tau,i}, \quad i \in \{-, +\}.$$

Управления $v(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ можно определить следующими соотношениями

$$v(s) = \begin{cases} u_\tau(\theta_{\tau,i}(s)), & s \in \Omega_{\tau,i}, \quad \tau \in D_\Gamma, \\ u(\xi(s)), & s \in [0, S] \setminus \Omega, \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\beta_+(s) = \begin{cases} 1, & s \in \Omega_-, \\ 0, & s \in \Omega_+, \\ 1/2, & s \in [0, S] \setminus \Omega, \end{cases} \quad \beta_- = 1 - \beta_+. \quad (1.28)$$

где $\xi(\cdot) = \Gamma^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\Gamma(\cdot)$, $\theta_{\tau,-}(s) = s - \Gamma(\tau-)$ и $\theta_{\tau,+}(s) = \theta_{\tau,-}(s) - [\mu(\tau)]$. В качестве искомого управления $\alpha(\cdot)$ может быть выбрана борелевская функция, такая что $\alpha = \dot{\xi} \mathcal{L}$ -п.в. на $[0, S]$.

Остается проинтегрировать систему (1.16)–(1.18) при определенных выше управлениях и убедиться, что выполнены условия (1.19)–(1.22). Это делается элементарно по аналогии, например, с [74]. Таким образом, полностью определен допустимый в задаче (RP) процесс ς . $\square$

Теорема 1.2.2 Каждому процессу $\varsigma \in \Sigma(RP)$ отвечает некоторый набор $\sigma \in \Sigma(P)$ такой, что выполняются равенства (1.25), в которых $\Gamma(t) = \inf\{s \in [0, S] : \xi(s) > t\}$, $t \in [0, T)$, и $\Gamma(T) = S$.

Доказательство. Искомые управления в задаче (P) можно определить соотношениями

$$u(t) = \tilde{v}(\Gamma(t)), \quad (1.29)$$

$$\mu(t) = \eta_-(\Gamma(t)), \quad x(t) = y_-(\Gamma(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.30)$$

$$u_\tau(\theta) = v(s_\tau(\theta)), \quad \varkappa_\tau(\theta) = y_-(s_\tau(\theta)), \quad \theta \in [0, T_\tau], \quad (1.31)$$

где $T_\tau = [\mu(\tau)]$,

$$s_\tau(\theta) = \inf\{s \in \Omega_\tau : \theta_\tau(s) > \theta\}, \quad \theta_\tau(s) = \int_{\Gamma(\tau-)}^s \beta_-(\vartheta) d\vartheta,$$

и $\tau \in D_\Gamma$. Покажем, что полученный процесс является допустимым в задаче (P) .

i) Управления $u(\cdot)$ и $u_\tau(\cdot)$, очевидно, удовлетворяют ограничениям (1.3) и (1.11). В качестве $\tilde{v}(\cdot)$ можно взять подкласс управления $v(\cdot)$ такой, что включение $\tilde{v}(\Gamma(t)) \in U$ выполняется почти всюду с точки зрения меры Лебега и непрерывной компоненты $d\mu_c$ меры $d\mu$, порожденной функцией $\mu(\cdot)$ из (1.30).

ii) Из (1.30), (1.16) вытекает представление для функции $\mu(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^{\Gamma(t)} (1 - \alpha(s)) \beta_-(s) ds = \\ &= \int_0^{\Gamma(t)} \chi_{\{[0, S] \setminus \Omega\}}(s) (1 - \alpha(s)) \beta_-(s) ds + \sum_{\tau \in D_\Gamma} \int_{\Gamma(\tau-)}^{\Gamma(t)} \beta_-(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что скачки функции $\mu(\cdot)$ определяются соотношениями

$$[\mu(\tau)] = \int_{\Gamma(\tau-)}^{\Gamma(\tau)} \beta_-(s) ds,$$

непрерывная же компонента $\mu_c(\cdot)$ имеет вид

$$\mu_c(t) = \int_0^{\Gamma(t)} \chi_{\{[0, S] \setminus \Omega\}}(s) (1 - \alpha(s)) \beta_-(s) ds.$$

Очевидно, имеет место включение $D_\mu \subseteq D_\Gamma$, которое на самом деле выполнено как равенство. Действительно, замена переменной под интегралом в условии $J_1 = 0$ из (1.22) дает нам

$$\eta_+(\Gamma(t)) = \eta_-(\Gamma(t)), \quad y_+(\Gamma(t)) = y_-(\Gamma(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (1.32)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\eta_+(\Gamma(t-)) = \eta_-(\Gamma(t-))$ всюду на $[0, T]$ (это так, поскольку суперпозиции $\eta_i(\Gamma(\cdot))$ есть непрерывные справа функции ограниченной вариации). Ясно, что $\beta_-(s) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в. на Ω_τ влекло бы $\beta_+(s) = 1$ $\mathcal{L}$ -п.в. на этом интервале, и мы имели бы $\eta_-(\Gamma(\tau)) \neq \eta_+(\Gamma(\tau))$. Следовательно, множество точек разрыва функции $\mu(\cdot)$ совпадает с D_Γ .

Для функции $x(\cdot) = y_-(\Gamma(\cdot))$ заключаем

$$\begin{aligned} y_-(\Gamma(t)) &= x^0 + \int_0^{\Gamma(t)} f(\xi, y_-, v) d\xi(s) + \int_0^{\Gamma(t)} g(\xi, y_-, v) d\mu_c(\xi(s)) + \\ &+ \sum_{\tau \in D_\Gamma \cap [0, t]} \int_{\Omega_\tau} \beta_- g(\tau, y_-, v) ds = \\ &= x^0 + x_a(t) + x_c(t) + x_d(t). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Производя замену переменной под знаком интеграла Лебега–Стилтьеса, получим

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \int_0^{\Gamma(t)} f(\xi(s), y_-(s), v(s)) d\xi(s) = \\ &= \int_0^{\xi(\Gamma(t))} f(\xi(\Gamma(\theta)), y_-(\Gamma(\theta)), v(\Gamma(\theta))) d\theta = \\ &= \int_0^t f(\theta, x(\theta), u(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Точно так же,

$$x_c(t) = \int_0^{\Gamma(t)} g(\xi(s), y_-(s), v(s)) d\mu_c(\xi(s)) = \int_0^t g(\theta, x(\theta), u(\theta)) d\mu_c(\theta).$$

Функция скачков $x_d(\cdot)$ имеет вид

$$x_d(t) = \sum_{\tau \in D_\Gamma \cap [0, t]} [x(\tau)],$$

где

$$\begin{aligned} [x(\tau)] &= \int_{\Gamma(\tau-)}^{\Gamma(\tau)} \beta_-(s) g(\tau, y_-(s), v(s)) ds = \int_{s_\tau(0)}^{s_\tau(T_\tau)} g(\tau, y_-(s), v(s)) d\theta_\tau(s) = \\ &= \int_{\theta_\tau(s_\tau(0))}^{\theta_\tau(s_\tau(T_\tau))} g(\tau, y_-(s), v(s)) \big|_{s=s_\tau(\theta)} d\theta = \\ &= \int_0^{T_\tau} g(\tau, y_-(s_\tau(\theta)), u_\tau(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Из (1.31) и последнего равенства мы получим

$$\dot{\kappa}_\tau(\theta) = \dot{y}_-(s_\tau(\theta))\dot{s}_\tau(\theta) = \frac{\dot{y}_-(s_\tau(\theta))}{\dot{\theta}_\tau(s_\tau(\theta))} = g(\tau, \kappa_\tau(\theta), u_\tau(\theta)),$$

т.е. функции $\kappa_\tau(\cdot)$ удовлетворяют предельной системе (1.11), и $[x(\tau)] = \kappa_\tau(T_\tau) - x(\tau-)$, $\theta_\tau(\Gamma(\tau)) = T_\tau$. Вообще говоря, $s_\tau(\theta)$ — разрывная замена времени. Однако, вдоль интервалов постоянства обратной функции $\theta_\tau(\cdot) = s_\tau^{-1}(\cdot)$ мы имеем $\beta_-(s) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в., и, следовательно, $\dot{y}_- = 0$, т.е. $y_-(\cdot)$ сохраняет на каждом из таких интервалов постоянное значение. Значит, $y_-(s_\tau(\theta)-) = y_-(s_\tau(\theta))$. Заключаем, что траектория $x(\cdot)$, определенная равенством (1.30), удовлетворяет (1.10), (1.11).

iii) Покажем теперь, что определенные выше $x(\cdot)$ и $d\mu$ удовлетворяют смешанным ограничениям (1.5), (1.6). Преобразуя интегралы в равенствах $J_2 = 0$ и $J_3 = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^T Q_-(t, x(t))d\mu_c(t) &= 0, \quad \int_0^T Q_+(t, x(t))d\mu_c(t) = 0, \\ \int_{\Omega_\tau} \beta_+ Q_-(\xi(s), y_-(s))ds &= 0 \text{ и} \\ \int_{\Omega_\tau} \beta_- Q_+(\xi(s), y_+(s))ds &= 0, \quad \tau \in D_\Gamma. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Первая пара условий (1.34) эквивалентна соотношениям

$$Q_-(t, x(t-)) = 0, \quad Q_+(t, x(t)) = 0 \quad d\mu_c\text{-п.в. на } [0, T].$$

Поскольку $D_\mu = D_\Gamma$, то, для того чтобы убедиться в выполнении смешанных ограничений (1.5), достаточно установить равенства $Q_-(\tau, x(\tau-)) = 0$ и $Q_+(\tau, x(\tau)) = 0$ для каждого $\tau \in D_\Gamma$. Другими словами, покажем справедливость включения $D_\Gamma \subseteq \mathcal{A}_- \cap \mathcal{A}_+$, где

$$\mathcal{A}_- = \{t \in [0, T] : Q_-(t, x(t-)) = 0\},$$

$$\mathcal{A}_+ = \{t \in [0, T] : Q_+(t, x(t)) = 0\}.$$

Предположим, что найдется $\tau \in D_\Gamma \setminus \mathcal{A}_-$ и рассмотрим множество $\mathcal{A}_- = \{s \in [0, S] : Q_-(\xi(s), y_-(s)) = Q_-(\tau, y_-(s)) = 0\}$, которое, очевидно, замкнуто. Тогда на интервале Ω_τ найдется самая левая точка $\underline{s}$ — корень уравнения $Q_-(\tau, y_-(s)) = 0$. Эта точка, конечно, не может совпадать с левым концом $s = \Gamma(\tau-)$ интервала Ω_τ , т.к. $Q_-(\tau, y_-(\Gamma(\tau-))) = Q_-(\tau, x(\tau-)) > 0$. Тогда $Q_-(\tau, y_-(s)) > 0$ на некотором подынтервале

$\tilde{\Omega}_\tau = [\Gamma(\tau-), \underline{s})$ положительной меры Лебега. Второе соотношение в (1.34) предполагает, что $\beta_+(s) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в. на $\tilde{\Omega}_\tau$. В таком случае функция $\eta_+(\cdot)$ сохраняет на $\tilde{\Omega}_\tau$ постоянное значение $\eta_+(s) = \eta_+(\Gamma(\tau-))$, в то время как $\eta_-(\cdot)$ возрастает на этом подынтервале (т.к. $\dot{\eta}_-(s) = \beta_-(s) = 1 - \beta_+(s) = 1$ $\mathcal{L}$ -п.в. на $\tilde{\Omega}_\tau$). Но ввиду равенства $\eta_+(\Gamma(\tau-)) = \eta_-(\Gamma(\tau-))$ подобная ситуация противоречит фазовому ограничению $\eta_-(s) \leq \eta_+(s)$ в (1.22), и следовательно, $D_\mu \subseteq \mathcal{A}_-$. Включение $D_\mu \subseteq \mathcal{A}_+$ проверяется аналогично. Таким образом, при нарушении хотя бы одного из условий (1.5), точка $\tau \in [0, T]$ не является атомом управляющей меры $d\mu$.

iv) Рассмотрим функциональное условие (1.23). Замена переменной под интегралом Лебега-Стилтьеса, а также учет (1.30) и (1.32) дает

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^S \alpha(s) \hat{\Phi}(\xi(s), y_+(s)) ds = \int_0^{\Gamma(T)} \hat{\Phi}(\xi(s), y_+(s)) d\xi(s) = \\ &= \int_0^T \hat{\Phi}(\xi(\Gamma(t)), y_+(\Gamma(t))) dt = \int_0^T \hat{\Phi}(t, x(t)) dt. \end{aligned}$$

В силу неотрицательности $\hat{\Phi}$ отсюда следует равенство $\hat{\Phi}(t, x(t)) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, T]$, которое на самом деле выполняется при всех $t \in [0, T]$, т.к. суперпозиция $\hat{\Phi}(\cdot, x(\cdot))$ есть функция ограниченной вариации. Принимая во внимание определение функции $\hat{\Phi}$, приходим к соотношению (1.4).

v) Проверим выполнение условия (1.6) и фазовых ограничений (1.12) в быстром времени. Эти соотношения вытекают из равенства (1.24):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^S (1 - \alpha(s)) \beta_-(s) \hat{\Psi}(\xi(s), y_-(s)) ds = \\ &= \int_0^{\Gamma(T)} \hat{\Psi}(\xi(s), y_-(s)) d\eta_-(s) = \\ &= \int_0^{\Gamma(T)} \hat{\Psi}(\xi(s), y_-(s)) d\mu_c(\xi(s)) + \sum_{\tau \in D_\Gamma} \int_{\Gamma(\tau-)}^{\Gamma(\tau)} \beta_-(s) \hat{\Psi}(\tau, y_-(s)) ds. \end{aligned}$$

Неотрицательность функции $\hat{\Psi}$ предполагает обращение в нуль каждого из слагаемых в последней сумме. Замена переменной под знаком интеграла в первом из них дает

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\Gamma(T)} \hat{\Psi}(\xi(s), y_-(s)) d\mu_c(\xi(s)) = \int_0^T \hat{\Psi}(\xi(\Gamma(t)), y_-(\Gamma(t))) d\mu_c(t) = \\ &= \int_0^T \hat{\Psi}(t, x(t)) d\mu_c(t). \end{aligned}$$

Равенство нулю последнего интеграла эквивалентно условиям (1.6).

Наконец, равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma(\tau-)}^{\Gamma(\tau)} \beta_-(s) \widehat{\Psi}(\tau, y_-(s)) ds = \int_{s_\tau(0)}^{s_\tau(T_\tau)} \widehat{\Psi}(\tau, y_-(s)) d\theta_\tau(s) = \\ &= \int_0^{T_\tau} \widehat{\Psi}(\tau, y_-(s_\tau(\theta))) d\theta = \int_0^{T_\tau} \widehat{\Psi}(\tau, \varkappa(\theta)) d\theta, \end{aligned}$$

имеющие место при каждом $\tau \in D_\Gamma$, предполагают $\widehat{\Psi}(\tau, \varkappa(\theta)) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, T_\tau]$, что в силу определения срезки $\widehat{\Psi}$ совпадает с (1.12). На этом мы завершаем доказательство. $\square$

Замечание 1.2.3 Отметим, что доказательство теоремы получено без предположений о выпуклости правой части редуцированной системы. Такое предположение необходимо в случае, если мы хотим обеспечить существование оптимального решения, но не при обосновании эквивалентности.

Легко устанавливается следующий результат.

Теорема 1.2.3 В задаче (P) существует оптимальный процесс σ^* , если и только если существует оптимальный набор ς^* в редуцированной задаче (RP) , причем,

$$I(\sigma^*) = J(\varsigma^*).$$

Если процесс σ оптимален в (P) , то процесс ς , определенный с помощью прямого перехода, будет оптимальным в (RP) . И наоборот, если ς есть оптимальный процесс в (RP) , то и процесс σ , полученный в результате обратного преобразования, оптимален в (P) .

Доказательство. В силу теорем 1.2.1 и 1.2.2, как только процессы σ и ς связаны соотношениями прямого или обратного перехода, мы имеем равенства

$$I = F(x(T)) = F(y_+(\Gamma(T))) = F(y_+(S)) = J, \quad (1.35)$$

которые немедленно следуют из (1.25). Из (1.35) ясно, что функционалы в обеих задачах имеют один и тот же инфимум. Действительно, пусть $\sigma^* \in \Sigma(P)$ — оптимален. Предположим, что соответствующий процесс ς^* , полученный в силу прямого перехода (и, следовательно, допустимый),

не является оптимальным в задаче (RP) . Тогда найдется $\tilde{\zeta} \in \Sigma(RP)$, на котором значение целевого функционала меньше:

$$J(\tilde{\zeta}) < J(\zeta^*).$$

Но по теореме 1.2.2 такому процессу $\tilde{\zeta}$ будет отвечать набор $\tilde{\sigma} \in \Sigma(P)$, для которого, согласно (1.35), имеем

$$I(\tilde{\sigma}) = J(\tilde{\zeta}) < J(\zeta^*) = I(\sigma^*).$$

Мы пришли к противоречию с тем, что σ^* — оптимальный процесс в задаче (P) . Симметричный случай исключается аналогично. $\square$

Метод преобразований может быть использован для качественного анализа исходной задачи, скажем, для получения необходимых условий оптимальности.

1.3 Необходимые условия оптимальности

В настоящем параграфе мы сформулируем необходимые условия сильного экстремума в классе допустимых процессов задачи (P) .

1.3.1 Формулировка результата

Для простоты изложения будем считать, что Φ, Ψ — также скалярные функции и не зависят явно от времени t . Предположим дополнительно, что

(H_9) функции $f, g, Q_{\pm}$ имеют непрерывные частные производные по t, x ,

(H_{10}) F, Φ и Ψ непрерывно дифференцируемы.

Введем в рассмотрение функции Понтрягина вида

$$\begin{aligned} H^a(t, x, \psi^t, \psi^x, u) &= \langle \psi^x, f(t, x, u) \rangle + \psi^t, \\ H^s(t, x, \psi^x, \psi^\mu, u) &= \langle \psi^x, g(t, x, u) \rangle + \psi^\mu, \end{aligned}$$

расширенные функции Понтрягина

$$\begin{aligned} \tilde{H}^a(t, x, \psi^t, \psi^x, u; l) &= H^a(t, x, \psi^t, \psi^x, u) - l\hat{\Phi}(x), \\ H_{\pm}^s(t, x, \psi^x, \psi^\mu, u; \gamma) &= H^s(t, x, \psi^x, \psi^\mu, u) - \gamma Q_{\pm}(t, x), \\ \tilde{H}_{\pm}^s(t, x, \psi^x, \psi^\mu, u; \gamma, q) &= H_{\pm}^s(t, x, \psi^x, \psi^\mu, u; \gamma) - q\hat{\Psi}(x), \end{aligned}$$

а также соответствующие гамильтонианы

$$\mathcal{H}^a = \max_{u \in U} H^a, \quad \mathcal{H}^s = \max_{u \in U} H^s, \\ \tilde{\mathcal{H}}^a = \max_{u \in U} \tilde{H}^a, \quad \mathcal{H}_{\pm}^s = \max_{u \in U} H_{\pm}^s, \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\pm}^s = \max_{u \in U} \tilde{H}_{\pm}^s.$$

Здесь $\psi = (\psi^t, \psi^x, \psi^\mu)$ — вектор, сопряженный к (t, x, μ) (μ формально считается фазовой переменной), l, γ, q — некоторые скалярные параметры, $\hat{\Phi} = \max\{0, \Phi\}$, и обозначение $\hat{\Psi}$ имеет аналогичный смысл.

Теорема 1.3.1 Пусть $\sigma^* \in \Sigma(P)$ — оптимальный процесс. Тогда найдется нетривиальный набор Λ множителей Лагранжа, т.е.

- числа λ_k , $k = \overline{0, 7}$, где $\lambda_0, \lambda_2, \lambda_6 \geq 0$;
- неубывающая функция $b(\cdot) \in BV^+([0, T], \mathbb{R})$, $b(0-) = 0$;
- неотрицательные числа $c_\tau \leq [b(\tau)]$, $\tau \in D_\mu^*$;
- скалярные неотрицательные меры $d\rho^\Phi$ и $d\rho^\Psi$, определенные на $\mathcal{B}_{[0, T]}$ и абсолютно непрерывные относительно мер Лебега и $d\mu_c^*$, соответственно;
- скалярные неотрицательные меры $d\rho_\tau^\Psi$, $\tau \in D_\mu^*$, каждая из которых определена на $\mathcal{B}_{[0, T_\tau^*]}$, $T_\tau^* = [\mu^*(\tau)]$, и абсолютно непрерывна относительно меры Лебега;
- а также функция $\phi(\cdot) \in BV^+([0, T], \mathbb{R}^{2n+3})$ с компонентами $\phi = (\phi^t, \phi_+^x, \phi_-^x, \phi_+^\mu, \phi_-^\mu)$,

такой что выполнены условия а)-е). Эти условия имеют вид:

а) Справедливы равенства

$$\lambda_2(\mu^*(T) - M) = 0, \quad \lambda_6\Phi(x^*(T)) = 0, \quad (1.36)$$

меры $d\rho^\Phi$ и $d\rho^\Psi$ локализованы, соответственно, на множествах

$$\{t \in [0, T] : \Phi(x^*(t)) = 0\}$$

и

$$\{t \in [0, T] : \Psi(x^*(t)) = 0\},$$

при любом $\tau \in D_\mu^*$ мера $d\rho_\tau^\Psi$ локализована на множестве

$$\{\theta \in [0, T_\tau^*] : \Psi(x_\tau^*(\theta)) = 0\}.$$

b) Компоненты $\phi_i^\mu(\cdot)$, $i \in \{+, -\}$, вектор-функции $\phi(\cdot)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\phi_+^\mu(t) &= \lambda_3(t - T) + b(T) - b(t) - \lambda_2 - \lambda_7, \\ \phi_-^\mu(t) &= \lambda_3(T - t) + b(t) - b(T) + \lambda_7, \quad t \in [0, T].\end{aligned}\quad (1.37)$$

Функции $\phi^t(\cdot)$, $\phi_i^x(\cdot)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с мерами

$$\begin{aligned}d\phi^t &= -\frac{\partial}{\partial t}H^a dt - \frac{\partial}{\partial t}(H_+^s + H_-^s)d\mu^*, \\ d\phi_+^x &= -\frac{\partial}{\partial x}H^a dt - \frac{\partial}{\partial x}H_+^s d\mu^* + \lambda_4 \nabla \Phi d\rho^\Phi, \\ d\phi_-^x &= -\frac{\partial}{\partial x}H_-^s d\mu^* + \lambda_5 \nabla \Psi d\rho^\Psi\end{aligned}\quad (1.38)$$

при условиях

$$\begin{aligned}\phi^t(T) &= -\lambda_1, \\ \phi_+^x(T) &= -\lambda_0 \nabla F(x^*(T)) - \lambda_6 \nabla \Phi(x^*(T)), \quad \phi_-^x(T) = 0.\end{aligned}$$

В уравнениях (1.38) производные функций H^a , H_i^s подсчитываются вдоль наборов $(t, x^*, \phi^t, \phi_+^x + \phi_-^x, u^*)$ и $(t, x^*, \phi_i^x, \phi_i^\mu, u^*; \lambda_3)$, соответственно, а производные функций Φ и Ψ вычисляются в точке x^* . Скачки функций $\phi^t(\cdot)$, $\phi_i^x(\cdot)$ в точках $\tau \in D_\mu^*$ определяются соотношениями

$$[\phi^t(\tau)] = \phi^t(\tau) - p_\tau^{t,+}(0), \quad [\phi_i^x(\tau)] = \phi_i^x(\tau) - p_\tau^{x,i}(0). \quad (1.39)$$

Функции $p_\tau^{t,i}(\cdot)$, и $p_\tau^{x,i}(\cdot)$, $i \in \{+, -\}$, удовлетворяют на отрезке $[0, T_\tau^*]$ сопряженной предельной системе:

$$dp_\tau^{t,i} = -\frac{\partial}{\partial t}H^s(\tau, \varkappa_\tau^*, p_\tau^{x,i}, \phi_i^\mu(\tau), u_\tau^*) d\theta, \quad (1.40)$$

$$dp_\tau^{x,i} = -\frac{\partial}{\partial x}H^s(\tau, \varkappa_\tau^*, p_\tau^{x,i}, \phi_i^\mu(\tau), u_\tau^*) d\theta + \lambda_5 \nabla \Psi(\varkappa_\tau^*) d\rho_\tau^i \quad (1.41)$$

при условиях

$$p_\tau^{t,-}(T_\tau^*) = \phi_\tau^t(\tau), \quad p_\tau^{t,+}(T_\tau^*) = p_\tau^{t,-}(0),$$

$$p_\tau^{x,i}(T_\tau^*) = \phi_i^x(\tau).$$

Здесь $d\rho_\tau^- = d\rho_\tau^\Psi$ и $d\rho_\tau^+$ — нулевая мера.

с) Равенства

$$H^a(t, x^*, \phi^t, \phi_+^x + \phi_-^x, u^*) = \mathcal{H}^a(t, x^*, \phi^t, \phi_+^x + \phi_-^x), \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \max\{H_-^s(t, x^*, \phi_+^x, \phi_+^\mu, u^*; \lambda_3), H_+^s(t, x^*, \phi_-^x, \phi_-^\mu, u^*; \lambda_3)\} = \\ = \max\{\mathcal{H}_-^s(t, x^*, \phi_+^x, \phi_+^\mu; \lambda_3), \mathcal{H}_+^s(t, x^*, \phi_-^x, \phi_-^\mu; \lambda_3)\} \end{aligned} \quad (1.43)$$

выполняются, соответственно, $\mathcal{L}$ -п.в. и $d\mu_c^*$ -п.в. на $[0, T]$.

d) Неравенство

$$\mathcal{H}^a \geq \max\{\tilde{\mathcal{H}}_-^s, \tilde{\mathcal{H}}_+^s\} \quad (1.44)$$

выполняется $\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, T] \setminus \text{supp}\{d\mu_c^*\}$, а неравенство

$$\mathcal{H}^a \leq \max\{\mathcal{H}_-^s, \mathcal{H}_+^s\} \quad (1.45)$$

справедливо $d\mu_c^*$ -п.в. на $[0, T]$. Здесь функции $\mathcal{H}^a$ и $\tilde{\mathcal{H}}_\pm^s$ вычисляются вдоль наборов $(t, x^*, \phi^t, \phi_+^x + \phi_-^x)$ и $(t, x^*, \phi_\mp^x, \phi_\mp^\mu; \lambda_3, \lambda_5)$, соответственно, а функции $\mathcal{H}_\pm^s$ — в точках $(t, x^*, \phi_\mp^x, \phi_\mp^\mu; \lambda_3)$.

e) При каждом $\tau \in D_\mu^*$ условия

$$H^s(\tau, \varkappa_\tau^*, p_\tau^{x,i}, \phi_i^\mu(\tau), u_\tau^*) = \mathcal{H}^s(\tau, \varkappa_\tau^*, p_\tau^{x,i}, \phi_i^\mu(\tau)), \quad i \in \{-, +\}, \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}^a(\tau, \varkappa_\tau^*, p_\tau^{t,+}, p_\tau^{x,+} + p_\tau^{x,-}(T_\tau^*); \lambda_4) \leq H^s(\tau, \varkappa_\tau^*, p_\tau^{x,+}, \phi_+^\mu(\tau) + c_\tau, u_\tau^*) \\ + \lambda_3(\theta + \varphi(\varkappa_\tau^* - x^*(\tau-))), \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^a(\tau, x^*(\tau), p_\tau^{t,-}, p_\tau^{x,-} + p_\tau^{x,+}(T_\tau^*)) \leq H^s(\tau, \varkappa_\tau^*, p_\tau^{x,-}, \phi_-^\mu(\tau) - c_\tau, u_\tau^*) \\ + \lambda_3([\mu^*(\tau)] - \theta + \varphi(x^*(\tau) - \varkappa_\tau^*)) \end{aligned} \quad (1.48)$$

выполняются $\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, T_\tau^*]$.

Предлагаемые условия оптимальности близки по форме к принципу максимума для слабых решений в задачах импульсного управления с фазовыми ограничениями и необходимым условиям оптимальности обобщенных решений гибридных систем с односторонними ограничениями [74].

► Условия а) представляют собой условия дополняющей нежесткости. В них, в частности, фигурируют неизвестные меры Лебега-Стилтьеса. Последние выполняют роль множителей Лагранжа, соответствующих фазовым ограничениям в задаче (P) в обычном и быстром времени.

► Двойственные траектории удовлетворяют сопряженному дифференциальному уравнению с мерами, а их скачки определяются с помощью решений сопряженной предельной системы.

- Возникновение в качестве множителя Лагранжа неизвестной функции ограниченной вариации $b(\cdot)$, а также повышение размерности сопряженных переменных связаны со смешанными ограничениями (1.5), (1.6).
- Условия максимума с) имеют стандартный вид.
- Условия d) оптимальности носителя непрерывной компоненты управляющей меры устанавливают приоритеты между возможными режимами поведения системы.
- Группа условий e) отвечает за локализацию моментов импульсов и правильный выбор пополнения $X^*(\cdot) = \{\varkappa_\tau^*(\cdot), u_\tau^*(\cdot)\}_{\tau \in D_\mu^*}$ графика траектории $x^*(\cdot)$.

1.3.2 Доказательство необходимых условий оптимальности

Обоснование теоремы 1.3.1 представляет собой непосредственную расшифровку необходимых условий оптимальности в задаче (RP) . Поскольку ограничения (1.23), (1.24) содержат негладкие функции срезки $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Psi}$, мы воспользуемся слабой формой принципа максимума [47] для негладких задач оптимального управления. Отметим, что расшифровка становится возможной в силу результатов теорем 1.2.1 и 1.2.3.

Для задачи (RP) введем следующие конструкции:

- концевая функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L(z(S)) = & \zeta_0 F(y_+(S)) + \zeta_1(\xi(S) - T) + \zeta_2(\eta_+(S) - M) + \\ & + \zeta_6 \Phi(y_+(S)) + \zeta_7(\eta_+(S) - \eta_-(S) + \varphi(y_+(S) - y_-(S))); \end{aligned}$$

- функция Понтрягина

$$h(\gamma, \psi, \omega) = \alpha h^1 + (1 - \alpha) h^0, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} h^1(z, \psi, v) = & \langle \psi_+^y + \psi_-^y, f(\xi, y_+, v) \rangle + \psi^\xi - \\ & - \zeta_3(\eta_+ - \eta_- + \varphi(y_+ - y_-)) - \zeta_4 \widehat{\Phi}(y_+), \\ h^0(z, \psi, \beta, v) = & \beta_+ h_-^0(z, \psi, v) + \beta_- h_+^0(z, \psi, v), \\ h_-^0 = & \langle \psi_+^y, g(\xi, y_+, v) \rangle + \psi_+^\eta - \zeta_3 Q_-(\xi, y_-), \\ h_+^0 = & \langle \psi_-^y, g(\xi, y_-, v) \rangle + \psi_-^\eta - \zeta_3 Q_+(\xi, y_+) - \zeta_5 \widehat{\Psi}(y_-). \end{aligned} \tag{1.49}$$

Здесь $\zeta_i, i = \overline{0, 7}$, — некоторые числа, $\psi = (\psi^\xi, \psi^y, \psi^\eta)$ — вектор двойственных переменных, где $\psi^y = (\psi_+^y, \psi_-^y)$, и ψ^η имеет аналогичный смысл.

Сформулируем необходимые условия понтрягинского минимума в задаче (RP) [46].

Утверждение 1.3.1 Пусть процесс $\varsigma^* = (\gamma^*(\cdot), \omega^*(\cdot), S^*)$ оптимален в задаче (RP) . Тогда существует набор множителей Лагранжа $(\zeta, da, \psi(\cdot))$, где $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_7)$, $\zeta_i \in \mathbb{R}$, da — мера, порожденная функцией $a(\cdot) \in BV([0, S^*], \mathbb{R})$, $a(0-) = 0$, а $\psi(\cdot)$ — вектор-функция с вышеупомянутыми компонентами, определенная на $[0, S^*]$, такой что выполнены условия:

- Условия неотрицательности и нетривиальности:

$$\begin{aligned} \zeta_0, \zeta_2, \zeta_6 &\geq 0, \quad da \geq 0, \\ |\zeta| + a(S^*) &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

- Условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{aligned} \zeta_2(\eta_+^*(S^*) - M) &= 0, \quad \int_0^{S^*} (\eta_+^*(s) - \eta_-^*(s)) da(s) = 0, \\ \zeta_6 \Phi(y_+^*(S^*)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

- Компоненты $\psi^\xi(\cdot)$, $\psi^y(\cdot) = (\psi_+^y(\cdot), \psi_-^y(\cdot))$ вектор-функции $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют $\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, S^*]$ системе

$$\dot{\psi}^\xi = -\frac{\partial}{\partial \xi} h(z^*, \psi, \omega^*), \quad (1.52)$$

$$\dot{\psi}^y \in -\partial_y h(z^*, \psi, \omega^*). \quad (1.53)$$

Компонента $\psi^\eta(\cdot) = (\psi_+^\eta(\cdot), \psi_-^\eta(\cdot))$ является непрерывной справа функцией ограниченной вариации и удовлетворяет da -п.в. и $\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, S^*]$ дифференциальному уравнению с мерами

$$d\psi^\eta = -\frac{\partial}{\partial \eta} h(z^*, \psi, \omega^*) ds + (-da, da)'. \quad (1.54)$$

- Условия трансверсальности

$$\psi(S^*) = -\nabla L(z^*(S^*)). \quad (1.55)$$

- Условия максимума

$$h(z^*, \psi, \omega^*) = \max_{\omega \in \mathcal{U}} h(z^*, \psi, \omega), \quad (1.56)$$

$\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, S^*]$, где $\mathcal{U} = U \times [0, 1]^3$.

Сделаем ряд замечаний относительно последнего утверждения.

► Фазовое ограничение $\Xi(z) := \eta_- - \eta_+ \leq 0$ согласовано с терминальными условиями (1.18), и выполнены условия *управляемости в конечных точках относительно фазового ограничения* [2, 3]. Действительно,

$$\langle \nabla \Xi(z), \mathcal{F}(z, \omega) \rangle = (1 - \alpha)(\beta_- - \beta_+),$$

где $\mathcal{F}$ означает правую часть редуцированной системы (1.16). Очевидно, существуют допустимые управления, такие что для любой траектории z выполняется $\langle \nabla \Xi(z), \mathcal{F}(z, \omega) \rangle < 0$ (например, при $\alpha = 0$ и $\beta_+ = 1$ это скалярное произведение равно -1), и такие, что $\langle \nabla \Xi(z), \mathcal{F}(z, \omega) \rangle < 0$ (скажем, при $\alpha = 0$ и $\beta_- = 1$ это выражение есть 1 для любого z).

► В формулировке утверждения 1.3.1 фигурирует неизвестная мера Лебега-Стилтьеса da , которая играет роль множителя Лагранжа, отвечающего фазовому ограничению $\eta_- - \eta_+ \leq 0$.

► В условии (1.53) через $\partial_y h$ обозначен субдифференциал функции h по переменной y , т.е. замыкание множества всех частичных пределов, которые можно получить при вычислении соответствующей частной производной [47]. Используем стандартное представление для субдифференциала [74]: найдутся измеримые функции $a^\Phi(\cdot)$, $a^\Psi(\cdot)$ такие, что

$$a^\Phi(s) \begin{cases} = 1, & \Phi(y_+(s)) > 0, \\ = 0, & \Phi(y_+(s)) < 0, \\ \in [0, 1], & \Phi(y_+(s)) = 0, \end{cases} \quad a^\Psi(s) \begin{cases} = 1, & \Psi(y_-(s)) > 0, \\ = 0, & \Psi(y_-(s)) < 0, \\ \in [0, 1], & \Psi(y_-(s)) = 0 \end{cases} \quad (1.57)$$

$\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, S^*]$, и субдифференциалы $\partial_{y_j} h$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \partial_{y_+} h = & \alpha \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y_+, v) \right)' (\psi_+^y + \psi_-^y) - \zeta_3(y_+ - y_-) - \zeta_4 a^\Phi \nabla \Phi(y_+) \right\} + \\ & + (1 - \alpha) \left\{ \beta_+ \left(\frac{\partial}{\partial x} g(\xi, y_+, v) \right)' \psi_+^y - \beta_- \zeta_3 \frac{\partial}{\partial x} Q_+(\xi, y_+) \right\}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \partial_{y_-} h = & \alpha \zeta_3(y_+ - y_-) - (1 - \alpha) \beta_+ \zeta_3 \frac{\partial}{\partial x} Q_-(\xi, y_-) + \\ & + (1 - \alpha) \beta_- \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} g(\xi, y_-, v) \right)' \psi_-^y - \zeta_5 a^\Psi \nabla \Psi(y_-) \right\}. \end{aligned}$$

При этом дифференциальное включение (1.53) преобразуется к обыкновенному дифференциальному уравнению.

► Решение системы (1.54), (1.55) на отрезке $[0, S^*]$ легко найти:

$$\begin{aligned}\psi_+^\eta(s) &= \zeta_3(\xi^*(s) - T) + a(S^*) - a(s) - \zeta_2 - \zeta_7, \\ \psi_-^\eta(s) &= \zeta_3(T - \xi^*(s)) + a(s) - a(S^*) + \zeta_7.\end{aligned}\quad (1.58)$$

► Гамильтониан $\mathbf{h}$ редуцированной задачи (RP) имеет вид

$$\mathbf{h}(z, \psi) = \max \{ \bar{h}^1, \bar{h}^0 \} = \max \{ \bar{h}^1, \bar{h}_-^0, \bar{h}_+^0 \},$$

и $\bar{\omega}(z, \psi) \in \text{Arg max } h(z, \psi, \omega)$ определяется формулами

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(z, \psi) &\begin{cases} = 1, & \gamma^\alpha(z, \psi) > 0, \\ = 0, & \gamma^\alpha(z, \psi) < 0, \\ \in [0, 1], & \gamma^\alpha(z, \psi) = 0, \end{cases} \\ \bar{\beta}_1(z, \psi) &\begin{cases} = 1, & \gamma^\beta(z, \psi) > 0, \\ = 0, & \gamma^\beta(z, \psi) < 0, \\ \in [0, 1], & \gamma^\beta(z, \psi) = 0, \end{cases} \quad \bar{\beta}_2(z, \psi) = 1 - \bar{\beta}_1(z, \psi), \quad (1.59) \\ \bar{v}(z, \psi) &\in \text{Arg max}_{v \in U} (\bar{\alpha}h^1 + (1 - \bar{\alpha})\{\bar{\beta}_1h_-^0 + \bar{\beta}_2h_+^0\}).\end{aligned}$$

Здесь $\bar{h}^i(z, \psi) = \max_{\omega \in \mathcal{U}} h^i$, $i = 0, 1$, $\bar{h}_j^0(z, \psi) = \max_{\omega \in \mathcal{U}} h_j^0$, $j \in \{-, +\}$, где h^i и h_j^0 определены в (1.49). В (1.59) мы используем обозначения $\gamma^\alpha = \bar{h}^1 - \bar{h}^0$, $\gamma^\beta = (1 - \bar{\alpha})(\bar{h}_-^0 - \bar{h}_+^0)$.

Доказательство теоремы 1.3.1. Согласно теореме 1.2.1 оптимальному процессу σ^* отвечает набор $\varsigma^* \in \Sigma(RP)$, полученный из σ^* с помощью процедуры прямого перехода. При этом соответствующие траектории связаны равенствами

$$\begin{aligned}x^*(t) &= y_i^*(\Gamma^*(t)), \quad \mu^*(t) = \eta_i^*(\Gamma^*(t)), \quad \text{где} \\ \Gamma^*(t) &= t + 2\mu^*(t), \quad t \in [0, T].\end{aligned}\quad (1.60)$$

По теореме 1.2.3 процесс ς^* оптимален в задаче (RP) , и, следовательно, он удовлетворяет условиям утверждения 1.3.1.

Пусть ζ_i , $i = \overline{0, 5}$, da , и $\psi(\cdot)$ — некоторые множители Лагранжа, отвечающие процессу ς^* . Определим следующие числа и функции:

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \zeta_k, \quad k = \overline{0, 7}, \quad c_\tau = [a(\Gamma^*(\tau))], \quad \tau \in D_\mu^*, \\ \phi^t(t) &= \psi^\xi(\Gamma^*(t)), \quad \phi_i^x(t) = \psi_i^y(\Gamma^*(t)), \\ \phi_i^\mu(t) &= \psi_i^\eta(\Gamma^*(t)), \quad i \in \{-, +\}, \\ b(t) &= a(\Gamma^*(t)), \quad \text{где } \Gamma^*(t) = t + 2\mu^*(t), \quad t \in [0, T].\end{aligned}\quad (1.61)$$

Меры $d\rho^\Phi(t)$ и $d\rho^\Psi(t)$ зададим равенствами

$$d\rho^\Phi(t) = a^\Phi(\Gamma^*(t))dt, \quad d\rho^\Psi(t) = a^\Psi(\Gamma^*(t))d\mu_c^*(t), \quad (1.62)$$

а меры $d\rho_\tau^\Psi(\theta)$ — с помощью их функций распределения

$$\rho_\tau^\Psi(\theta) = \int_0^{s_{\tau,+}(\theta)} a^\Psi(s)ds. \quad (1.63)$$

Покажем, что искомый набор Λ можно определить с помощью (1.61)–(1.63). В самом деле, по теореме 1.2.1, процесс ς^* удовлетворяет соотношениям

$$S^* = T + 2\mu^*(T), \quad (1.64)$$

$$x^*(t) = y_i^*(\Gamma^*(t)), \quad \mu^*(t) = \eta_i^*(\Gamma^*(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (1.65)$$

а) Неотрицательность множителей λ_0 , λ_2 и условие дополняющей нежесткости (1.36) непосредственно следуют из (1.51) и (1.61).

Установим свойства локализации мер $d\rho^\Phi$ и $d\rho^\Psi$ и выясним их связь с мерами Лебега и $d\mu^*$. Из представления (1.62) следует, что $d\rho^\Phi$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Из (1.20) заключаем, что $\alpha^*(s) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в. на множестве $\{s : \Phi(y_+^*(s)) > 0\}$. С другой стороны, $a^\Phi(s) = 0$ при $\mathcal{L}$ -п.в. s таких, что $\Phi(y_+^*(s)) < 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \rho^\Phi(t) &= \int_0^t a^\Phi(\Gamma^*(\theta))d\theta = \int_0^{\Gamma^*(t)} a^\Phi(s)d\xi^*(s) = \int_0^{\Gamma^*(t)} \alpha^*(s)a^\Phi(s)ds = \\ &= \int_0^{\Gamma^*(t)} \chi_{\{s: \Phi(y_+^*(s))=0\}}(s)a^\Phi(s)d\xi^*(s) = \\ &= \int_0^t \chi_{\{t: \Phi(x^*(t))=0\}}(\theta)a^\Phi(\Gamma^*(\theta))d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $d\rho^\Phi$ сосредоточена на множестве $\{t : \Phi(x^*(t)) = 0\}$. Точно так же проверяется свойство локализации мер $d\rho_\tau^\Psi$, каждая из которых, как явствует из вида ее функции распределения, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Рассмотрим меру $d\rho^\Psi$, порожденную функцией

$$\begin{aligned} \rho^\Psi(t) &= \int_0^{\Gamma^*(t)} a^\Psi(s) d\mu_c^*(\xi^*(s)) = \\ &= \int_0^{\Gamma^*(t)} \chi_{[0, S^*] \setminus \Omega^*}(s)(1 - \alpha^*(s))\beta_-^*(s)a^\Psi(s)ds. \end{aligned}$$

По определению $d\rho^\Psi$ абсолютно непрерывна относительно $d\mu_c^*$. Из последнего представления видно, что мера $d\rho^\Psi$ сосредоточена на множестве $\{t : \Psi(x^*(t)) = 0\}$. В самом деле, в силу смешанного ограничения (1.21) неравенство $\Psi(y_-^*(s)) > 0$ влечет $(1 - \alpha^*(s))\beta_-^*(s) = 0$, а по определению (1.57), $\Psi(y_-^*(s)) < 0$ предполагает $a^\Psi(s) = 0$, так что интеграл

$$\int_0^{\Gamma^*(t)} \chi_{[0, S^*] \setminus \Omega^*}(s) (1 - \alpha^*(s)) \beta_-^*(s) a^\Psi(s) ds$$

совпадает с

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Gamma^*(t)} \chi_{\{s \in [0, S^*] \setminus \Omega^* : \Psi(y_-^*(s)) = 0\}}(s) (1 - \alpha^*(s)) \beta_-^*(s) a^\Psi(s) ds = \\ &= \int_0^{\Gamma^*(t)} \chi_{\{s : \Psi(y_-^*(s)) = 0\}}(s) a^\Psi(s) d\mu_c^*(\xi^*(s)) = \\ &= \int_0^t \chi_{\{t : \Psi(x^*(t)) = 0\}}(\vartheta) a^\Psi(\Gamma^*(\vartheta)) d\mu_c^*(\vartheta), \end{aligned}$$

т.е. $d\rho^\Psi(t) = \chi_{\{t : \Psi(x^*(t)) = 0\}}(t) a^\Psi(\Gamma^*(t)) d\mu_c^*(t)$, что и доказывает свойство локализации меры.

б) Замена переменной $s = \Gamma^*(t)$ в (1.58), а также учет (1.61) и соотношений замены времени приводят нас к представлению (1.37). Сопряженные уравнения (1.38), (1.39) можно получить из (1.52), (1.55), применяя обратное преобразование времени $s = \Gamma^*(t)$ и стандартный прием замены переменной под знаком интеграла Лебега-Стилтьеса. Рассмотрим, например, траекторию $\phi_+^x(\cdot)$. Из (1.52), (1.55) следуют соотношения

$$\begin{aligned} & \phi_+^x(t) + \lambda_0 \nabla F(x^*(T)) + \lambda_6 \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x^*(T)) = \\ &= \psi_+^y(\Gamma^*(t)) + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial y_+} F(y_+^*(\Gamma^*(T))) + \\ &+ \zeta_6 \frac{\partial}{\partial y_+} \Phi(y_+^*(\Gamma^*(T))) + 2\zeta_7 (y_+(\Gamma^*(T)) - y_-(\Gamma^*(T))) = \\ &= - \int_{\Gamma^*(t)}^{\Gamma^*(T)} \frac{\partial}{\partial y_+} h(z^*(s), \psi(s), \omega^*(s)) ds = \\ &= -(I_1 + I_2 + I_3). \end{aligned}$$

В силу (1.61) и (1.65) имеем

$$I_1 = \int_{\Gamma^*(t)}^{\Gamma^*(T)} \frac{\partial}{\partial y_+} h^1 d\xi(s) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^T \frac{\partial}{\partial x} H^a(x^*(\vartheta), \phi^t(\vartheta), \phi_+^x(\vartheta) + \phi_-^x(\vartheta), u^*(\vartheta)) d\vartheta - \\
&- \lambda_4 \int_t^T \nabla \Phi(x^*(\vartheta)) d\rho^\Phi(\vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\Gamma^*(t)}^{\Gamma^*(T)} \chi_{[0, S^*] \setminus \Omega^*}(s) \left(\frac{\partial}{\partial y_+} h_-^0 d\eta_+^*(s) + \frac{\partial}{\partial y_+} h_+^0 d\eta_-^*(s) \right) = \\
&= \int_{\Gamma^*(t)}^{\Gamma^*(T)} \frac{\partial}{\partial y_+} \{ \langle \psi_+^y(s), g(\tau, y_+^*, v^*) \rangle - \zeta_3 Q_+(\xi^*, y_+^*) \} d\mu_c^*(\xi^*(s)) = \\
&= \int_t^T \frac{\partial}{\partial x} H_+^s(x^*(\vartheta), \phi_+^x(\vartheta), \phi_+^\mu(\vartheta), u^*(\vartheta); \lambda_3) d\mu_c^*(\vartheta),
\end{aligned}$$

где $\Omega^* = \bigcup_{\tau \in D_\Gamma^*} [\Gamma^*(\tau-), \Gamma^*(\tau)]$. Ввиду (1.27) и (1.28) интеграл I_3 можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{\tau \in D_\Gamma^* \cap [t, T]} \left(\int_{\Omega_{\tau, -}^*} \frac{\partial}{\partial y_+} h_-^0 ds + \int_{\Omega_{\tau, +}^*} \frac{\partial}{\partial y_-} h_+^0 ds \right) = \\
&= \sum_{\tau \in D_\Gamma^* \cap [t, T]} \int_{\Omega_{\tau, -}^*} \left(\frac{\partial}{\partial x} g(\tau, y_+^*(s), v^*(s)) \right)' \psi_+^y(s) - \\
&- \zeta_3 \sum_{\tau \in D_\Gamma^* \cap [t, T]} \int_{\Omega_{\tau, +}^*} \frac{\partial}{\partial x} Q_+(\tau, y_+^*(\Gamma^*(\tau))) ds.
\end{aligned}$$

Здесь множества $\Omega_{\tau, i}^*$, $i \in \{-, +\}$, определяются по Γ^* так же, как в (1.26). Отметим, что $\frac{\partial}{\partial x} Q_+(\tau, y_+^*(\Gamma^*(\tau))) = Q_+(\tau, x^*(\tau)) = 0$, поскольку $\tau \in D_\mu^*$. Введем обозначения

$$p_\tau^{t, \pm}(\theta) = \psi^\xi(s_{\tau, \pm}(\theta)), \quad p_\tau^{x, \pm}(\theta) = \psi_\pm^y(s_{\tau, \mp}(\theta)), \quad \theta \in [0, T_\tau^*], \quad (1.66)$$

где $s_{\tau, -}(\theta) = \theta + \Gamma^*(\tau-)$, $s_{\tau, +}(\theta) = s_{\tau, -}(\theta) + [\mu^*(\tau)]$. С учетом равенств

$$y_\pm^*(s_{\tau, \mp}(\theta)) = \varkappa_\tau^*(\theta), \quad \text{и} \quad v^*(s_{\tau, i}(\theta)) = u_\tau^*(\theta), \quad i \in \{-, +\}, \quad \theta \in [0, T_\tau^*], \quad (1.67)$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\tau, -}^*} \left(\frac{\partial}{\partial x} g(\tau, y_+^*(s), v^*(s)) \right)' \psi_+^y(s) ds = \\
&= \int_0^{T_\tau^*} \left(\frac{\partial}{\partial x} g(\tau, \varkappa^*(\theta), u_\tau^*(\theta)) \right)' p_\tau^{x, +}(\theta) d\theta = \\
&= \psi_+^y(\Gamma^*(\tau-) + [\mu^*(\tau)]) - p_\tau^{x, +}(0).
\end{aligned}$$

Но $\dot{\psi}_+^y = Q_+(\tau, y_+^*(\Gamma^*(\tau))) = 0$ на $\Omega_{\tau,+}^*$, следовательно,

$$\psi_+^y(\Gamma^*(\tau-) + [\mu^*(\tau)]) = \psi_+^y(\Gamma^*(\tau)) = \phi_+^x(\tau),$$

и мы получаем представление (1.39) для скачков функции $\phi_+^x(\cdot)$. Полученное интегральное представление для функции $\phi_+^x(\cdot)$ отвечает принятому понятию решения импульсной системы. Уравнения для остальных компонент сопряженной траектории $\phi(\cdot)$ выводятся аналогично.

с) и d). Из формул (1.61), (1.65) следуют равенства

$$\begin{aligned}\tilde{H}^a(t, x^*(t), \phi^t(t), \phi_+^x(t) + \phi_-^x(t), u^*(t); \lambda_4) &= h^1(z^*(s), \psi(s), \omega^*(s))|_{s=\Gamma^*(t)}, \\ \tilde{H}_-^s(t, x^*, \phi_+^x, \phi_+^\mu, u^*(t); \lambda_3, \lambda_5) &= h_-^0(z^*, \psi, \omega^*)|_{s=\Gamma^*(t)}, \\ \tilde{H}_+^s(t, x^*, \phi_-^x, \phi_-^\mu, u^*(t); \lambda_3, \lambda_5) &= h_+^0(z^*, \psi, \omega^*)|_{s=\Gamma^*(t)},\end{aligned}\tag{1.68}$$

В силу допустимости процесса σ^* и определения функций $\widehat{\Phi}, \widehat{\Psi}$ на $[0, T]$ справедливо $\widehat{\Phi}(x^*(t)) = 0$ всюду и $\widehat{\Psi}(x^*(t)) = 0$ $d\mu^*$ -п.в. Как следствие,

$$\begin{aligned}\tilde{H}^a(t, x^*, \phi^t, \phi_+^x + \phi_-^x, u^*; \lambda_4) &= H^a(t, x^*, \phi^t, \phi_+^x + \phi_-^x, u^*) \text{ } \mathcal{L}\text{-п.в.} \\ \tilde{H}_\pm^s(t, x^*, \phi_\mp^\mu, \phi_\mp^x, u^*; \lambda_3, \lambda_5) &= H_\pm^s(t, x^*, \phi_\mp^\mu, \phi_\mp^x, u^*; \lambda_3) \text{ } d\mu^*\text{-п.в.}\end{aligned}\tag{1.69}$$

на $[0, T]$, то же верно и для соответствующих гамильтонианов.

Ввиду оптимальности процесса ς^* , условия с) и d) вытекают из соотношения (1.56), формул (1.59) для экстремального управления $\omega^*(\cdot)$ и равенств (1.68). Действительно, пусть $t \in [0, T] \setminus \text{supp}\{d\mu_c^*\}$. По определению функции $\Gamma^*(\cdot)$ мы имеем $\dot{\Gamma}^*(t) = 1$ $\mathcal{L}$ -п.в. на $[0, T] \setminus \text{supp}\{d\mu_c^*\}$, и следовательно,

$$\alpha^*(\Gamma^*(t)) = \dot{\xi}^*(\Gamma^*(t)) = \frac{1}{\dot{\Gamma}^*(t)} = 1$$

на этом множестве. Но согласно (1.59), $\alpha^*(\Gamma^*(t)) = 1$ предполагает

$$\bar{h}^1|_{s=\Gamma^*(t)} \geq \bar{h}^0 = \max\{\bar{h}_+^0, \bar{h}_-^0\}|_{s=\Gamma^*(t)}.$$

Учет (1.56) и (1.68) дает нам

$$\tilde{\mathcal{H}}^a \geq \max\{\tilde{\mathcal{H}}_-^s, \tilde{\mathcal{H}}_+^s\},$$

$\mathcal{L}$ -п.в. вдоль $[0, T] \setminus \text{supp}\{d\mu_c^*\}$, где функции $\mathcal{H}^a$ и $\tilde{\mathcal{H}}_\pm^s$ вычисляются, соответственно, в точках $(t, x^*, \phi^t, \phi_+^x + \phi_-^x; \lambda_4)$ и $(t, x^*, \phi_\mp^x, \phi_\mp^\mu; \lambda_3, \lambda_5)$. Для того чтобы получить искомое условие (1.44), остается принять во внимание (1.69). Наконец, в силу (1.56) равенство

$$\mathbf{h}|_{s=\Gamma^*(t)} = h^1|_{s=\Gamma^*(t)} \text{ } \mathcal{L}\text{-п.в. } t \in [0, T] \setminus \text{supp}\{d\mu_c^*\}$$

эквивалентно соотношению (1.42).

Пусть теперь $t \in \text{supp}\{d\mu_c^*\}$. Рассмотрим меру $\mathcal{V}(\cdot)$, которая определена на борелевых подмножествах E отрезка $[0, T]$ с помощью соотношения

$$\mathcal{V}(E) = \frac{1}{2} \int_{\{s: \xi^*(s) \in E\}} \chi_{\{[0, \Gamma^*(T)] \setminus \Omega\}}(s) (1 - \alpha^*(s)) (\bar{h}^1 - \bar{h}^0) ds.$$

Здесь $\Omega = \bigcup_{\tau \in D_\mu^*} \Omega_\tau$, $\Omega_\tau = [\Gamma^*(\tau-), \Gamma^*(\tau)]$. Как нетрудно видеть, $\mathcal{V}(E) \leq 0$

на любом $E \in \mathcal{B}_{[0, T]}$. В самом деле, подынтегральная функция обращается в нуль при $\alpha^* \in (0, 1]$, что очевидно, если $\alpha^*(s) = 1$. Если же $\alpha^* \in (0, 1)$, то, согласно (1.59), $\bar{h}^1 = \bar{h}^0$. Здесь мы можем воспользоваться (1.59), поскольку $\omega^* = \bar{\omega}(z^*, \psi)$ по теореме 1.3.1. Таким образом, величина $\mathcal{V}(E)$ может быть отличной от нуля, только если найдется подмножество $A \subset \{s : \xi^*(s) \in E\} \setminus \Omega^*$, имеющее положительную меру Лебега и такое, что $\alpha^*(s) = 0$ на A . Но в силу все той же формулы (1.59), $\alpha^*(s) = 0$ влечет $\bar{h}^1 \leq \bar{h}^0$. Следовательно, подынтегральная функция неположительна, и $\mathcal{V}(E) \leq 0$. В силу (1.18) и (1.65) непрерывная компонента $d\mu_c^*$ меры $d\mu^*$ может быть определена функцией

$$\mu_c^*(t) = \int_0^{\Gamma^*(t)} \chi_{\{[0, \Gamma^*(T)] \setminus \Omega^*\}}(s) (1 - \alpha^*(s)) \beta_+^*(s) ds.$$

Применяя стандартный прием замены переменной под знаком интеграла Лебега–Стилтьеса, получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathcal{V}(E) = \frac{1}{2} \int_0^{\Gamma^*(T)} \chi_{\{s: \xi^*(s) \in E \cap ([0, T] \setminus D_\mu^*)\}}(s) (1 - \alpha^*(s)) (\bar{h}^1 - \bar{h}^0) ds = \\ &= \int_0^{\Gamma^*(T)} \chi_{\{s: \xi^*(s) \in E\}}(s) (\bar{h}^1 - \bar{h}^0) d\mu_c^*(\xi^*(s)) = \\ &= \int_0^{\Gamma^*(T)} \chi_E(\xi^*(s)) \tilde{\mathcal{H}}|_{t=\xi^*(s)} d\mu_c^*(\xi^*(s)) = \int_E \tilde{\mathcal{H}} d\mu_c^*(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &:= \mathcal{H}^a(t, x^*, \phi_+^x + \phi_-^x, \phi^t) - \\ &- \max\{\mathcal{H}_-^s(t, x^*, \phi_+^x, \phi_+^\mu; \lambda_3), \mathcal{H}_+^s(t, x, \phi_-^x, \phi_-^\mu; \lambda_3)\}. \end{aligned}$$

Поскольку мера $d\mu^*$ неотрицательна, а E пробегает все борелевские подмножества отрезка $[0, T]$, то из последнего неравенства следует

$$\tilde{\mathcal{H}} \leq 0 \quad d\mu_c^*\text{-п.в. на } [0, T],$$

что эквивалентно условию (1.45). Отсюда же вытекает равенство (1.43).

е) Пусть теперь $t = \tau \in D_\mu^*$. Рассмотрим разбиение $\Omega_\tau^* = \Omega_{\tau,-}^* + \Omega_{\tau,+}^*$ интервала Ω_τ^* :

$$\Omega_{\tau,-}^* = \Gamma^*(\tau-) + [0, T_\tau^*), \quad \Omega_{\tau,+}^* = \Gamma^*(\tau-) + [T_\tau^*, [\Gamma^*(\tau)]] .$$

Напомним, что $\alpha^*(s) = 0$ и $\xi^*(s) = \tau$ $\mathcal{L}$ -п.в. вдоль Ω^* . В силу соотношений (1.28) прямого перехода на подынтервале $\Omega_{\tau,-}^*$ имеем $\beta_+^* = 1$, $\beta_-^* = 0$. Следовательно, на этом множестве

$$h^0 = h_-^0,$$

$$\begin{aligned} y_-^*(s) &= y_-^*(\Gamma^*(\tau-)) = x^*(\tau-), \quad \eta_-^*(s) = \eta_-^*(\Gamma^*(\tau-)) = \mu^*(\tau-), \\ \dot{y}_+^* &= g(\tau, y_+^*, v^*), \quad y_+(\Gamma^*(\tau-)) = x^*(\tau-), \\ \dot{\eta}_+ &= 1, \quad \eta_+(\Gamma^*(\tau-)) = \mu^*(\tau-). \end{aligned}$$

Поскольку с очевидностью

$$\eta_+^*(s) = \mu^*(\tau-) + s - \Gamma^*(\tau-) > \mu^*(\tau-) = \eta_-^*(s), \quad \text{при } s > \Gamma^*(\tau-),$$

то в силу условия дополняющей нежесткости (1.51) мера da — множитель Лагранжа из теоремы 1.3.1 — может быть локализована на $\Omega_{\tau,-}^*$ только в точке $s = \Gamma(\tau-)$. Для удобства приведем вид сопряженной системы на $\Omega_{\tau,-}^*$. На этом интервале функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^\xi &= \frac{\partial}{\partial \xi} h = -\frac{\partial}{\partial \xi} h_-^0 = -\langle \psi_+^y, \frac{\partial}{\partial t} g(\tau, y_+^*, v^*) \rangle + \\ &+ \zeta_3 \frac{\partial}{\partial t} Q_-(\tau, y_-^*(\Gamma^*(\tau-))) = -\langle \psi_+^y, \frac{\partial}{\partial t} g(\tau, y_+^*, v^*) \rangle, \\ \dot{\psi}_+^y &= -\frac{\partial}{\partial y_+} h_-^0 = -\left(\frac{\partial}{\partial x} g(\tau, y_+^*, v^*) \right)' \psi_+^y, \\ \dot{\psi}_-^y &= -\frac{\partial}{\partial y_-} h_-^0 = \zeta_3 \frac{\partial}{\partial x} Q_-(\tau, y_-^*(\Gamma^*(\tau-))) = 0, \\ d\psi_+^\eta &= -\frac{\partial}{\partial \eta_+} h_-^0 - da = -[a(\Gamma^*(\tau-))]\delta(s - \Gamma^*(\tau-))dt, \\ d\psi_-^\eta &= da = [a(\Gamma^*(\tau-))]\delta(s - \Gamma^*(\tau-))dt, \end{aligned}$$

с начальными условиями $\psi(\Gamma^*(\tau-) + [\mu^*(\tau)])$. Аналогично, на интервале $\Omega_{\tau,+}^*$ справедливо $\beta_+^* = 0$, $\beta_-^* = 1$, и

$$h^0 = h_+^0,$$

$$\begin{aligned}
y_+^*(s) &= y_+^*(\Gamma^*(\tau)) = y_+^*(\tau), \quad \eta_+^*(s) = \eta_+^*(\Gamma^*(\tau)) = \mu^*(\tau), \\
\dot{y}_-^* &= g(\tau, y_-^*, v^*), \quad y_-^*(\Gamma^*(\tau-) + T_\tau^*) = x^*(\tau-), \\
\dot{\eta}_-^* &= 1, \quad \eta_-^*(\Gamma^*(\tau-) + T_\tau^*) = \mu^*(\tau-), \\
\eta_+^*(s) &= \mu^*(\tau) > \mu^*(\tau-) + s - T_\tau^* - \Gamma^*(\tau-) = \eta_-^*(s), \quad s \in \Omega_{\tau,+}^*.
\end{aligned}$$

Но в силу последнего неравенства и условия (1.51) на $\Omega_{\tau,+}^*$ мера da может быть локализована лишь в точке $s = \Gamma^*(\tau)$. Тогда интересующие нас компоненты сопряженной траектории $\psi(\cdot)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^\xi &= -\frac{\partial}{\partial \xi} h = -\frac{\partial}{\partial \xi} h_+^0 = -\langle \psi_-^y, \frac{\partial}{\partial t} g(\tau, y_-^*, v^*) \rangle + \\
&+ \zeta_3 \frac{\partial}{\partial t} Q_+(\tau, y_+^*(\Gamma^*(\tau))), \\
\dot{\psi}_+^y &= -\frac{\partial}{\partial y_+} h^0 = \zeta_3 \frac{\partial}{\partial x} Q_+(\tau, x^*(\tau)) = 0, \\
\dot{\psi}_-^y &= -\frac{\partial}{\partial y_-} h_+^0 = -\frac{\partial}{\partial x} g(\tau, y_-^*, v^*) \psi_-^y + \zeta_5 a^\Psi \Psi(y_-^*), \\
d\psi_+^\eta &= -\frac{\partial}{\partial \eta_+} h_+^0 dt - da = -[a(\Gamma^*(\tau))] \delta(s - \Gamma^*(\tau)) dt, \\
d\psi_-^\eta &= da = [a(\Gamma^*(\tau))] \delta(s - \Gamma^*(\tau)) dt,
\end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\psi^\xi(\Gamma^*(\tau)) = \phi^t(\tau), \quad \psi_i^y(\Gamma^*(\tau)) = \phi_i^x(\tau), \quad \psi_i^\eta(\Gamma^*(\tau)) = \phi_i^\mu(\tau), \quad i \in \{+, -\}.$$

Замена $s = s_{\tau,i}(\theta)$ в соответствующих уравнениях и учет (1.66) позволяют установить вид сопряженной предельной системы (1.40), (1.41).

Поскольку $\alpha^* = \bar{\alpha}(z^*, \psi) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в. на Ω_τ^* , то из (1.59) следует, что

$$\bar{h}^1 \leq \bar{h}^0 = \bar{h}_-^0, \quad s \in \Omega_{\tau,-}, \quad \text{и} \quad \bar{h}^1 \leq \bar{h}^0 = \bar{h}_+^0, \quad s \in \Omega_{\tau,+}^*. \quad (1.70)$$

Замена переменной $s = s_{\tau,-}(\theta)$ в первом соотношении (1.70) дает равенство “—” из (1.46) и неравенство (1.47). Условие с индексом “+” в (1.46) и неравенство (1.48) вытекают из второго соотношения (1.70) в силу преобразования $s = s_{\tau,+}(\theta)$. $\square$

1.3.3 Обсуждение

Условия оптимальности 1.3.1 трудны для непосредственного применения. Подобная “трудоемкость” — естественная плата за общность: мы допускаем счетное множество точек приложения чистых импульсов и наличие

сингулярной непрерывной компоненты меры, а также рассматриваем фазовые и смешанные ограничения общего вида. В диссертационной работе данный результат позиционируется, главным образом, как иллюстрация предлагаемого здесь метода преобразования.

Отметим, что в редуцированной задаче любая допустимая траектория обладает свойством $\eta_-(0) = \eta_+(0)$, $\eta_-(S) = \eta_+(S)$ и, значит, т.е. выходит в конечных точках на границу области, определяемой фазовым ограничением $\eta_- - \eta_+ \leq 0$. Однако, выполняются условия управляемости в конечных точках относительно фазового ограничения. Если условие $\Phi(S, y(S)) \leq 0$ таково, что конечной блок задачи остается регулярным, то справедливо [2, 3] усиленное условие нетривиальности: $\zeta_0 + \mathcal{L}(A^\psi) > 0$, где $A^\psi := \{s \in [0, S^*] : \psi(s) \neq 0\}$. Другими словами, либо экстремаль является нормальной, либо условие максимума (1.56) становится “информативным” на некотором подмножестве отрезка $[0, S]$ положительной лебеговой меры. Таким образом, необходимые условия оптимальности в редуцированной (а следовательно, и в исходной задаче) не утрачивают своей информативности.

Отметим также, что теорема 1.3.1 дает принцип максимума для задач, где реакция на импульсное управления не единственна и является одним из объектов оптимизации. При управлении гибридными системами (0.6)–(0.8), в которых возможные переключения полностью определяются состоянием системы до скачка, возникновение аномальных экстремалей (в смысле теоремы 1.3.1), по-видимому, должно быть естественным. Это иллюстрирует следующий простой пример.

Пример 1.3.1 Рассмотрим задачу

$$x(T) \rightarrow \min, \quad dx = udt - d\mu, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, T], \quad x(0-) = 2, \quad (1.71)$$

$$x(t-) = 3, \quad x(t) = 0 \text{ } d\mu\text{-п.в.}, \quad d\mu \geq 0. \quad (1.72)$$

При $T < 1$ множество достижимости системы (1.71), (1.72) представляет собой отрезок $2 + [-T, T]$, а в случае $T \geq 1$ совпадает с $[1 - T, 2 + T]$. Очевидно, что при $T < 1$ оптимальное ограниченное управление имеет вид $u^*(t) \equiv -1$, импульсы отсутствуют, поскольку условие $x = 3$ не реализуется. Если $T > 1$, то $u^*(t) = 1$, $t \in [0, 1)$, $u^*(t) = -1$, $t \in [1, T]$, и оптимальное импульсное управление имеет вид $d\mu^* = 3\delta(t - 1)dt$.

Зафиксируем $T = 1$ и применим теорему 1.3.1. Поскольку $x(t) \in [0, 3]$ на $[0, 1]$, можно положить $Q_+(x) = x$ и $Q_-(x) = 3 - x$ (производные

функций $Q_{\pm}$ нигде не обращаются в нуль, мы учтем это в сопряженной предельной системе). Гамильтонианы имеют следующий вид

$$\mathcal{H}^a(\phi) = |\phi^x| + \phi^t, \quad \mathcal{H}^s(\phi) = \phi^\mu - \phi^x,$$

$$\mathcal{H}_+^s(\phi, x; c) = \phi^\mu - \phi^x - \lambda_3 x, \quad \mathcal{H}_-^s(\phi, x; c) = \phi^\mu - \phi^x - \lambda_3(3 - x).$$

Решение сопряженной системы легко находится:

$$\phi^t(t) = -\lambda_1, \quad \phi_+^x(t) = \lambda_3(\mu(t) - \mu(1)) - \lambda_0, \quad \phi_-^x(t) = \lambda_3(\mu(1) - \mu(t)),$$

$$\phi_+^\mu(t) = \lambda_3(t - 1) + b(1) - b(t), \quad \phi_-^\mu(t) = -\phi_+^\mu(t).$$

Тогда условие максимума с) превращается в следующее включение:

$$u^*(t) \in \text{Sign}\{\phi_+^x(t) + \phi_-^x(t)\} = -\text{Sign}\{\lambda_0\}.$$

Экстремаль, отвечающая управлению $u^*(t) \equiv 1$, *анормальна* ($\lambda_0 = 0$). Это объясняется тем, что скачкообразное изменение состояния вполне детерминировано (т.к. единственно возможный результат применения импульса определяется условиями $x(t-) = 3$, $x(t) = 0$).

Рассмотрим теперь эту задачу в предположении, что смешанное ограничение в (1.72) накладывается только на левые пределы траектории:

$$x(t-) = 3 \text{ } d\mu\text{-п.в. на } [0, 1],$$

и требуя дополнительно, чтобы $\mu(1) \leq 3$. В такой задаче процесс, отвечающий управлению $u^* \equiv 1$, $d\mu^* = 3\delta(t - 1)$, есть уже *нормальная* экстремаль, удовлетворяющая условиям теоремы 1.3.1 со следующим набором множителей Лагранжа:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 - \text{любое } \geq 0, \quad \lambda_3 = 4/3, \quad b = 0.$$

Действительно, в этом случае $\mathcal{H}^a$, $\mathcal{H}_-^s$, $\phi^t(\cdot)$, $\phi_-^x(\cdot)$ и $\phi_\pm^\mu(\cdot)$ имеют тот же вид, что и выше, $\phi_+^x(t) = -\lambda_0$, и $\mathcal{H}_+^s(\phi, x) = \phi^\mu - \phi^x$. Условия с)–е) превращаются в соотношения:

$$u^* \in \text{Sign}\{\lambda_3(\mu^*(1) - \mu^*) - \lambda_0\} = \text{Sign}\{3\lambda_3 - \lambda_0\} = 1,$$

$$\begin{aligned} |\phi_+^x + \phi_-^x| + \phi^t &= |\lambda_3(\mu^*(1) - \mu^*) - \lambda_0| - \lambda_1 = 1 \geq 4/3t - 1/3 = \\ &= \max\{\lambda_0 + \lambda_3(t - 1) + b(1) - b, \lambda_3(\mu^* - \mu^*(1)) + b - b(1)\} = \\ &= \max\{\phi_+^\mu - \phi_+^x, \phi_-^\mu - \phi_-^x - \lambda_3(3 - x^*)\}, \quad t \in [0, 1]; \end{aligned}$$

траектории предельной и сопряженной предельной систем имеют вид: $\kappa(\theta) = 3 - \theta$, $p_+^x(\theta) = \phi_+^x(1) = -\lambda_0$, $\dot{p}_-^x = \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x} Q_-(x^*(\tau-)) = -4/3$, $p_-^x(3) = \phi_-^x(1) = 0$ (уравнение для $p_-^x(\cdot)$ выглядит так, потому что $\frac{\partial}{\partial x} Q_-(x^*(\tau-)) = -1 \neq 0$). Отсюда $p_-^x(\theta) = 4/3(3 - \theta)$. Наконец,

$$\begin{aligned} |\phi_+^x(1) + 4/3(3 - \theta)| + \phi^t(1) &= |3 - 4/3\theta| - \lambda_1 \leq 1 < 8/3 \leq \\ &\leq -\lambda_0 + \lambda_3(\theta + (3 - \theta)^2), \\ |\phi_+^x(1) + \phi_-^x(1)| + \phi^t(1) &= \lambda_0 - \lambda_1 = -1 \leq \\ &\leq -\lambda_0 + \lambda_3(3 - \theta + (3 - \theta)^2), \quad \theta \in [0, 3]. \end{aligned}$$

Как легко видеть, условия максимума выполняются наряду с требованиями оптимальности носителя меры.

Как отмечено в [74], метод замены времени позволяет деликатно обойти проблему варьирования в пространстве функций ограниченной вариации, что позволяет без особых трудностей работать с фазовыми ограничениями. Отметим также, что как сильные (игольчатые), так и слабые вариации управлений $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ в редуцированной задаче (непосредственно участвующих в определении импульсного управления) порождают, фактически, один и тот же тип вариации управляющей меры. Это связано с тем, что редуцированная задача билинейна по (α, β) . Особенно наглядно это свойство проявляется в численных методах. Как будет показано в следующей главе, методы улучшения, основанные на процедурах слабого и игольчатого варьирования, порождают в исходной задаче итеративные процессы с одинаковыми свойствами.

Глава 2

Вычислительные методы оптимального импульсного управления

Глава посвящена построению вычислительных методов поиска оптимального импульсного управления.

Будем рассматривать *задачу улучшения управления*. Пусть σ^0 — (*опорный*) допустимый процесс задачи (P) . Требуется найти допустимый процесс σ такой, что

$$I(\sigma) < I(\sigma^0).$$

Решая эту задачу итеративно, мы генерируем последовательность допустимых управляемых процессов, для которой соответствующая последовательность значений целевого функционала убывает.

Опишем простейший подход к разработке вычислительных методов для задачи (P) :

- преобразование опорного импульсного процесса к процессу стандартной задачи оптимального управления с помощью методов редукции,
- применение подходящей базовой процедуры для улучшения опорного управления в преобразованной задаче,
- восстановление нового импульсного процесса с помощью обратного преобразования времени.

2.1 Улучшение дискретно-непрерывных процессов

Начнем с простейшего класса гибридных моделей (M_3) из Введения. Речь пойдет о системах с дискретными мерами (с “чисто импульсными” управ-

лениями) и явным описанием скачков. Такие модели называют *системами с толчками* [97], или *дискретно-непрерывными* системами [74].

2.1.1 Задача оптимального управления ДНС

Рассмотрим частный вариант задачи (P) :

$$I = F(x(T)) \rightarrow \inf, \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0-) = x_0, \quad (2.2)$$

$$[x(\tau_i)] = g(\tau_i, x(\tau_i-), \nu_i), \quad (2.3)$$

$$u \in U, \quad \sum \|\nu_i\| \leq M. \quad (2.4)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $x(\cdot) \in BV([0, T]; \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot)$ — борелевские функции со значениями в выпуклом компактном множестве $U \subset \mathbb{R}^r$. Моменты τ_i приложения импульса не фиксированы и вместе с векторами $\nu_i \in \mathbb{R}^m$ подлежат определению в результате оптимизации критерия качества (2.1). Будем предполагать, что точки τ_i удовлетворяют условию

$$0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots \leq T, \quad (2.5)$$

т.е. моменты скачка отделены друг от друга интервалами. Функция $\|\cdot\|$ — некоторая конечномерная норма.

Последовательность $\mathfrak{J} = \{(\tau_i, \nu_i)_{i=\overline{1,k}}\}$ полностью определяет импульсное управление. Через $\sigma = (x(\cdot), u(\cdot), \mathfrak{J})$ обозначим допустимый процесс системы (2.2)–(2.4), где управления $u(\cdot)$ удовлетворяют ограничениям (2.4), и $x(\cdot)$ — системе (2.2), (2.3).

Здесь действуют предположения (H_1) – (H_3) , и дополнительно считается, что

(H_{11}) функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема,

(H_{12}) для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [0, T]$ справедливо

$$g(t, x, 0) = 0,$$

(H_{13}) для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\nu', \nu'' \in \mathbb{R}^m$ и $t \in [0, T]$ функция $g(t, x, \nu)$ удовлетворяет полугрупповому соотношению

$$g(t, x, \nu' + \nu'') = g(t, x, \nu') + g(t, x + g(t, x, \nu'), \nu''),$$

(H_{14}) производные $\frac{\partial}{\partial x}g(t, x, \nu)$, $\frac{\partial}{\partial t}g(t, x, \nu)$ и $\frac{\partial}{\partial \nu}g(t, x, \nu)$ существуют при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{R}^m$ и $t \in [0, T]$, и удовлетворяют локальному условию Липшица по (x, ν) , т.е. для любого ограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ существует константа $L(C) > 0$ такая, что для любых $(x', \nu'), (x'', \nu'') \in C$ имеют место оценки

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}g(t, x', \nu') - \frac{\partial}{\partial x}g(t, x'', \nu'') \right\| \leq L(C)(\|x' - x''\| + \|\nu' - \nu''\|),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}g(t, x', \nu') - \frac{\partial}{\partial t}g(t, x'', \nu'') \right\| \leq L(C)(\|x' - x''\| + \|\nu' - \nu''\|),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu}g(t, x', \nu') - \frac{\partial}{\partial \nu}g(t, x'', \nu'') \right\| \leq L(C)(\|x' - x''\| + \|\nu' - \nu''\|),$$

(H_{15}) функция $G(t, x) = \frac{\partial}{\partial \nu}g(t, x, \nu)|_{\nu=0}$ дважды непрерывно дифференцируема по (t, x) ;

Условия (H_{13})–(H_{15}) являются достаточными для *робастности* ДНС (2.2)–(2.4) (см. [74]). Основным следствием отказа от робастности является возможно неоднозначная реакция системы на импульсное воздействие. Отметим, что из условий робастности, сформулированных в терминах функции g , следует выполнение условий Фробениуса для матрицы G .

Утверждение 2.1.1 ([74]) *Для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции $e(\cdot)$ система*

$$z(a) = x, \quad \dot{z}(s) = G(t, z(s)) e(s), \quad s \in [a, b], \quad (2.6)$$

имеет единственное решение и

$$z(s) = x + g \left(t, x, \int_a^b e(s) ds \right).$$

Это утверждение вытекает из полугруппового свойства решения системы (2.6), обусловленного (H_{13}), (H_{15}).

Множество достижимости системы (2.2)–(2.4), вообще говоря, не компактно, поэтому минимум функционала (2.1) может не достигаться в классе чисто импульсных управлений, и требуется расширение множества допустимых управляемых процессов. Такое расширение состоит в переходе к слабым-* пределам траекторий системы (2.2)–(2.4), что приводит к понятию *обобщенного решения*.

Обобщенные решения ДНС

Определение 2.1.1 ([74]) *Непрерывная справа функция ограниченной вариации $\mathbf{x}(t)$ называется обобщенным решением дискретно-непрерывной системы (2.2)–(2.4), если существует последовательность $\{\mathcal{I}^k\}$ допустимых импульсных управлений такая, что последовательность $\{x^k(\cdot)\}$ соответствующих решений системы (2.2)–(2.4) сходится к $\mathbf{x}(\cdot)$ в слабой-* топологии пространства функций ограниченной вариации.*

Следующий результат дает представление обобщенного решения с помощью дифференциального уравнения с мерами.

Утверждение 2.1.2 ([74]) *Для любого обобщенного решения $\mathbf{x}(\cdot)$ системы (2.2)–(2.4) существует векторная мера $d\nu$ такая, что $\mathbf{x}(\cdot)$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & x^0 + \int_0^t f(t, \mathbf{x}(t), u(t))dt + \int_0^t G(t, \mathbf{x}(t))d\nu_c(t) + \\ & + \sum_{\tau \leq t} g(\tau, \mathbf{x}(\tau-), [\nu(\tau)]). \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.1.2 Вспомогательные результаты

Преобразование задачи

Опишем последовательность преобразований задачи (2.1)–(2.4) к задаче с ограниченными управлениями. Мы применим подход [74]. На нефиксированном отрезке времени $[0, S]$, $S \leq T + M$, рассмотрим задачу

$$J = F(y(S)) \rightarrow \inf \quad \text{при условиях} \quad (2.8)$$

$$\dot{\xi} = \alpha, \quad \dot{y} = \alpha f(\xi, y, v) + (1 - \alpha)G(\xi, y)e, \quad (2.9)$$

$$y(0) = x_0, \quad \xi(0) = 0, \quad \xi(S) = T, \quad (2.10)$$

$$v(s) \in U, \quad \alpha(s) \in \{0, 1\}, \quad e(s) \in \{e \in \mathbb{R}^m : \|e\| = 1 \vee e = 0\}. \quad (2.11)$$

Здесь $G(t, x) = \frac{\partial}{\partial \nu} g(t, x, \nu)|_{\nu=0}$. Через $\varsigma = (z(\cdot), \omega(\cdot); S)$, $z = (\xi, y)$, $\omega = (v, e, \alpha)$, обозначим допустимый процесс задачи (2.8)–(2.11). Отметим, что множество скоростей системы (2.9)–(2.11) не выпукло.

Положим $\Gamma(t) = t + \sum_{\tau_i \leq t} \|\nu_i\|$. Процессы σ и ς связаны соотношениями:

$$S = T + \sum \|\nu_i\|, \quad (2.12)$$

$$y(s) = x(\xi(s)), \quad v(s) = u(\xi(s)), \quad \alpha(s) = 1 \quad \text{при } s \in S \setminus \Omega, \quad (2.13)$$

$$\alpha(s) = 0, \quad e(s) = \nu_i \|\nu_i\|^\oplus \quad \text{при } s \in \Omega, \quad (2.14)$$

$$\Omega = \cup[\theta_i, \theta_i + \|\nu_i\|), \quad \theta_i = \tau_i + \sum_{k < i} \|\nu_k\|, \quad \text{и} \quad (2.15)$$

$$x(t) = y(\Gamma(t)), \quad u(t) = v(\Gamma(t)), \quad \tau_i = \xi(\theta_i). \quad (2.16)$$

Здесь $\oplus$ — символ псевдообращения: $a^\oplus = a^{-1}$, если $a \neq 0$, и $a^\oplus = 0$, если $a = 0$. Очевидно, между управляемыми процессами задач (2.1)–(2.4) и (2.8)–(2.11) имеется взаимно однозначное соответствие.

Как и в [74] (см. также Введение), продолжим управления и траектории на максимальный отрезок времени $[0, \tilde{S}]$, $\tilde{S} = T + M$, полагая $\alpha(s) = 0$, $e(s) = 0$ при $s \in (S, \tilde{S}]$. Управление $v(\cdot)$ может быть продолжено произвольным образом. При этом траектории сохраняют на $[S, \tilde{S}]$ постоянные значения.

Теперь рассмотрим следующую задачу на фиксированном интервале времени:

$$\tilde{J} = F(y(\tilde{S})) \rightarrow \inf, \quad (2.17)$$

$$\dot{\xi} = \alpha, \quad \dot{y} = \alpha f(\xi, y, v) + (1 - \alpha)G(\xi, y)e, \quad (2.18)$$

$$y(0) = x_0, \quad \xi(0) = 0, \quad \xi(\tilde{S}) = T, \quad (2.19)$$

$$v(s) \in U, \quad \alpha(s) \in [0, 1], \quad e(s) \in \{e \in \mathbb{R}^m : \|e\| \leq 1\}, \quad (2.20)$$

которую будем называть редуцированной. Здесь для траекторий $z = (\xi, y)$, и управлений $\omega = (v, e, \alpha)$ сохраним прежние обозначения, через ϱ обозначим допустимый процесс $(z(\cdot), \omega(\cdot))$.

Утверждение 2.1.3 ([74]) Пусть $\mathbf{x}(\cdot)$ — обобщенное решение ДНС (2.2)–(2.4). Тогда существуют управления $\alpha(\cdot)$, $e(\cdot)$, определенные на некотором отрезке времени $[0, S]$, где $S \geq T$, удовлетворяющие условиям (2.20) и такие, что соответствующее решение $z(\cdot) = (\xi(\cdot), y(\cdot))$ системы (2.18)–(2.20) связано с $\mathbf{x}(\cdot)$ соотношениями:

$$\mathbf{x}(t) = y(\Gamma(t)), \quad t \in [0, T], \quad \text{где } \Gamma(t) = \inf\{s : \xi(s) > t\}.$$

Отметим, что траекторию системы (2.18)–(2.20) можно сколь угодно точно равномерно приблизить траекториями (продолженной) системы (2.9)–(2.11). Такое приближение будет построено конструктивно в следующем пункте.

Аппроксимация траектории ослабленной системы

Рассмотрим систему (2.18)–(2.20). Для упрощения выкладок допустим, что f не зависит от u , и $x^0 = 0$. Дополнительно предположим, что функции f и G глобально липшицевы по ξ , y , т.е.

$$\begin{aligned}\|f(\xi, y) - f(\eta, z)\| &\leq L (\|\xi - \eta\| + \|y - z\|), \\ \|G(\xi, y) - G(\eta, z)\| &\leq K (\|\xi - \eta\| + \|y - z\|),\end{aligned}$$

где векторная и матричная нормы согласованы, L и K — положительные константы.

Пусть заданы допустимые управления $\alpha(\cdot)$ и $e(\cdot)$. Подставляя их в систему (2.18)–(2.20), получим задачу Коши

$$\dot{y} = \alpha(s)f(\xi, y) + (1 - \alpha(s))G(\xi, y)e(s), \quad \dot{\xi} = \alpha(s), \quad (2.21)$$

$$y(0) = 0, \quad \xi(0) = 0. \quad (2.22)$$

Допустимость управления $\alpha(\cdot)$ означает, в частности, что решение $\xi(\cdot)$ удовлетворяет условию $\xi(T + M) = T$.

Определим функции $\alpha_N(\cdot)$ и $e_N(\cdot)$ со значениями, соответственно, в двухточечном множестве $\{0, 1\}$ и в $\{e \in \mathbb{R}^m : \|e\| = 1 \vee e = 0\}$.

1) Разделим интервал $[0, T + M]$ на N подынтервалов

$$\mathcal{I}_i = [i, i + 1](T + M)/N, \quad i = \overline{0, N-1},$$

и вычислим средние значения

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i)} \int_{\mathcal{I}_i} \alpha(s) ds = \frac{N}{T + M} \int_{\mathcal{I}_i} \alpha(s) ds$$

функции $\alpha(\cdot)$ на $\mathcal{I}_i$. Здесь $\mathcal{L}(A)$ означает меру Лебега множества A . Рассмотрим разбиение $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}_i^0 \cup \mathcal{I}_i^1$, где

$$\mathcal{I}_i^0 = [i, i + \bar{\alpha}_i](T + M)/N, \quad \mathcal{I}_i^1 = [i + \bar{\alpha}_i, i + 1](T + M)/N.$$

Определим на $[0, T + M]$ функцию

$$\alpha_N(s) = \begin{cases} 1, & s \in \mathcal{I}_i^0, \\ 0, & s \in \mathcal{I}_i^1. \end{cases}$$

По построению среднее значение функции $\alpha_N(\cdot)$ на каждом частичном интервале $\mathcal{I}_i$ совпадает с $\bar{\alpha}_i$:

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i)} \int_{\mathcal{I}_i} \alpha_N(s) ds = \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i)} \int_{\mathcal{I}_i^0} ds = \frac{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i^0)}{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i)} = \bar{\alpha}_i.$$

2) Подсчитаем векторы средних значений

$$\bar{e}_i = \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i^1)} \int_{\mathcal{I}_i^1} e(s) ds$$

функции $e(\cdot)$ на интервалах

$$\mathcal{I}_i^1 = [i + \bar{\alpha}^i, i + 1](T + M)/N.$$

Пусть $\mathcal{I}_i^1 = \mathcal{J}_i^0 \cup \mathcal{J}_i^1$, $i = \overline{0, N-1}$, где

$$\mathcal{J}_i^0 = (i + \bar{\alpha}_i)(T + M)/N + [0, (1 - \bar{\alpha}_i)\|\bar{e}_i\|(T + M)/N].$$

Определим на $[0, T + M]$ функцию

$$e_N(s) = \begin{cases} \bar{e}_i \|\bar{e}_i\|^\oplus, & s \in \bigcup_{i=1}^N \mathcal{J}_i^0, \\ 0, & s \in \bigcup_{i=1}^N \mathcal{I}_i^0 \cup \bigcup_{i=1}^N \mathcal{J}_i^1. \end{cases}$$

По построению функции $e_N(\cdot)$ ее среднее значение на $\mathcal{I}_i^1$ совпадает с $\bar{e}^i$:

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i^1)} \int_{\mathcal{I}_i^1} e_N(s) ds = \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i^1)} \int_{\mathcal{J}_i^0} \bar{e}_i \|\bar{e}_i\|^\oplus ds = \frac{\mathcal{L}(\mathcal{J}_i^0)}{\mathcal{L}(\mathcal{I}_i^1)} \bar{e}_i \|\bar{e}_i\|^\oplus = \bar{e}_i.$$

Задача Коши

$$\dot{y} = \alpha_N(s)f(\xi, y) + (1 - \alpha_N(s))G(\xi, y)e_N(s), \quad y(0) = 0, \quad (2.23)$$

$$\dot{\xi} = \alpha_N(s), \quad \xi(0) = 0. \quad (2.24)$$

имеет на $[0, T + M]$ единственное решение $(\xi_N(\cdot), y_N(\cdot))$. Отметим, что для каждого номера N равенство $\xi_N(T + M) = T$ выполняется тривиально. Действительно,

$$T = \xi(T + M) = \int_0^{T+M} \alpha(s) ds = \int_0^{T+M} \alpha_N(s) ds = \xi_N(T + M).$$

Теорема 2.1.1 *Всякую траекторию $z(\cdot) = (\xi(\cdot), y(\cdot))$ системы (2.18)–(2.20) можно приблизить в равномерной метрике траекторией $z_N(\cdot) = (\xi_N(\cdot), y_N(\cdot))$ продолженной системы (2.23), (2.24).*

Доказательство. Сначала покажем предкомпактность семейств $\{\xi_N(\cdot)\}$, $\{y_N(\cdot)\}$ в пространстве $C([0, T + M])$. Это будет означать, что последовательность $\{z_N(\cdot)\}$ содержит равномерно сходящуюся на $[0, T + M]$ подпоследовательность. Потом установим, что все предельные точки совпадают с функцией $z(\cdot)$.

1) По построению функций $\xi_N(\cdot)$ при всех N на $[0, T + M]$ выполняется

$$0 \leq \xi_N(s) \leq T, \quad (2.25)$$

т.е. семейство $\{\xi_N(\cdot)\}$ равномерно ограничено.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. При любом N имеем оценку

$$|\xi_N(s'') - \xi_N(s')| = \left| \int_{s''}^{s'} \alpha_N(s) ds \right| \leq |s'' - s'|.$$

Положим $\delta = \varepsilon$. Тогда из условия $|s'' - s'| < \delta$ следует неравенство $|\xi_N(s'') - \xi_N(s')| \leq |s'' - s'| < \delta = \varepsilon$. Получено в точности определение равномерной непрерывности семейства $\{\xi_N(\cdot)\}$.

Для любого N справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|y_N(s)\| &= \left\| \int_0^s (\alpha_N f(z_N) + (1 - \alpha_N) G(z_N) e_N) d\vartheta \right\| \leq \\ &\leq \int_0^s (\alpha_N \|f(z_N)\| + (1 - \alpha_N) \|G(z_N)\| \|e_N\|) d\vartheta \leq \\ &\leq \int_0^s \{\alpha_N L + (1 - \alpha_N) \|e_N\| K(|\xi_N| + \|y_N\|)\} d\vartheta. \end{aligned}$$

Здесь $L > 0$ и $K > 0$ — константы Липшица. Пусть $L_1 = \max\{L, K\}$, тогда, с учетом соотношения $|e_N(s)| \leq 1$, $s \in [0, T + M]$, получаем оценку

$$\|y_N(s)\| \leq \int_0^s L_1 (\|y_N(\vartheta)\| + \xi_N(\vartheta)) d\vartheta.$$

Далее, в силу (2.25), заключаем

$$\|y_N(s)\| \leq \int_0^s L_1 (\|y_N(\vartheta)\| + T) d\vartheta, \quad (2.26)$$

откуда получаем равномерную по N оценку

$$\|y_N(s)\| \leq T(e^{L_1 s} - 1). \quad (2.27)$$

Таким образом, семейство функций $\{y_N(\cdot)\}$ равномерно ограничено на $[0, T + M]$. Более того, правая часть системы (2.23) также равномерно ограничена на $[0, T + M]$ величиной $L_2 = L_1 T e^{L_1(T+M)}$. Отсюда следует, что для любых $s', s'' \in [0, T + M]$ справедливо

$$\begin{aligned} \|y_N(s'') - y_N(s')\| &= \left\| \int_{s''}^{s'} \{\alpha_N f(\xi, y) + (1 - \alpha_N) G(\xi, y) e_N\} ds \right\| \leq \\ &\leq L_2 |s'' - s'|, \end{aligned}$$

т.е. функции $y_N(s)$ равномерно липшицевы на $[0, T + M]$ с константой Липшица L_2 , и, следовательно, семейство функций $\{y_N(\cdot)\}$ равностепенно непрерывно. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Положим $\delta = \varepsilon/L_2$ (величина δ , очевидно, не зависит от N). Тогда из условия $|s'' - s'| < \delta$ следует выполнение неравенства $|y_N(s'') - y_N(s')| < \varepsilon$.

По теореме Арцела-Асколи семейства функций $\{z_N(\cdot)\}$ предкомпактны в $C([0, T + M])$ в топологии полного метрического пространства и, следовательно, из каждой последовательности $\{z_N(\cdot)\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{z_{N_k}(\cdot)\}$.

2) Теперь покажем, что все последовательности $\{z_{N_k}(\cdot)\}$ имеют предельными точками функцию $z(\cdot)$. Это будет означать, что сама последовательность $\{z_N(\cdot)\}$ сходится к тому же пределу.

Функции $\xi_{N_k}(\cdot)$ и $y_{N_k}(\cdot)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\xi_{N_k}(s) = \int_0^s \alpha_{N_k} d\vartheta, \quad (2.28)$$

$$y_{N_k}(s) = \int_0^s \{\alpha_{N_k} f(z_{N_k}) + (1 - \alpha_{N_k}) G(z_{N_k}) e_{N_k}\} d\vartheta. \quad (2.29)$$

Покажем, что предельный переход при $k \rightarrow \infty$ в (2.28), (2.29) приводит к интегральным аналогам уравнений (2.23):

$$\xi(s) = \int_0^s \alpha d\vartheta,$$

$$y(s) = \int_0^s \{\alpha f(\xi, y) + (1 - \alpha) G(\xi, y) e\} d\vartheta.$$

В силу непрерывности функций f и G суперпозиции

$$\mathbf{f}_k(\cdot) = f(\xi_{N_k}(\cdot), y_{N_k}(\cdot)), \quad \mathbf{G}_k(\cdot) = G(\xi_{N_k}(\cdot), y_{N_k}(\cdot))$$

сходятся при $k \rightarrow \infty$, соответственно, к функциям

$$\mathbf{f}(\cdot) = f(\xi(\cdot), z(\cdot)) \text{ и } \mathbf{G}(\cdot) = G(\xi(\cdot), z(\cdot)).$$

Следовательно, при $k \rightarrow \infty$ справедливо

$$\begin{aligned} y_{N_k}(s) &= \int_0^s [\alpha_{N_k} \mathbf{f}_k + (1 - \alpha_{N_k}) \mathbf{G}_k e_{N_k}] d\vartheta \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^s [\alpha_{N_k} \mathbf{f} + (1 - \alpha_{N_k}) \mathbf{G} e_{N_k}] d\vartheta. \end{aligned}$$

Интегралы вида $\int_0^{T+M} \alpha_{N_k}(s) \phi(s) ds$ и $\int_0^{T+M} (1 - \alpha_{N_k}(s)) \Phi(s) e_{N_k}(s) ds$ сходятся, соответственно, к $\int_0^{T+M} \alpha(s) \phi(s) ds$ и $\int_0^{T+M} (1 - \alpha(s)) \Phi(s) e(s) ds$ для любых непрерывных на $[0, T + M]$ вектор-функции $\phi(\cdot)$ и матричной функции $\Phi(\cdot)$. В самом деле, если $\phi(s) = \phi$ и $\Phi(s) = \Phi$ постоянны на отрезках $\mathcal{I}_i$, то на каждом $\mathcal{I}_i$ имеем

$$\int_{\mathcal{I}_i} \alpha_{N_k} \phi ds = \int_{\mathcal{I}_i} \alpha \phi ds, \quad \int_{\mathcal{I}_i} (1 - \alpha_{N_k}) \Phi e_{N_k} ds = \int_{\mathcal{I}_i} (1 - \alpha) \Phi e ds.$$

В общем случае любую непрерывную функцию можно сколь угодно точно равномерно аппроксимировать кусочно постоянными функциями [84]. Таким образом, предельный переход при $k \rightarrow \infty$ в соотношениях (2.28), (2.29) приводит к интегральным аналогам уравнений (2.23). В силу единственности решения задачи Коши (2.21), (2.22) и произвольности выбранной подпоследовательности $\{z_{N_k}(\cdot)\}$, заключаем, что последовательность решений $\{z_N(\cdot)\}$ системы (2.23), (2.24) сходится при $N \rightarrow \infty$ к решению $z(\cdot) = (\xi(\cdot), y(\cdot))$ системы (2.21), (2.22). $\square$

2.1.3 Общая процедура улучшения дискретно-непрерывных процессов

Рассмотрим задачу улучшения (2.1)–(2.4). Потребуем, чтобы ее решение содержалось в исходном классе “физически реализуемых” дискретно-непрерывных процессов. Для этого придется дополнить общую схему улучшения процедурой аппроксимации обобщенных решений траекториями ДНС (2.2)–(2.4), или, что то же, аппроксимацией процессов редуцированной задачи (2.17)–(2.20) процессами задачи (2.8)–(2.11) с невыпуклым множеством скоростей.

Сформулируем общую схему улучшения управлений ДНС:

Алгоритм 2.1.1 Пусть σ^0 — процесс, допустимый в (2.1)–(2.5).

0. На данном шаге алгоритма происходит преобразование процесса σ^0 дискретно-непрерывной системы к процессу редуцированной системы ς^0 и продолжение управлений и траекторий на максимальный интервал времени. Тем самым строится допустимый процесс ϱ^0 задачи (2.17)–(2.20).
1. Пусть $\varrho = (\xi(\cdot), y(\cdot), v(\cdot), \alpha(\cdot), e(\cdot))$ есть процесс, полученный в результате решения редуцированной задачи улучшения.

2. На этом этапе строится аппроксимация траектории системы (2.18)–(2.20) решениями системы (2.9)–(2.11).

3. Находим “полезную долю” суммарного расхода ресурса: определим интервал времени $[0, \bar{S}]$, исключая из $[0, \bar{S}]$ все интервалы $\mathcal{I}_i^1$, на которых $\alpha_N(s) \equiv 0$, $e_N(s) \equiv 0$, и положим $S = \bar{S}$.

Переопределим функции $v_N(\cdot)$, $\alpha_N(\cdot)$, $e_N(\cdot)$ на $[0, S]$ сдвигом по интервалам $\mathcal{I}_i^1$. Интегрируя систему (2.9)–(2.11) с управлениями $v_N(\cdot)$, $\alpha_N(\cdot)$, $e_N(\cdot)$, получим соответствующие траектории $\xi_N(\cdot)$, $y_N(\cdot)$.

Проверим выполнение условия $y_N(S) \approx y(\bar{S})$ с принятой точностью. Если оно нарушено, увеличиваем N и возвращаемся к п. 2.

4. Построение допустимого импульсного управления $\{(\tau_i, \nu_i)_{i=\overline{1, k}}\}$.

Определим набор $\tau_i = \xi(\theta_i)$, $\nu_i = \|\nu_i\|e(\theta_i)$, где точки переключения динамики $\{\theta_i, \theta_i + \|\nu_i\|\}_{i=\overline{1, k}}$ и число k находятся из рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \min\{s \in [0, S] : \alpha(s) = 0\}, \\ \theta_1 + \|\nu_1\| &= \min\{s \in (\theta_1, S] : \alpha(s) = 1\}, \\ \theta_{i+1} &= \min\{s \in (\theta_i + \|\nu_i\|, S] : \alpha(s) = 0\}, \\ \theta_{i+1} + \|\nu_{i+1}\| &= \min\{\min\{s \in (\theta_{i+1}, S] : \alpha(s) = 1\}, S\}.\end{aligned}$$

Если для некоторого j выполняется одно из условий:

$$\theta_j + \|\nu_j\| = S$$

или

$$\alpha(s) = 1 \quad \forall s \in (\theta_j + \|\nu_j\|, S],$$

тогда полагаем $k = j$.

5. Обратное преобразование времени.

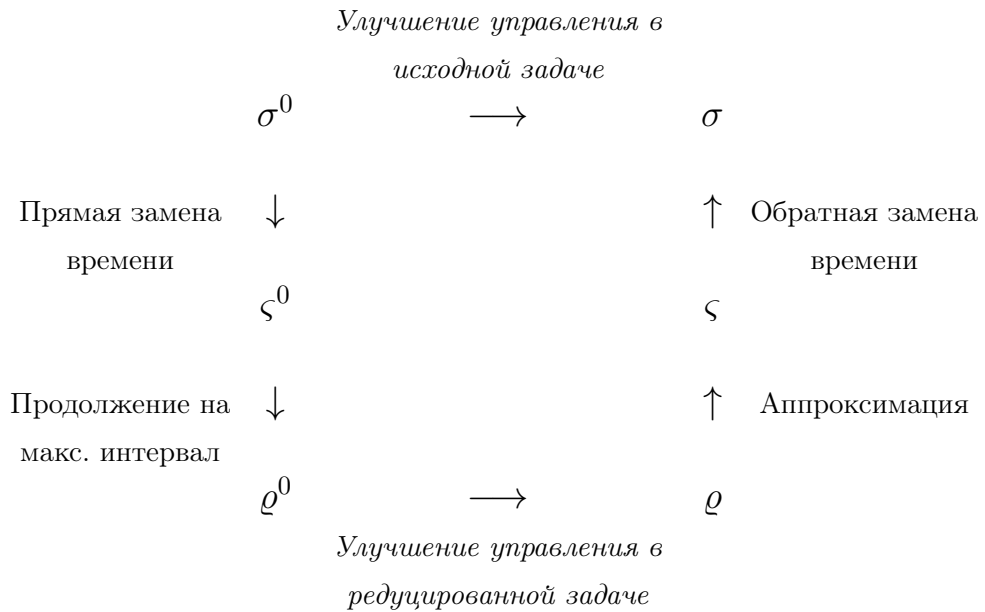
По управляемому процессу $\varsigma = (\xi_N(\cdot), y_N(\cdot), v_N(\cdot), \alpha_N(\cdot), e_N(\cdot); S)$ восстановим процесс $\sigma = (x(\cdot), u(\cdot), \{(\tau_i, \nu_i)_{i=\overline{1, K}}\})$ дискретно-непрерывной системы, полагая $x(t) = y(\Gamma(t))$, $u(t) = v(\Gamma(t))$ на $[0, T]$, где $\Gamma(t) = t + \sum_{\tau_i \leq t} \|\nu_i\|$.

► Приведенная схема метода содержит детализацию прямого и обратного переходов от задачи улучшения управления дискретно-непрерывными

системами к аналогичной задаче для систем с ограниченными управлениями. Собственно, каждая итерация сводится к решению редуцированной задачи улучшения.

► Всякой траектории $y(\cdot)$ системы (2.18)–(2.20) в результате обратного преобразования соответствует последовательность $x_N(\cdot)$ решений исходной системы, сходящаяся к функции $y(\Gamma(\cdot))$ в слабой-* топологии пространства BV . Здесь $\Gamma(t) = \inf\{s : \xi(s) > t\}$. Если в результате работы алгоритма мы получим процесс ϱ , удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности в задаче (2.17)–(2.20), то обобщенное решение дискретно-непрерывной системы и соответствующая ему управляющая мера удовлетворяют необходимым условиям оптимальности в классе обобщенных импульсных процессов. С этой точки зрения можно считать, что последовательность траекторий, соответствующая последовательности чисто импульсных управлений, представляет собой аппроксимацию указанного обобщенного решения.

Процедура улучшения управления ДНС может быть представлена диаграммой:



Значения соответствующих функционалов связаны соотношениями:

$$I(\sigma^0) = J(\varsigma^0) = \tilde{J}(\varrho^0) > \tilde{J}(\varrho) \approx J(\varsigma) = I(\sigma).$$

Гамильтониан редуцированной задачи и структура экстремальных управлений

В качестве нормы, фигурирующей в условии (2.4), выберем $|\cdot| := \|\cdot\|_1$. Рассмотрим функцию Понтрягина

$$h(z, q, p, \omega) = \langle p, \alpha f(z, v) + (1 - \alpha)G(z)e \rangle + q\alpha.$$

Легко получить формулы для точек $\tilde{\omega} = (\tilde{v}, \tilde{\alpha}, \tilde{e})$ максимума функции h по ω :

$$\tilde{v}(z, p) \in \text{Arg max}_{v \in U} \langle p, f(z, v) \rangle \quad (2.30)$$

(допустим, что задача максимизации здесь разрешима аналитически),

$$\tilde{\alpha}(z, q, p) \begin{cases} = 1, & \gamma^\alpha > 0, \\ = 0, & \gamma^\alpha < 0, \\ \in [0, 1], & \gamma^\alpha = 0, \end{cases} \quad (2.31)$$

и

$$\tilde{e}(z, q, p) = \bar{e}(z, q, p, \tilde{\alpha}(z, q, p)), \quad (2.32)$$

$$\bar{e}(z, q, p, \alpha) \in \begin{cases} \{e \in \mathbb{R}^m : \sum_{i \in K(z, p)} e_i \cdot \text{sign} \{(G^*(z)\psi)_i\} = 1\}, & \gamma^e > 0, \\ B, & \gamma^e = 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\gamma^\alpha(z, q, p) = \langle p, f(z, \tilde{v}) \rangle + q - \|G^*(z)p\|_\infty,$$

$$\gamma^e(z, q, p, \alpha) = (1 - \alpha)\|G^*(z)p\|_\infty,$$

$$K(z, p) = \{k : |(G^*(z)p)_k| = \|G^*(z)p\|_\infty\}, \quad (2.34)$$

где $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq \dim(x)} |x_i|$. Тогда гамильтониан редуцированной задачи имеет вид

$$\mathbf{h}(z, q, p) = \max\{\langle p, f(z, \tilde{v}) \rangle + q, \|G^*(z)p\|_\infty\}.$$

Пример 2.1.1 Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I = x_1(\pi) + x_2(\pi),$$

при условиях

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \quad [x_1(\tau_i)] = \nu_{i1},$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2, \quad [x_2(\tau_i)] = \nu_{i2},$$

$$x_1(0-) = x_2(0-) = 0, \quad t \in [0, \pi],$$

$$\sum \|\nu_i\| \leq 5\pi/4, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_2.$$

и соответствующую ей вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} J &= y_1(9\pi/4) + y_2(9\pi/4) \rightarrow \inf, \\ \dot{y}_1 &= \alpha(-2y_1 + y_2) + (1 - \alpha)e_1, \quad y_2(0-) = 0, \\ \dot{y}_2 &= \alpha(-y_1 - 2y_2) + (1 - \alpha)e_2, \quad y_1(0-) = 0, \\ \dot{\xi} &= \alpha, \quad \xi(0) = 0, \quad \xi(9\pi/4) = \pi, \\ \alpha &\in [0, 1], \quad \|e\| \leq 1. \end{aligned}$$

Редуцированная задача линейна по фазовым переменным, и мы можем применить в ней модификацию алгоритма улучшения на основе нелокальных формул приращения функционала [93], которая в нашем случае опирается на общие формулы для экстремальных управлений, аналогичные (2.30)–(2.34). Пусть начальный процесс $\sigma^0 = (\mathfrak{J}^0, x^0(\cdot))$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^0 &= \{\tau^0, \nu^0\} = \{0, (\frac{\pi\sqrt{2}}{8}, \frac{\pi\sqrt{2}}{8})\}, \\ x^0(t) &= \begin{cases} (0, 0), & t = 0-, \\ \frac{\pi\sqrt{2}}{8}e^{-2s}(\cos s + \sin s, \cos s - \sin s), & t \in [0, \pi]. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $I(\sigma^0) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-2\pi}$. Построим соответствующий процесс ϱ^0 в редуцированной задаче:

$$\begin{aligned} \alpha^0(s) &= \begin{cases} 0, & s \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ 1, & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), \\ 0, & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}], \end{cases} \quad e^0(s) \begin{cases} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), & s \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ \in \{e : \|e\| \leq 1\}, & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), \\ = (0, 0), & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}], \end{cases} \\ y^0(s) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(s, s), & s \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ \frac{\pi}{4}e^{\pi/2-2s}(\sin s, \cos s), & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), \\ -\frac{\pi\sqrt{2}}{8}e^{-2\pi}(1, 1), & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}], \end{cases} \\ \xi^0(s) &= \begin{cases} 0, & s \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ s - \pi/4, & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), \\ \pi, & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдем сопряженную траекторию

$$\psi^0(s) = \begin{cases} e^{-2\pi}(1, 1), & s \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ \sqrt{2}e^{2s-5\pi/2}(\sin s, \cos s), & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), \\ -(1, 1), & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]. \end{cases}$$

Тогда функция переключения $\gamma_\alpha^0(s; \beta)$ имеет вид:

$$\gamma_\alpha^0(s; \beta) = \begin{cases} -\sqrt{2}(2s+1)e^{-2\pi} - \beta, & s \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ -\sqrt{2}e^{2s-5\pi/2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi e^{-2\pi} - \beta, & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\pi e^{-2\pi} - \sqrt{2} - \beta, & s \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]. \end{cases}$$

При $\beta^0 = -(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi e^{-2\pi} + \sqrt{2}e^{-\pi/2})$ имеем $\gamma_\alpha^0(s, \beta^0) > 0$ на $[0, \pi)$, $\gamma_\alpha^0(s, \beta^0) = 0$ при $s = \pi$ и $\gamma_\alpha^0(s, \beta^0) < 0$ на $(\pi, 9\pi/4]$. Тогда новый управляемый процесс ϱ^1 :

$$\alpha^1(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \pi), \\ 0, & s \in [\pi, \frac{9\pi}{4}], \end{cases} \quad e^1(s) \begin{cases} \in \{e : \|e\| \leq 1\}, & s \in [0, \pi), \\ = (\sin s, \cos s), & s \in [\pi, \frac{5\pi}{4}), \\ = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1), & s \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]. \end{cases}$$

$$y^1(s) = \begin{cases} (0, 0), & s \in [0, \pi), \\ (-\cos s - 1, \sin s), & s \in [\pi, \frac{5\pi}{4}), \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{5\pi}{4} + 1 - \sqrt{2} - s, \frac{5\pi}{4} - 1 - s), & s \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}], \end{cases}$$

$$\xi^1(s) = \begin{cases} s, & s \in [0, \pi), \\ \pi, & s \in [\pi, \frac{9\pi}{4}]. \end{cases}$$

Соответствующий процесс дискретно-непрерывной системы σ^1 имеет вид

$$\mathfrak{J}^1 = \{\tau^1, \nu^1\} = \{\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1 + \pi, 1 + \pi)\},$$

$$x^1(t) = \begin{cases} (0, 0), & t \in [0, \pi), \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1 + \pi, 1 + \pi), & t = \pi. \end{cases}$$

Очевидно, имеет место улучшение:

$$I(\sigma^1) = -(\sqrt{2}\pi + 1) < \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = I(\sigma^0).$$

Найдем сопряженную траекторию ψ^1 , отвечающую процессу ϱ^1 :

$$\psi^1(s) = \begin{cases} e^{2(s-\pi)}(\cos s + \sin s, \cos s - \sin s), & s \in [0, \pi), \\ -(1, 1), & s \in [\pi, \frac{9\pi}{4}]. \end{cases}$$

Функция

$$\gamma_\alpha^1(s; \beta) = \begin{cases} -\sqrt{2}e^{2(s-\pi)} - \beta, & s \in [0, \pi), \\ \sin s - 3\cos s - 3 - \sqrt{2} - \beta, & s \in [\pi, \frac{5\pi}{4}), \\ (\frac{5\pi}{2} - 2s)\sqrt{2} - 3 - \beta, & s \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}], \end{cases}$$

монотонно убывает на $[0, 9\pi/4]$. При $\beta^1 = 2 - \sqrt{2}$ эта функция положительна на $[0, \pi)$, обращается в нуль в точке $s = \pi$ и отрицательна на $(\pi, 9\pi/4]$. Находим процесс ϱ^2 :

$$\alpha^2(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \pi), \\ 0, & s \in [\pi, \frac{9\pi}{4}], \end{cases} \quad e^2(s) \begin{cases} \in \{e : \|e\| \leq 1\}, & s \in [0, \pi), \\ = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1), & s \in [\pi, \frac{9\pi}{4}]. \end{cases}$$

$$y^2(s) = \begin{cases} (0, 0), & s \in [0, \pi), \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\pi - s)(1, 1), & s \in [\pi, \frac{9\pi}{4}], \end{cases} \quad \xi^2(s) = \begin{cases} s, & s \in [0, \pi), \\ \pi, & s \in [\pi, \frac{9\pi}{4}]. \end{cases}$$

Соответствующий процесс дискретно-непрерывной системы σ^2 имеет вид

$$\mathfrak{J}^2 = \{\tau^2, \nu^2\} = \{\pi, (-\frac{5\pi\sqrt{2}}{8}, -\frac{5\pi\sqrt{2}}{8})\},$$

$$x^2(t) = \begin{cases} (0, 0), & t \in [0, \pi), \\ -\frac{5\pi\sqrt{2}}{8}(1, 1), & t = \pi. \end{cases}$$

Здесь также имеем

$$I(\sigma^2) = -\frac{5\pi\sqrt{2}}{4} < -(\sqrt{2}\pi + 1) = I(\sigma^1).$$

Легко убедиться, что процесс σ^2 является оптимальным в исходной задаче.

2.2 Численные методы решения задач оптимального управления нелинейными дифференциальными уравнениями с мерами

Поставим задачу о расшифровке методов улучшения управлений в редуцированной задаче. Под расшифровкой метода мы понимаем выражение конструкций базового алгоритма в терминах исходной задачи. Результатом являются новые алгоритмы улучшения импульсных управлений. Мы проиллюстрируем технику расшифровки на примере известных процедур слабого варьирования [93] для простейшего варианта задачи оптимального управления дифференциальным уравнением с мерами:

$$\begin{aligned} I &= F(x(T)) \rightarrow \min, \\ dx &= f(t, x, u)dt + G(t, x)d\nu, \quad x(0-) = x^0, \\ u(t) &\in U, \quad \int_0^T |d\nu| \leq M, \end{aligned} \tag{2.35}$$

где относительно множества U и функции f действуют предположения (H_1) – (H_3) , функция конечного состояния F непрерывна, и

(H_{16}) матрица G непрерывно дифференцируема по (t, x) вместе с тензором $\frac{\partial}{\partial x}G$,

(H₁₇) матрица G удовлетворяет условию корректности типа Фробениуса:

$$[G^i(t, x), G^j(t, x)] := \frac{\partial}{\partial x} G^i(t, x) G^j(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} G^j(t, x) G^i(t, x) = 0.$$

Здесь $i, j = \overline{1, m}$, G^k означает k -й столбец матрицы G , $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор (скобка Ли).

Предположение корректности позволяет упростить вид предельной системы. Реакция на импульсное воздействие в такой модели однозначна (быстрые движения, по сути, не управляемы, т.к. приводят нас в одну и ту же точку фазового пространства). В результате, скачки фазовой траектории могут быть представлены разностью $[x(\tau)] = \varkappa_\tau(1) - x(\tau-)$, где $\varkappa_\tau(\cdot) \in AC([0, T_\tau], \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет системе

$$\dot{\varkappa}(\theta) = G(\tau, \varkappa(\theta))[\nu(\tau)], \quad \varkappa(0) = x(\tau-). \quad (2.36)$$

Для краткости, на протяжении этого параграфа мы будем обозначать поставленную сейчас задачу так же (P) . С помощью метода редукции [74] задача (P) может быть эквивалентным образом преобразована к задаче (0.5) с ограниченными управлениями и абсолютно непрерывными траекториями на *фиксированном* отрезке времени $[0, T + M]$. На протяжении данного параграфа мы будем обозначать задачу (0.5) через (RP) .

Расшифровка базового алгоритма слабой вариации управления

В данном параграфе изучим свойства улучшения и сходимости расшифрованных алгоритмов. Отметим, что используемые здесь базовые алгоритмы имеют локальный характер улучшения, глубина которого определяется типом применяемой вариации управления.

Путем расшифровки метода слабой вариации управления [93] построим метод улучшения в задаче (P) . Дополнительно предположим, что

(H₁₈) функция F непрерывно дифференцируема, функции f и G непрерывны по совокупности своих переменных вместе со своими частными производными $\frac{\partial}{\partial t} f$, $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial t} G$, $\frac{\partial}{\partial x} G$.

Замечание 2.2.1 На протяжении данного параграфа, фиксируя некоторые управления $u(\cdot)$ и $\omega(\cdot)$ в исходной и редуцированной задачах, мы будем иметь в виду подходящим образом выбранные экземпляры соответствующих классов эквивалентности, а именно, борелевские функции $u(\cdot)$

и $\omega(\cdot)$, такие что $u(t) \in U$ и $\omega(s) \in \mathcal{U}$ *всюду* на соответствующих отрезках времени $[0, T]$ и $[0, T + M]$. Мы считаем проведение такой “выборки” вполне оправданным, поскольку речь идет именно о численных методах, нацеленных в конечном счете на практические приложения (а на практике “управление” — это совершенно определенный входной сигнал).

Опишем вычислительную схему базового алгоритма улучшения.

Алгоритм 2.2.1 Пусть задан процесс $\varsigma^0 = (z^0(\cdot), \omega^0(\cdot)) \in \Sigma(RP)$, $z^0(\cdot) = (\xi^0(\cdot), y^0(\cdot))$, $\omega^0(\cdot) = (u^0(\cdot), \alpha^0(\cdot), e^0(\cdot))$.

1. На отрезке $[0, T + M]$ найдем решение $\psi(\cdot) = (\psi_\beta^\xi(\cdot), \psi^y(\cdot))$ сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^\xi &= -\frac{\partial}{\partial \xi} h(z^0, \psi, \omega^0), & \psi^\xi(S) &= -\beta, \\ \dot{\psi}^y &= -\frac{\partial}{\partial y} h(z^0, \psi, \omega^0), & \psi^y(T + M) &= -\nabla F(y^0(T + M)), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $h(z, \psi, \omega) = \langle \psi^y, \alpha f(z, v) + (1 - \alpha)G(z)e \rangle + \psi^\xi \alpha$ — функция Понтрягина, а β — скалярный параметр.

2. Построим управление $\bar{\omega}_\beta(\cdot) = \tilde{\omega}(z^0(\cdot), \psi(\cdot))$, где $\tilde{\omega} = (\tilde{v}, \tilde{\alpha}, \tilde{e})$ определяется одним из следующих способов:

i) (метод условного градиента)

$$\begin{aligned} \tilde{v} &\in \operatorname{Arg} \max_{v \in U} \langle p, \left[\frac{\partial}{\partial v} f(z, v^0) \right]^* v \rangle, & \tilde{e} &\in \operatorname{Arg} \max_{e \in \partial B} \langle p, G^*(z)e^0(s) \rangle, \\ \tilde{\alpha} &\begin{cases} = 1, & \varpi > 0, \\ = 0, & \varpi < 0, \\ \in [0, 1], & \varpi = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $\varpi(s, z, q, p) = \langle p, f(z, v^0(s)) \rangle + q - \langle p, G(z)e^0(s) \rangle$.

ii) (метод проекции градиента)

$$\tilde{\omega}(s, z, q, p) = P_{\mathcal{U}} \left(\omega^0(s) + \frac{\partial H}{\partial \omega}(z, q, p, \omega^0(s)) \right),$$

где $P_{\mathcal{U}}(\cdot)$ есть оператор проектирования на множество $\mathcal{U} := U \times [0, 1] \times B$.

3. Рассмотрим функцию

$$\gamma_\beta(s) = \max_{\omega \in \mathcal{U}} \left\langle \frac{\partial h}{\partial \omega}(z^0(s), \psi(s), \omega^0(s)), \omega - \omega^0(s) \right\rangle,$$

и определим величину

$$\Delta_\varsigma(\varsigma^0; \beta) := \int_0^{T+M} \gamma_\beta(s) ds. \quad (2.38)$$

Критерий остановки алгоритма:

$$\Delta_\varsigma(\varsigma^0) := \Delta_\varsigma(\varsigma^0; 0) = 0. \quad (2.39)$$

4. Пусть $\Delta_\varsigma(\varsigma^0) > 0$. Определим функцию

$$\omega_{\beta, \rho}(s) = \omega^0(s) + \rho(\bar{\omega}_\beta(s) - \omega^0(s)), \quad \rho \in [0, 1], \quad (2.40)$$

и пусть $z_{\beta, \rho}^1(\cdot) = (\xi_{\beta, \rho}^1(\cdot), y_{\beta, \rho}^1(\cdot))$ — решение на отрезке $[0, T + M]$ редуцированной системы (0.5) при управлении $\omega_{\beta, \rho}^1(\cdot)$.

5. Параметр β находится из терминального условия $\xi_{\beta, \rho}^1(T + M) = T$, а ρ — из условия минимума целевого функционала.

Алгоритм 2.2.1 представляет собой, по существу, метод слабого варьирования [93]. Для учета терминального ограничения предполагается решать задачу параметрического поиска. Детальная разработка этого вопроса лежит за рамками настоящей работы. Однако, можно утверждать, что искомый параметр β всегда найдется. В самом деле, рассмотрим условие

$$T = \xi_{\beta, \rho}^1(T + M) = \int_0^{T+M} \alpha_{\beta, \rho}(s) ds = T + \rho \int_0^{T+M} (\bar{\alpha}_\beta(s) - \alpha^0(s)) ds,$$

или, что то же

$$\int_0^{T+M} \bar{\alpha}_\beta(s) ds = T.$$

Положим $\mathbf{g}(s) = \langle \psi^y(s), f(z^0(s), v^0(s)) \rangle - \int_s^{T+M} \frac{\partial}{\partial \xi} h(z^0(\theta), \psi(\theta), \omega^0(\theta)) d\theta - \langle \psi^y(s), G(z^0(s)) e^0(s) \rangle := \varpi(s, z^0(s), \psi(s)) + \beta$. Отметим, что $\mathbf{g}$ не зависит от β .

Рассмотрим множества $A_{\{\mathbf{g}(s) \geq \beta\}} = \{s \in [0, T + M] : \mathbf{g}(s) \geq \beta\}$. Аналогично определяются множества $A_{\{\mathbf{g}(s) = \beta\}}$, $A_{\{\mathbf{g}(s) > \beta\}}$.

Рассмотрим теперь скалярную функцию $\mathbf{f}$ вида

$$\mathbf{f}(\beta) := \mathcal{L}(A_{\{\mathbf{g}(s) \geq \beta\}}).$$

Функция $\mathbf{f}$ по построению

- не возрастает (в силу свойств меры и того факта, что $A_{\{g(s) \geq \beta_1\}} \supseteq A_{\{g(s) \geq \beta_2\}}$ при $\beta_1 < \beta_2$), а значит имеет не более чем счетное множество точек разрыва первого рода;
- функция f непрерывна слева, и $f(\beta+) = \mathcal{L}(A_{\{g(s) > \beta\}})$. Действительно, для любых последовательностей $\beta_k, \beta_k < \beta$, и $\beta_m, \beta_m > \beta$, сходящихся к β , имеют место представления

$$A_{\{g(s) \geq \beta\}} = \bigcap_{\beta_k < \beta, \beta_k \rightarrow \beta} A_{\{g(s) > \beta_k\}}, \quad A_{\{g(s) > \beta\}} = \bigcup_{\beta_m > \beta, \beta_m \rightarrow \beta} A_{\{g(s) \geq \beta_m\}}.$$

Так как множества $B_m := A_{\{g(s) \geq \beta_m\}}$ образуют систему вложенных множеств: $B_m \subseteq B_{m+1}$ при $\beta_{m+1} < \beta_m$, то по непрерывности меры Лебега (см. [77], стр. 71, теорема 11) для любой последовательности $\beta_m \rightarrow \beta, \beta_m > \beta$, соответствующая последовательность $f(\beta_m) = \mathcal{L}(B_m)$ сходится к $\mathcal{L}(A_{\{g(s) > \beta\}})$, и

$$\mathcal{L}(A_{\{g(s) > \beta\}}) = f(\beta+).$$

Множества $C_k := A_{\{g(s) > \beta_k\}}$ также образуют систему вложенных множеств: $C_{k+1} \subseteq C_k$ при $\beta_k < \beta_{k+1}$. Тогда в силу непрерывности меры Лебега (см. [77], стр. 72, теорема 12) для любой последовательности $\beta_k \rightarrow \beta, \beta_k < \beta$, соответствующая последовательность чисел $\mathcal{L}(C_k)$ сходится к $\mathcal{L}(A_{\{g(s) \geq \beta\}}) = f(\beta)$. Ввиду включений $C_{k+1} \subseteq B_{k+1} \subseteq C_k$ имеем

$$\mathcal{L}(C_{k+1}) \leq \mathcal{L}(B_{k+1}) \leq \mathcal{L}(C_k),$$

откуда следует, что также и $f(\beta_k) := \mathcal{L}(B_k) \rightarrow f(\beta)$ при $k \rightarrow \infty$.

Положим $\beta_- = \text{ess inf}_{[0, T+M]} g(s)$ и $\beta_+ = \text{ess sup}_{[0, T+M]} g(s)$. Очевидно, при $\beta \leq \beta_-$ мы имеем $f(\beta) = T + M$, и $f(\beta) = 0$ при $\beta \geq \beta_+$. Так как $T \in [0, T + M]$, то либо

1) функция $f(\cdot)$ принимает значение T при некотором β , т.е. найдется $\bar{\beta}$ такое, что $f(\bar{\beta}) = T$,

либо

2) функция $f(\cdot)$ “перескакивает” через значение $f = T$, т.е. существует $\hat{\beta}$ такое, что $f(\hat{\beta}) > T$ и $f(\hat{\beta}+) \leq T$. При этом $\mathcal{L}(A_{\{g(s) = \hat{\beta}\}}) = -[f(\hat{\beta})] = f(\hat{\beta}) - f(\hat{\beta}+) = f(\hat{\beta}) - \mathcal{L}(A_{\{g(s) > \hat{\beta}\}}) > T - \mathcal{L}(A_{\{g(s) > \hat{\beta}\}})$. Полагая $\bar{\alpha}(s) = 1$ на произвольном подмножестве множества $A_{\{g(s) = \hat{\beta}\}}$, мера которого равна $T - \mathcal{L}(A_{\{g(s) > \hat{\beta}\}})$, и $\bar{\alpha}(s) = 0$ вне этого подмножества, мы установим требуемый результат.

Отметим, что алгоритм 2.2.1 не улучшает процессы редуцированной задачи, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума Понтрягина.

Метод улучшения обобщенного управления

Проведем расшифровку алгоритма 2.2.1. Запишем для задачи (P) функции Понтрягина

$$H^a(t, x, p, q, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + q, \quad H^s(t, x, p, l) = \langle p, G(t, x)l \rangle.$$

Рассмотрим их выпуклую комбинацию

$$H(t, x, q, p, \pi) = \lambda H^a(t, x, q, p, u) + (1 - \lambda) H^s(t, x, p, l), \quad \lambda \in [0, 1],$$

где π есть набор управлений (u, λ, l) .

Определим функцию $\tilde{\pi} = (\tilde{u}, \tilde{\lambda}, \tilde{l})$ одним из следующих способов:

i) (в методе условного градиента)

$$\tilde{u}(t, x, q, p) \in \text{Arg max}_{u \in U} \langle H_u^a(t, x, q, p, u^0(t)), u \rangle, \quad (2.41)$$

$$\tilde{l}(t, x, p) \in \text{Arg max}_{l \in \partial B} H^s(t, x, p, l), \quad (2.42)$$

$$\tilde{\lambda}(t, x, q, p) \begin{cases} = 1, & H^a(t, x, q, p, u^0(t)) > H^s(t, x, p, l^0(t)), \\ = 0, & H^a(t, x, q, p, u^0(t)) < H^s(t, x, p, l^0(t)), \\ \in [0, 1], & H^a(t, x, q, p, u^0(t)) = H^s(t, x, p, l^0(t)). \end{cases} \quad (2.43)$$

Здесь $H_u^a = \frac{\partial}{\partial u} H^a$. Очевидно,

$$\langle H_\pi(t, x, q, p, \pi^0(t)), \tilde{\pi}(t, x, q, p) \rangle = \max_{\pi \in \mathcal{U}} \langle H_\pi(t, x, q, p, \pi^0(t)), \pi \rangle,$$

ii) (в методе проекции градиента)

$$\tilde{\pi}(t, x, q, p) = P_{\mathcal{U}} (\pi^0(t) + H_\pi(t, x, q, p, \pi^0(t))). \quad (2.44)$$

Пусть $\sigma^0 = (x^0(\cdot), u^0(\cdot), d\nu^0)$ — допустимый в задаче (P) опорный процесс. Положим $\Gamma^0(t) = t + \text{Var}_{[0, t]} \nu^0(\cdot)$, $t \in [0, T]$, $\xi^0(\cdot)$ — обратная к $\Gamma^0(\cdot)$, $\pi^0(\cdot) = (u^0(\cdot), \lambda^0(\cdot), l^0(\cdot))$, где $\lambda^0(\cdot)$ и $l^0(\cdot)$ заданы соотношениями

$$\lambda^0(t) = \xi^0(\Gamma^0(t)), \quad l^0(t) = d\nu^0(t)/|d\nu^0(t)|, \quad t \in [0, T].$$

Отметим, что $\pi^0(t) = \omega^0(\Gamma^0(t))$, $t \in [0, T]$. Обозначим через $\phi_\beta(\cdot)$ решение $(\phi_\beta^t(\cdot), \phi^x(\cdot))$ сопряженной системы дифференциальных уравнений с мерой

$$\begin{aligned} d\phi^t &= -\frac{\partial}{\partial t} H^a dt - \frac{\partial}{\partial t} H^s |d\nu^0|, & \phi^t(T) &= -\beta, \\ d\phi^x &= -\frac{\partial}{\partial x} H^a dt - \frac{\partial}{\partial x} H^s |d\nu^0|, & \phi^x(T) &= -\nabla F(x^0(T)). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь производные функций Понтрягина вычисляются вдоль (x^0, u^0, l^0) .

При всех $t \in [0, T]$ определим управления

$$\bar{\pi}_\beta(t) = \tilde{\pi}(t, x^0(t), \phi_\beta(t))$$

и для каждого $\tau \in D_\nu^0 := \{\tau \in [0, T] : [\nu^0(\tau)] \neq 0\}$ и всех $\vartheta \in [0, 1]$ положим

$$\bar{\pi}_{\tau\beta}(\vartheta) = (\bar{u}(\tau), \tilde{\lambda}(\tau, \kappa_\tau^0(\vartheta), q_{\tau\beta}(\vartheta), p_\tau(\vartheta)), \bar{l}(\tau)).$$

При каждом $\tau \in D_\nu^0$ функция $\kappa_\tau^0(\cdot)$ удовлетворяет на $[0, 1]$ предельной системе вида (2.36):

$$\dot{\kappa}(\vartheta) = G(\tau, \kappa(\vartheta))[\nu^0(\tau)], \quad \kappa(0) = x^0(\tau-), \quad (2.46)$$

а функции $q_{\tau\beta}(\cdot)$ и $p_\tau(\cdot)$ — сопряженной предельной системе

$$\begin{aligned} \dot{q}(\vartheta) &= -\frac{\partial}{\partial t} H^s(\tau, \kappa^0(\vartheta), p(\vartheta), l^0(\tau))[\nu^0(\tau)], \quad q(1) = \phi_\beta^t(\tau), \\ \dot{p}(\vartheta) &= -\frac{\partial}{\partial x} H^s(\tau, \kappa^0(\vartheta), p(\vartheta), l^0(\tau))[\nu^0(\tau)], \quad p(1) = \phi^x(\tau). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Определим неотрицательную величину

$$\Delta_\sigma(\sigma^0; \beta) = \int_0^T \zeta(t) d\Gamma_c^0(t) + \sum_{\tau \in D^0} [[\nu^0(\tau)]] \int_0^1 \zeta_\tau(\vartheta) d\vartheta, \quad (2.48)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \langle H_\pi(t, x^0(t), \phi_\beta(t), \pi^0(t)), \bar{\pi}_\beta(t) - \pi^0(t) \rangle, \\ \zeta_\tau(\theta) &= \langle H_\pi(\tau, \kappa_\tau^0(\theta), q_{\tau\beta}(\theta), p_\tau(\theta), \pi^0(\tau)), \bar{\pi}_{\tau\beta}(\theta) - \pi^0(\tau) \rangle. \end{aligned}$$

Критерием остановки является выполнение равенства

$$\Delta_\sigma(\sigma^0) := \Delta_\sigma(\sigma^0; 0) = 0. \quad (2.49)$$

Отметим, что в силу замены переменной $t = \xi^0(s)$, $t \in [0, T] \setminus D_\nu^0$, и репараметризации

$$\vartheta = \vartheta_\tau(s) := (s - \Gamma^0(\tau-))/[\Gamma^0(\tau)], \quad s \in \Omega_\tau^0 := [\Gamma^0(\tau-), \Gamma^0(\tau)], \quad (2.50)$$

имеют место равенства $\zeta_\beta(s) = \gamma_\beta(\xi^0(s))$, $s \in [0, S] \setminus \Omega^0$ и $\zeta_\beta(s) = \gamma_{\tau\beta}(\vartheta_\tau(s))$ при $\mathcal{L}$ -почти всех $s \in \Omega_\tau^0$ и каждом $\tau \in D_\nu^0$. Здесь мы как и ранее обозначаем $\Omega^0 = \cup_{\tau \in D_\nu^0} \Omega_\tau^0$.

При $\rho \in [0, 1]$ сформируем семейство управлений варьирования

$$\begin{aligned} \pi_{\beta, \rho}(t) &= \pi^0(t) + \rho(\bar{\pi}_\beta(t) - \pi^0(t)), \quad t \in [0, T], \\ \pi_{\tau\beta, \rho}(\vartheta) &= \pi^0(\tau) + \rho(\bar{\pi}_{\tau\beta}(\vartheta) - \pi^0(\tau)), \quad \vartheta \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Построение нового импульсного управления в исходной задаче, однако, на этом не заканчивается: необходимо провести также варьирование носителя меры $d\nu^0$. Для этого требуется построить новое преобразование времени $\Gamma^1(\cdot)$, что составляет предмет двух вспомогательных операций. Первая из них — решение задачи Коши для одного скалярного уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(s) &= \begin{cases} \lambda_{\beta,\rho}(\xi^0(s)), & s \in [0, T+M] \setminus \Omega^0, \\ \lambda_{\tau_{\beta,\rho}}(\vartheta_\tau(s)), & s \in \Omega_\tau^0, \end{cases} \\ \xi(0) &= 0.\end{aligned}$$

Пусть $\xi_{\beta,\rho}^1(\cdot)$ — решение системы (2.62). Второй шаг построения нового преобразования времени — вычисление “обратной” функции:

$$\Gamma_{\beta,\rho}^1(t) = \inf\{s \in [0, T+M] : \xi_{\beta,\rho}^1(s) > t\}, \quad t \in [0, T].$$

Допустимое значение параметра $\beta(\rho)$ следует искать из условия

$$\Gamma_{\beta,\rho}^1(T) = T + M,$$

а ρ — из условия минимума целевого функционала.

Обозначим $\Omega_\tau^1 = [\Gamma^1(\tau-), \Gamma^1(\tau)]$, $\Omega^1 = \cup_{\tau \in D_\Gamma^1} \Omega_\tau^1$, $D_\Gamma^1 = \{\tau : [\Gamma^1(\tau)] > 0\}$. Отметим, что

$$\omega^1(s) = \pi(\xi^0(s)), \quad s \in [0, S] \setminus \Omega^0, \quad \omega^1(s) = \pi_\tau(\vartheta_\tau(s)), \quad s \in \Omega_\tau^0, \quad (2.52)$$

где $\omega^1(\cdot)$ определено в (2.40) (для краткости мы опускаем у всех функций индексы β и ρ , считая, что эти параметры заданы). В частности, справедливо $\dot{\xi}^1(s) = \alpha^1(s)$, $s \in [0, S]$. С другой стороны, $\omega^1(\Gamma^1(t)) = \pi(\xi^0(\Gamma^1(t)))$ на множестве $[0, T] \setminus D_\nu^0$ и $\omega^1(\Gamma^1(\tau)) = \pi_\tau(\vartheta_\tau(\Gamma^1(\tau)))$ при $\tau \in D_\nu^0$ (далее мы будем также опускать индексы ν и Γ у множеств D_ν^0 и D_Γ^1).

В силу свойств преобразования времени, применяя замену под знаком интеграла Лебега-Стилтьеса и учитывая соотношения (2.52), имеем

$$\begin{aligned}t &= \xi^1(\Gamma^1(t)) = \int_0^{\Gamma^1(t)} \alpha^1(s) ds = \\ &= \int_0^{\Gamma^1(t)} \chi_{\{[0,S] \setminus (\Omega^0 \cup \Omega^1)\}}(s) \lambda(\xi^0(s)) ds + \\ &+ \sum_\tau \int_0^{\Gamma^1(t)} \chi_{\{\Omega_\tau^0 \setminus \Omega^1\}}(s) \lambda_\tau(\vartheta_\tau(s)) ds =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \chi_{[0,T] \setminus (D^0 \cup D^1)}(\theta) \lambda(\xi^0(\Gamma^1(\theta))) d\Gamma^1(\theta) + \\
&+ \sum_{\tau} \int_0^t \chi_{\{\tau \in D^0 \setminus D^1\}}(\theta) \lambda_{\tau}(\vartheta_{\tau}(\Gamma^1(\theta))) d\Gamma^1(\theta),
\end{aligned}$$

где $d\Gamma^1(t)$ — мера, порожденная функцией $\Gamma^1(t)$, $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества A . Определяя функцию $\lambda^1(t)$ в виде

$$\lambda^1(t) = \lambda(\xi^0(\Gamma^1(t))), \quad t \in [0, T] \setminus (D^0 \cup D^1), \quad (2.53)$$

$$\lambda^1(\tau) = \lambda_{\tau}(\vartheta_{\tau}(\Gamma^1(\tau))), \quad \tau \in D^0 \setminus D^1, \quad (2.54)$$

и $\lambda^1(\tau) = 0$ при $\tau \in D^1$, получим, что

$$t = \int_0^t \chi_{\{[0,T] \setminus D^1\}}(\theta) \lambda^1(\theta) d\Gamma^1(\theta) = \int_0^t \lambda^1 d\Gamma_c^1.$$

Последний интеграл корректно определен как интеграл Лебега-Стилтьеса от измеримой функции по непрерывной мере $d\Gamma_c^1(t) = \chi_{\{[0,T] \setminus D^1\}}(t) d\Gamma^1(t)$. Отсюда следует равенство

$$dt = \lambda^1(t) d\Gamma_c^1(t). \quad (2.55)$$

Рассмотрим функцию $y^1(\cdot)$. Обратная замена времени $s = \Gamma^1(t)$ дает

$$y^1(\Gamma^1(t)) = x_0 + \int_0^{\Gamma^1(t)} \chi_{\{[0,s] \setminus \Omega^1\}}(s) \mathcal{F}(s) ds + \int_0^{\Gamma^1(t)} \chi_{\Omega^1}(s) \mathcal{F}(s) ds, \quad (2.56)$$

где $\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(z^1(s), \omega^1(s))$ — правая часть системы (0.5). Обозначим через $x_c^1(t)$ первый интеграл в (2.56). Преобразуя этот интеграл и принимая во внимание (2.52) и (2.53), получим

$$\begin{aligned}
x_c^1(t) &= \int_0^t \chi_{\{[0,T] \setminus (D^0 \cup D^1)\}}(\lambda^1 f(\theta, y^1(\Gamma^1), u(\xi^0(\Gamma^1)))) + \\
&+ (1 - \lambda^1) G(\theta, y^1(\Gamma^1)) l(\xi^0(\Gamma^1))) d\Gamma^1 \\
&+ \int_0^t \chi_{\{D^0 \setminus D^1\}}(\lambda^1 f(\theta, y^1(\Gamma^1), u_{\tau}(\vartheta_{\tau}(\Gamma^1)))) + \\
&+ (1 - \lambda^1) G(\theta, y^1(\Gamma^1)) l_{\tau}(\vartheta_{\tau}(\Gamma^1))) d\Gamma^1(\vartheta).
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй интеграл в (2.56):

$$x_d^1(t) = \int_0^{\Gamma^1(t)} \chi_{\Omega^1}(s) \mathcal{F}(z^1(s), \omega^1(s)) ds.$$

Поскольку множество Ω^1 представляет собой объединение непересекающихся интервалов Ω_τ^1 и $\alpha^1(s) = 0$ $\mathcal{L}$ -п.в. на Ω_τ^1 , то

$$x_d^1(t) = \sum_{\tau \in D^1, \tau \leq t} \int_{\Gamma^1(\tau-)}^{\Gamma^1(\tau)} G(\tau, y^1(s)) e^1(s) ds.$$

Как показано в [74], для каждого $\tau \in D^1$ справедливо $y^1(\Gamma^1(\tau)) = \varkappa_\tau(1)$, где $\varkappa_\tau(\cdot)$ есть решение на $[0, 1]$, предельной системы

$$\dot{\varkappa}(\vartheta) = G(\tau, \varkappa(\vartheta)) \nu_\tau, \quad \varkappa(0) = y^1(\Gamma^1(\tau-)).$$

Здесь $\nu_\tau = \int_{\Gamma^1(\tau-)}^{\Gamma^1(\tau)} e^1(s) ds$. Учитывая (2.52) и применяя замену (2.62), вычислим векторы

$$\nu_\tau = \int_{\Gamma^1(\tau-)}^{\Gamma^1(\tau)} e^1(s) ds = \int_{\Omega_\tau^1 \setminus \Omega^0} l(\xi^0(s)) ds + \sum_{\theta \in D^0} \int_{\Omega_\tau^1 \cap \Omega_\theta^0} l_\theta(\vartheta_\tau(s)) ds.$$

Определим функции $u^1(\cdot)$ и $l^1(\cdot)$ соотношениями вида

$$\begin{aligned} u^1(t) &= u(s_t), & t &\in [0, T] \setminus D^0, \\ u^1(\tau) &= u_\tau(\theta_\tau), & \tau &\in D^0, \\ l^1(t) &= l(s_t), & t &\in [0, T] \setminus (D^1 \cup D^0), \\ l^1(\tau) &= l_\tau(\theta_\tau), & \tau &\in D^0 \setminus D^1, \\ l^1(\tau) &= u_\tau / [\Gamma^1(\tau)], & \tau &\in D^1, \end{aligned} \tag{2.57}$$

где $u(\cdot)$, $u_\tau(\cdot)$ и $l(\cdot)$, $l_\tau(\cdot)$ задаются с помощью (2.51) и $s_t = \xi^0(\Gamma^1(t))$ — модифицированное преобразование времени, представляющее собой результат “варьирования” временных шкал и отвечающее в конечном итоге за изменение носителя управляющей меры. Значения $\theta_\tau = \vartheta_\tau(\Gamma^1(\tau))$ имеют аналогичный смысл, но соответствуют траекториям предельной системы. Тогда получим, что

$$x_c^1(t) = \int_0^t (\lambda^1 f(\theta, y^1(\Gamma^1), u^1) + (1 - \lambda^1) G(\theta, y^1(\Gamma^1)) l^1) d\Gamma_c^1(\theta).$$

Обозначим через $d\nu_c^1$ непрерывную векторную меру $(1 - \lambda^1(t)) l^1(t) d\Gamma_c^1(t)$. С учетом (2.55) имеем

$$d\nu_c^1(t) = l^1(t) (d\Gamma_c^1(t) - dt), \quad t \in [0, T]. \tag{2.58}$$

Рассмотрим функцию $\nu_d(\cdot)$: $\nu_d^1(t) = \sum \nu_\tau = \sum l^1(\tau)[\Gamma^1(\tau)]$, где суммирование ведется по $\tau \in D^1$, $\tau \leq t$. Она порождает дискретную векторную меру

$$d\nu_d^1(t) = \sum_{\tau \in D^1, \tau \leq t} l^1(\tau)[\Gamma^1(\tau)]\delta(t - \tau)dt = l^1(t)d\Gamma_d^1(t). \quad (2.59)$$

Определим меру $d\nu^1 = d\nu_c^1 + d\nu_d^1$. Из (2.58) и (2.59) заключаем, что

$$d\nu^1(t) = l^1(t)(d\Gamma^1(t) - dt), \quad t \in [0, T]. \quad (2.60)$$

Положим $x^1(t) = y^1(\Gamma^1(t))$, $t \in [0, T]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} x^1(t) = x_0 + \int_0^t f(\theta, x^1, u^1)d\theta + \int_0^t G(\theta, x^1)d\nu_c^1(\theta) + \\ + \sum_{\tau \in D^1, \tau \leq t} (\kappa_\tau(1) - x^1(\tau-)). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Последнее интегральное представление отвечает понятию решения [39] дифференциального уравнения с векторной мерой в случае выполнения условий корректности.

Подводя итог, сформулируем схему “градиентных” процедур улучшения импульсных управлений.

Алгоритм 2.2.2 Пусть $\sigma^0 \in \Sigma(P)$ — заданный начальный процесс.

1. *Сопряженная система*

Найдем решение $\phi(\cdot) = (\phi_\beta^t(\cdot), \phi^x(\cdot))$ системы дифференциальных уравнений с мерами (2.45).

2. *Построение нового управления*

а) *Вспомогательные управления.* Положим

$$\bar{\pi}_\beta(t) = \tilde{\pi}(t, x^0(t), \phi_\beta(t)), \quad \text{при всех } t \in [0, T],$$

где $\tilde{\pi}$ определяется формулами (2.41)–(2.43) или (2.44). Для каждого $\tau \in D^0 := \{\tau \in [0, T] : [\nu^0(\tau)] \neq 0\}$ и всех $\vartheta \in [0, 1]$ определим

$$\bar{\pi}_{\tau_\beta}(\vartheta) = (\bar{u}(\tau), \tilde{\lambda}(\tau, z_\tau^0(\vartheta), q_{\tau_\beta}(\vartheta), p_\tau(\vartheta)), \bar{l}(\tau)),$$

где функции $\kappa_\tau^0(\cdot)$ удовлетворяют на $[0, 1]$ предельной системе вида (2.46), а функции $p_\tau(\cdot)$ и $q_{\tau_\beta}(\cdot)$ — сопряженной предельной системе (2.47).

b) *Критерий остановки.* Рассмотрим неотрицательную величину

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma(\sigma^0; \beta) &= \int_0^T \langle H_\pi(t, x^0, \phi_\beta, \pi^0), \bar{\pi}_\beta - \pi^0 \rangle d\Gamma_c^0(t) + \\ &+ \sum_{\tau \in D^0} \frac{1}{[\Gamma^0(\tau)]} \int_0^1 \langle H_\pi(\tau, \varkappa_\tau^0, q_{\tau\beta}, p_\tau, \pi^0(\tau)), \bar{\pi}_{\tau\beta} - \pi^0(\tau) \rangle d\vartheta. \end{aligned}$$

Итеративный процесс заканчивается, если $\Delta_\sigma(\sigma^0) = \Delta_\sigma(\sigma^0; 0) = 0$.

c) *Управления варьирования.* При $\rho \in [0, 1]$ введем семейство $\{\pi(\cdot), \pi_\tau(\cdot)\}$ управлений варьирования

$$\begin{aligned} \pi_{\beta, \rho}(t) &= \pi^0(t) + \rho(\bar{\pi}_\beta(t) - \pi^0(t)), \quad t \in [0, T], \\ \pi_{\tau\beta, \rho}(\vartheta) &= \pi^0(\tau) + \rho(\bar{\pi}_{\tau\beta}(\vartheta) - \pi^0(\tau)) \quad \vartheta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

d) *Новое преобразование времени.* Пусть $\xi_{\beta, \rho}^1(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(s) &= \lambda_{\beta, \rho}(\xi^0(s)), \quad s \in [0, T + M] \setminus \Omega^0, \\ \dot{\xi}(s) &= \lambda_{\tau\beta, \rho}(\vartheta_\tau(s)), \quad s \in \Omega_\tau^0, \quad \xi(0) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\vartheta_\tau(s) := \frac{s - \Gamma^0(\tau-)}{[\Gamma^0(\tau)]}, \quad s \in \Omega_\tau^0 := [\Gamma^0(\tau-), \Gamma^0(\tau)],$$

и $\Omega^0 = \cup_{\tau \in D^0} \Omega_\tau^0$. Положим $\Gamma_{\beta, \rho}^1(t) = \inf\{s \in [0, T + M] : \xi_{\beta, \rho}^1(s) > t\}$, $t \in [0, T]$.

Величину $\beta(\rho)$ следует искать из условия

$$\Gamma_{\beta, \rho}^1(T) = T + M,$$

а параметр ρ подлежит определению из условия минимума целевого функционала.

e) *Улучшающее управление.* При найденных ρ и $\beta(\rho)$ определим функции $u^1(\cdot)$, $\lambda^1(\cdot)$ и $l^1(\cdot)$ соотношениями:

$$\begin{aligned} u^1(t) &= u(s_t), \quad t \in [0, T] \setminus D^0, \quad u^1(\tau) = u_\tau(\theta_\tau), \quad \tau \in D^0, \\ \lambda^1(t) &= \lambda(s_t), \quad l^1(t) = l(s_t), \quad t \in [0, T] \setminus (D^0 \cup D^1), \\ \lambda^1(\tau) &= \lambda_\tau(\theta_\tau), \quad l^1(\tau) = l_\tau(\theta_\tau), \quad \tau \in D^0 \setminus D^1, \\ \lambda^1(\tau) &= 0, \quad l^1(\tau) = \frac{\nu_\tau}{[\Gamma^1(\tau)]}, \quad \tau \in D^1. \end{aligned}$$

Здесь

$$\nu_\tau = \int_{\Omega_\tau^1 \setminus \Omega^0} l(\xi^0(s)) ds + \sum_{\theta \in D^0} \int_{\Omega_\tau^1 \cap \Omega_\theta^0} l_\theta(\vartheta_\tau(s)) ds,$$

$$D^0 = D_\nu^0, D^1 = D_\Gamma^1, \Omega_\tau^1 = [\Gamma^1(\tau-), \Gamma^1(\tau)], s_t = \xi^0(\Gamma^1(t)) \text{ и } \theta_\tau = \vartheta_\tau(\Gamma^1(\tau)).$$

Построим на отрезке $[0, T]$ векторную меру

$$d\nu^1(t) = l^1(t)(d\Gamma^1(t) - dt).$$

3. Новая траектория исходной системы

Найдем на отрезке $[0, T]$ решение $x^1(\cdot)$ фазового уравнения в (2.35) при управлениях $u^1(\cdot)$, $d\nu^1$. Обозначим через $\sigma^1 = (x^1(\cdot), u^1(\cdot), d\nu^1)$ новый управляемый процесс.

Если величина $\Delta_\sigma(\sigma^0)$ вида (2.48), (2.49) положительна, то, как будет показано ниже, управление $(u^1(\cdot), d\nu^1)$ является улучшающим.

Свойства метода: улучшение и сходимость

Условие $\Delta_\varsigma(\varsigma) = 0$, где величина Δ_ς определена в (2.38), (2.39), является критерием остановки алгоритма 2.2.1. Заметим, что это равенство означает выполнение дифференциального принципа максимума для управляемого процесса ς . Поскольку сама величина $\Delta_\varsigma(\varsigma)$ неотрицательна, ее можно рассматривать в качестве некоторой меры отклонения набора ς от условий дифференциального принципа максимума в задаче (RP) . Такую меру принято называть “невязкой дифференциального принципа максимума” на процессе ς . Ниже мы покажем, что величина $\Delta_\sigma(\sigma)$ вида (2.48), (2.49) в свою очередь характеризует меру отклонения от “обобщенного аналога линеаризованного принципа максимума” на процессе σ исходной задачи.

Лемма 2.2.1 Пусть $\sigma^0 = (x^0(\cdot), u^0(\cdot), d\nu^0)$ — допустимый процесс задачи (P) , а $\varsigma^0 = (z^0(\cdot), \omega^0(\cdot))$ — соответствующий ему процесс задачи (RP) . Тогда имеет место равенство $\Delta_\sigma(\sigma^0) = \Delta_\varsigma(\varsigma^0)$, где величины Δ_ς и Δ_σ определены в (2.38), (2.39) и (2.48), (2.49).

Доказательство. Рассмотрим невязку $\Delta_\varsigma(\varsigma^0) = \int_{[0, T+M]} \gamma(s) ds$. Производя замену переменной под знаком интеграла Лебега-Стилтьеса, имеем

$$\Delta_\varsigma(\varsigma^0) = \int_0^{\Gamma^0(T)} \gamma(s) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \left(\max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle h_\omega(z^0, \psi, \omega^0), \omega - \omega^0 \rangle \right) \Big|_{s=\Gamma^0(t)} d\Gamma_c^0(t) + \\
&+ \sum_{\tau \in D^0} \int_{\Omega_\tau^0} \left(\max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle h_\omega(z^0, \psi, \omega^0), \omega - \omega^0 \rangle \right) ds,
\end{aligned}$$

где $\psi(\cdot) = (\phi^0(\cdot), \psi^0(\cdot))$ — решение сопряженной системы (2.37), соответствующее $z^0(\cdot)$. Из свойств замены времени и равенств

$$x^0(t) = y^0(\Gamma^0(t)), \quad \phi(t) = \psi(\Gamma^0(t)), \quad t \in [0, T], \quad (2.62)$$

немедленно следует, что

$$\begin{aligned}
&\left(\max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle h_\omega(z^0, \psi, \omega^0), \omega - \omega^0 \rangle \right) \Big|_{s=\Gamma^0(t)} = \\
&= \langle H_\pi(t, x^0, \phi_\beta, \pi^0), \bar{\pi}_\beta - \pi^0 \rangle = \zeta(t)
\end{aligned}$$

вдоль $[0, T]$. На каждом отрезке Ω_τ^0 сделаем замену переменной $s = s_\tau(\vartheta) = [\Gamma^0(\tau)]\vartheta + \Gamma^0(\tau-)$, $\vartheta \in [0, 1]$, тогда функции $\varkappa^0(\cdot) = y^0(s_\tau(\cdot))$, $q_\tau(\cdot) = \psi^\xi(s_\tau(\cdot))$ и $p_\tau(\cdot) = \psi^y(s_\tau(\cdot))$ удовлетворяют предельным системам (2.46), (2.47). Отметим, что $\alpha^0(s) = 0$ и $\xi^0(s) = \tau$ на Ω_τ^0 , и для каждого $\tau \in D^0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma^0(\tau-)}^{\Gamma^0(\tau)} \left(\max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle h_\omega(z^0, \psi, \omega^0), \omega - \omega^0 \rangle \right) ds = \\
&= [\Gamma^0(\tau)] \int_0^1 \langle H_\pi(\tau, \varkappa_\tau^0, q_{\tau_\beta}, p_\tau, \pi^0(\tau)), \bar{\pi}_{\tau_\beta} - \pi^0(\tau) \rangle d\vartheta.
\end{aligned}$$

Остается заметить, что под интегралом в последнем случае стоит $\zeta_\tau(\theta)$, и $[\Gamma^0(\tau)] = |[\nu^0(\tau)]|$. $\square$

Лемма 2.2.2 Пусть $\sigma^0 = (x^0(\cdot), u^0(\cdot), d\nu^0)$ — допустимый процесс задачи (P). Равенство $\Delta_\sigma(\sigma^0) = 0$ эквивалентно условиям обобщенного аналога линеаризованного принципа максимума [74]:

$$u^0(t) = \arg \max_{u \in U} \langle H_u^a(t, x^0(t), \phi(t), u^0(t)), u \rangle \quad \mathcal{L}\text{-н.в. на } [0, T], \quad (2.63)$$

$$l^0(t) = \arg \max_{l \in \partial B} H^s(t, x^0(t), \phi^x(t), l) \quad |d\nu^0|\text{-н.в. на } \text{supp}\{d\nu^0\}, \quad (2.64)$$

$$H^a \geq H^s \quad \mathcal{L}\text{-н.в. } [0, T] \setminus \text{supp}\{d\nu^0\}, \quad (2.65)$$

$$H^a \leq H^s \quad |d\nu^0|\text{-н.в. на } \text{supp}\{d\nu^0\}, \quad (2.66)$$

где функции H^a и H^s подсчитываются вдоль $(x^0(t), \phi(t), u^0(t), l^0(t))$, и при каждом $\tau \in D_\nu^0$ и всех $\vartheta \in [0, 1]$

$$H^a(\tau, \kappa_\tau^0(\vartheta), q_\tau(\vartheta), p_\tau(\vartheta), u^0(\tau)) \leq H^s(\tau, \kappa_\tau^0(\vartheta), p_\tau(\vartheta), l^0(\tau)). \quad (2.67)$$

Здесь $l^0(\cdot)$ — плотность меры $d\nu^0$, $\phi(\cdot) = (\phi^t(\cdot), \phi^x(\cdot))$ есть решение на $[0, T]$ сопряженной системы (2.45), при каждом $\tau \in D_\nu^0$ функция $\kappa_\tau^0(\cdot)$ удовлетворяет предельной системе (2.46), а $p_\tau(\cdot)$ и $q_\tau(\cdot)$ — сопряженной предельной системе (2.47).

Доказательство. Пусть $t \in [0, T] \setminus \text{supp}\{d\nu^0\}$, тогда $\dot{\Gamma}^0(t) = 1$, и

$$\lambda^0(t) = \dot{\xi}^0(\Gamma^0(t)) = \frac{1}{\dot{\Gamma}^0(t)} = 1$$

$\mathcal{L}$ -п.в. на этом множестве.

Предположим, что $t \in \text{supp}\{d\nu_c^0\}$. В силу свойств замены времени имеем

$$\begin{aligned} t = \xi^0(\Gamma^0(t)) &= \int_0^{\Gamma^0(t)} \alpha^0(s) ds = \\ &= \int_0^t \alpha^0(\Gamma^0(\theta)) d\Gamma_c^0(\theta) + \sum_{\tau \in D^0} \int_{\Omega_\tau^0} \alpha^0(s) ds, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где $d\Gamma_c^0$ — непрерывная компонента разложения Лебега меры $d\Gamma^0$, функция $\alpha^0(s) = \dot{\xi}^0(s)$ предполагается определенной всюду на $[0, S]$. Поскольку $\alpha^0(s) = 0$ на Ω_τ^0 для каждого $\tau \in D^0$ и т.к. $\lambda^0(t) = \alpha^0(\Gamma^0(t))$ при всех $t \in [0, T]$, из (2.68) получим

$$t = \int_0^t \lambda^0(\vartheta) d\Gamma_c^0(\vartheta).$$

Дифференцируя последнее равенство, имеем $dt = \lambda^0(t) d\Gamma_c^0(t)$, и, следовательно,

$$d\nu_c^0(t) = l^0(t) |d\nu_c^0(t)| = l^0(t) (d\Gamma_c^0(t) - dt) = (1 - \lambda^0(t)) l^0(t) d\Gamma_c^0(t).$$

Последнее означает, что $\lambda^0(t) \in [0, 1]$ $|d\nu_c^0|$ -п.в. вдоль носителя меры $d\nu_c^0$.

Пусть $t = \tau \in D^0$. Как было отмечено выше, $\alpha^0(s) = 0$ при $s \in \Omega_\tau^0$. Это равенство мы считаем выполненным всюду на Ω_τ^0 и, в частности, в точке $s = \Gamma^0(\tau)$, т.е. $\lambda^0(\tau) = \alpha^0(\Gamma^0(\tau)) = 0$.

Рассмотрим величину (2.48), (2.49):

$$\Delta_\sigma(\sigma^0) = \int_0^T \zeta(t) d\Gamma_c^0(t) + \sum_{\tau \in D^0} |[\nu^0(\tau)]| \int_0^1 \zeta_\tau(\vartheta) d\vartheta.$$

Все слагаемые в этой сумме неотрицательны, так как представляют собой интегралы от неотрицательных функций по неотрицательным мерам. Поэтому равенство $\Delta_\sigma(\sigma^0) = 0$ эквивалентно условиям:

$$\zeta(t) = 0 \quad d\Gamma_c^0\text{-п.в. на } [0, T], \text{ и}$$

$$\zeta_\tau(\vartheta) = 0 \quad \mathcal{L}\text{-п.в. на } [0, 1] \text{ для каждого } \tau \in D^0,$$

или, что то же

$$\pi^0(t) = \bar{\pi}(t) \text{ п.в. на } [0, T] \text{ по мере } d\Gamma_c^0, \text{ и} \quad (2.69)$$

$$\text{при всех } \tau \in D^0 \quad (u^0(\tau), 0, l^0(\tau)) = \bar{\pi}_\tau(\vartheta) \quad \mathcal{L}\text{-п.в. на } [0, 1]. \quad (2.70)$$

Поскольку по определению $d\Gamma^0$ есть сумма мер Лебега и $|d\nu^0|$, выполнение соотношения (2.69) почти всюду по мере $d\Gamma_c^0$ равносильно его выполнению почти всюду как по мере Лебега, так и по мере $|d\nu_c^0|$. Тогда

$$u^0(t) = \bar{u}(t), \quad l^0(t) = \bar{l}(t) \quad \mathcal{L}, |d\nu_c^0|\text{-п.в. на } [0, T]. \quad (2.71)$$

Далее,

$$\lambda^0(t) = \bar{\lambda}(t) \begin{cases} = 1, & H^a > H^s, \\ = 0, & H^a < H^s, \\ \in [0, 1], & H^a = H^s, \end{cases}$$

где значения функций Понтрягина подсчитаны вдоль $(x^0, \phi^t, \phi^x, u^0, l^0)$. Как установлено выше, $\lambda^0(t) = 1$ на $[0, T] \setminus \text{supp}\{d\nu^0\}$ и $\lambda^0(t) \in [0, 1]$ вдоль $\text{supp}\{d\nu^0\}$, что равносильно (2.65) и (2.66).

Рассмотрим условие (2.70). В силу определения функций $\bar{u}_\tau$ и $\bar{l}_\tau$, равенство (2.70) означает, что $\bar{u}(\tau) = u^0(\tau)$ и $\bar{l}(\tau) = l^0(\tau)$ при всех $\tau \in D_\nu^0$. Комбинируя с (2.71), получим, что $u^0(t) = \bar{u}(t)$ и $l^0(t) = \bar{l}(t)$ $\mathcal{L}, |d\nu^0|$ -п.в. на $[0, T]$, что эквивалентно соотношениям (2.63) и (2.64). При $\tau \in D^0$ имеем $\bar{\lambda}_\tau(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [0, 1]$, и это равносильно неравенству (2.67). $\square$

Теорема 2.2.1 (об улучшении) Пусть $\sigma^0 = (x^0(\cdot), u^0(\cdot), d\nu^0)$ — допустимый процесс задачи (P) , не удовлетворяющий условиям обобщенного дифференциального принципа максимума. Тогда алгоритм 2.2.2 определяет допустимый в задаче (P) процесс $\sigma^1 = (x^1(\cdot), u^1(\cdot), d\nu^1)$ со свойством улучшения: $I(\sigma^1) < I(\sigma^0)$.

Доказательство. Из соотношений (2.62) и равенства $x^1(t) = y^1(\Gamma^1(t))$, $t \in [0, T]$, вытекает, что $\Delta I = F(x^1(T)) - F(x^0(T)) = F(y^1(T + M)) - F(y^0(T + M)) = \Delta J$. Другими словами, улучшение в задаче (P) имеет место одновременно с улучшением в редуцированной задаче. Согласно лемме 2.2.1 критерием остановки итеративного процесса алгоритма улучшения обобщенного управления служит равенство $\Delta_\sigma(\sigma^0) = 0$, что в силу леммы 2.2.2 эквивалентно условиям обобщенного дифференциального принципа максимума для управления $(u^0(\cdot), d\nu^0)$. $\square$

Если наряду с (H_{18}) выполнены условия

(H_{19}) производные ∇F , $\frac{\partial}{\partial t}f$, $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial}{\partial t}G$, $\frac{\partial}{\partial x}G$ удовлетворяют условию Липшица по своим переменным в любой замкнутой области их изменения,

то легко установить сходимость нашего метода. В самом деле, в предположениях (H_{15}) и (H_{19}) алгоритм 2.2.1 сходится по невязке линеаризованного принципа максимума. Тогда из леммы 2.2.1 немедленно следует

Теорема 2.2.2 (о сходимости) *Если σ^k , $k = 0, 1, \dots$, — последовательность допустимых управляемых процессов задачи (P) , генерируемая алгоритмом 2.2.2, тогда $\Delta_\sigma(\sigma^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.*

В итоге сформулированы методы улучшения в исходной задаче (P) , в основе которых лежат процедуры, соответственно, условного градиента и проекции градиента. Сделаем несколько замечаний относительно расшифрованных алгоритмов улучшения.

► При решении редуцированной задачи улучшения могут возникать особые участки управлений $\alpha(\cdot)$ и $e(\cdot)$. Методы слабого варьирования (базовые алгоритмы) не улучшают управления $(\alpha(\cdot), e(\cdot))$, являющиеся особыми на всем отрезке $[0, S]$. Впрочем, импульсный процесс, отвечающий таким особым режимам в задаче (RP) , удовлетворяет соотношениям (2.64)–(2.67).

► Условие (2.63) дает линеаризованный принцип максимума для ограниченного управления $u(\cdot)$, и (2.65)–(2.67) в целом можно интерпретировать как соотношения линеаризованного принципа максимума в задаче (P) . Впрочем, при отсутствии ограниченного управления эти условия дают принцип максимума для импульсных управлений. “Технически” это связано со спецификой редуцированной задачи (“билинейность” редуцированной системы по (α, e)).

В [24] дана интерпретация метода [93] игольчатого варьирования управлений в терминах задачи импульсного управления. Применяемая

техника совершенно аналогична расшифровке алгоритмов слабого варьирования. Для построенного алгоритма улучшения импульсных процессов установлены свойства улучшения и сходимости. Проведено сравнение полученных методов улучшения импульсного управления: в случае отсутствия ограниченного управления $u(\cdot)$ в задаче (P) базовые процедуры слабого и игольчатого варьирования порождают в исходной задаче улучшения итеративный процесс, который сходится к выполнению принципа максимума для импульсных управлений.

► Предположения корректности не являются существенными для применения описанной техники расшифровки, и ее распространение на общую постановку (P) не представляет принципиальных трудностей. Мы рассмотрели случай корректности лишь из соображений простоты.

Пример 2.2.1 На практике часто удобнее применять базовый метод улучшения в редуцированной задаче, расшифровывая в терминах задачи (P) лишь траектории и управления, полученные в итоге работы алгоритма. Однако, построенные нами методы могут применяться непосредственно, например, для анализа ситуаций, когда начальное управление-мера содержит сингулярную непрерывную компоненту.

Рассмотрим задачу максимизации функционала $I = x(1)$ при условиях

$$\begin{aligned} dx &= t d\mu, \quad x(0-) = 0, \quad t \in [0, 1], \\ \int_0^1 d\mu &\leq 1, \quad d\mu \geq 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

В силу (2.72) имеем

$$x(1) = \int_0^1 t d\mu(t) \leq \int_0^1 d\mu(t) \leq 1.$$

Проиллюстрируем этапы обобщенного аналога метода условного градиента. В качестве начального управления выберем сингулярную непрерывную меру, порожденную функцией $\mu^0(t) = \mathcal{C}(t)$, где $\mathcal{C}(t)$ — классическая функция Кантора. Тогда соответствующая опорная траектория имеет вид

$$x^0(t) = t\mathcal{C}(t) - \int_0^t \mathcal{C}(\theta) d\theta,$$

и $I^0 = 1 - \int_0^1 \mathcal{C}(t) dt = 1/2$. Запишем сопряженную систему

$$\dot{\phi}^x = 0, \quad \phi^x(1) = 1, \quad d\phi^t = -\phi^x d\mu^0, \quad \phi^t(1) = -\beta.$$

Ее решение: $\phi^x(t) \equiv 1$, $\phi^t(t) = \mu^0(1) - \mu^0(t) - \beta = 1 - \beta - \mathcal{C}(t)$. Функция $\Gamma^0(t) = t + \mathcal{C}(t)$ непрерывна и строго монотонно возрастает. Зафиксируем значение параметра варьирования $\rho = 1$ (максимальная глубина спуска) и построим управление

$$\lambda(t) \begin{cases} = 1, & \Gamma^0(t) < 1 + \beta, \\ = 0, & \Gamma^0(t) > 1 + \beta, \\ \in [0, 1], & \Gamma^0(t) = 1 + \beta. \end{cases} \quad (2.73)$$

Т.к функция $\Gamma^0(\cdot)$ *строго* монотонна, для нее существует обратная $\xi^0(\cdot)$. Следовательно,

$$\lambda(\xi^0(s)) \begin{cases} = 1, & s < 1 + \beta, \\ = 0, & s > 1 + \beta, \\ \in [0, 1], & s = 1 + \beta. \end{cases} \quad (2.74)$$

Обозначим $\bar{s} = \bar{s}(\beta) = 1 + \beta$. Решая задачу Коши $\dot{\xi}(s) = \lambda(\xi^0(s))$, $\xi(0) = 0$, найдем функцию ξ^1 : $\xi^1(s) = s$, $s \in [0, \bar{s})$, $\xi^1(s) = \bar{s}$, $s \in [\bar{s}, 2]$. Определим параметр β и момент времени $\bar{s}$ из терминального условия $1 = \xi^1(2) = \bar{s} = 1 + \beta$. Получим, что $\beta = 0$, $\bar{s} = 1$. Окончательно, $\xi^1(s) = s$, $s \in [0, 1)$ и $\xi^1(s) = 1$, $s \in [1, 2]$. Теперь мы можем построить новое обратное преобразование времени

$$\Gamma^1(t) = t, \quad t \in [0, 1), \quad \Gamma^1(t) = 2, \quad t = 1.$$

Определим функцию $\lambda^1(t) = \lambda(\xi^0(\Gamma^1(t)))$, то есть $\lambda^1(t) = 1$, $t \in [0, 1)$, $\lambda^1(t) = 0$, $t = 1$. Аналогично найдем управление $l^1(t) \equiv 1$. В итоге, новые управляющая мера и траектория имеют вид

$$d\mu^1(t) = l^1(t)(d\Gamma^1(t) - dt) = \delta(t - 1)dt,$$

$$x^1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1), \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

На полученном процессе достигается верхняя грань значений целевого функционала: $I^1 = 1$.

Глава 3

Численный анализ модельных и прикладных задач

В данной главе приводятся примеры моделей, возникающих в реальных практических приложениях и допускающих естественное описание в рамках концепции ИГС (что служит дополнительной мотивацией работы). Решен ряд тестовых и прикладных задач оптимального управления. Показано, что подход к решению задачи улучшения, использующий разрывную замену времени, успешно работает в различных классах задач оптимального импульсного управления.

3.1 Решение тестовых примеров

Сначала рассмотрим простейший случай — робастные ДНС (см. § 2.1). Для тестирования методов улучшения была разработана программная реализация процедуры 2.1.1 и проведен вычислительный эксперимент. В качестве базового мы применяли алгоритм проекции градиента. Программа реализована в среде Visual Basic 6.0.

3.1.1 Базовый алгоритм улучшения

Заметим, что ограничения на агрегированный управляющий вектор $\omega = (\alpha, e)$ в задаче (2.17)–(2.20) имеют относительно простой вид, а именно они определяют цилиндр $\Pi = [0, 1] \times \{e : \|e\| \leq 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$, и имеется простое аналитическое представление для проекции $P_\Pi(\omega)$ точки $\omega = (\alpha, e) \in \mathbb{R}^m$ на множество Π . Следующая процедура основана на модификации метода проекции градиента [93].

Алгоритм 3.1.1 Пусть задан начальный процесс $\varrho^0 = (z^0, \omega^0)$.

1. Найдем решение $(\phi^0(s, \beta), \psi^0(s))$, $s \in [0, \tilde{S}]$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial y} h(z^0, \phi, \psi, \omega^0), \quad \psi(\tilde{S}) = -\nabla F(y^0(\tilde{S})), \quad (3.1)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial}{\partial \xi} h(z^0, \phi, \psi, \omega^0), \quad \phi(\tilde{S}) = -\beta, \quad (3.2)$$

где функция Понтрягина имеет вид

$$h(z, e, \alpha, \phi, \psi) = \langle \psi, \alpha f(z) + (1 - \alpha)B(z)e \rangle + \alpha \phi.$$

2. Зафиксируем $p \in [0, 1]$ и определим

$$\bar{\omega}(s, \beta) = P_{\Pi} \left(\omega^0 + p \frac{\partial}{\partial \omega} h(z^0, \phi^0, \psi^0, \omega^0) \right). \quad (3.3)$$

Здесь $P_{\Pi}(\omega)$ означает проекцию точки ω на множество Π .

3. Интегрируя редуцированную систему (2.18)–(2.20) при управлении $\bar{\omega}$, определим функции $\bar{\xi}(s, \beta)$, $\bar{y}(s, \beta)$.
4. Применяя процедуру однопараметрического поиска, найдем параметр $\bar{\beta}$, удовлетворяющий ограничению

$$\bar{\xi}(\tilde{S}, \bar{\beta}) = T. \quad (3.4)$$

5. Определим функции $\xi(s)$, $y(s)$, интегрируя редуцированную систему при управлении $\omega(s) = \omega(s, \bar{\beta})$.

Параметр p следует выбирать так, чтобы скорость спуска по функционалу была максимальной.

3.1.2 Вычислительный эксперимент

В ходе вычислительного эксперимента был решен ряд примеров с линейными автономными системами и линейными функционалами, в которых существуют решения в классе чисто импульсных управлений.

Введение нелинейного функционала в задачу с линейными автономными системами показало, что решение в таких задачах может существовать как в исходном классе чисто импульсных управлений, так и в обобщенном смысле. В последнем случае решение описывается дифференциальным уравнением в мерах, удастся построить последовательность траекторий дискретно-непрерывной системы, сходящуюся к обобщенной траектории

в точках непрерывности. Были рассмотрены также задачи с нелинейными системами. Решались примеры как с дискретной динамикой простейшего вида (с постоянной матрицей G), так и в случае, когда состояние системы в момент скачка зависит от этого момента и от предыдущего состояния системы (до скачка).

Ниже приводятся результаты тестовых расчетов, которые показались нам наиболее интересными.

Пример 1. Рассмотрим задачу оптимального управления ДНС

$$\begin{aligned} x_2^2(1) &\rightarrow \inf, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad x_1(0-) = 0, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 5x_2, \quad x_2(0-) = 2 \\ [x_1(\tau_i)] &= 1/4(\nu_{1i} - \nu_{2i}), \\ [x_2(\tau_i)] &= 4(\nu_{1i} + \nu_{2i}), \\ t &\in [0, 1], \quad \sum \|\nu_i\|_2 \leq 1. \end{aligned}$$

При начальном приближении $\mathfrak{J}^0 = (\tau^0, w^0) = (0, (0, 0))$ (т.е. при отсутствии импульсных воздействий) на второй итерации было получено решение задачи, а именно, найдено оптимальное чисто импульсное управление. Начальная траектория имеет вид:

$$x_1^0(t) = e^{-t} \sin 2t, \quad x_2^0(t) = e^{-t}(2 \cos 2t - \sin 2t), \quad t \in [0, 1].$$

Итеративный процесс представлен ниже:

$$\mathfrak{J}^1 = \{\tau^1, \nu^1\} = \{1, (0.1381, 0.1218)\},$$

$$\mathfrak{J}^2 = \{\tau^2, \nu^2\} = \{1, (0.1582, 0.1396)\},$$

№	$I(\varrho)$	$J(\sigma)$
0	0.41048	0.41048
1	$5.9238 \cdot 10^{-3}$	$4.7114 \cdot 10^{-3}$
2	$5.1334 \cdot 10^{-7}$	$3.7357 \cdot 10^{-6}$

На Рис. 3.1 изображены траектории исходной дискретно-непрерывной системы. Оптимальная траектория имеет один скачок в конечный момент времени. Ресурс управления израсходован не полностью.

Выберем другое начальное управление: $\mathfrak{J}^0 = (0, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2))$.

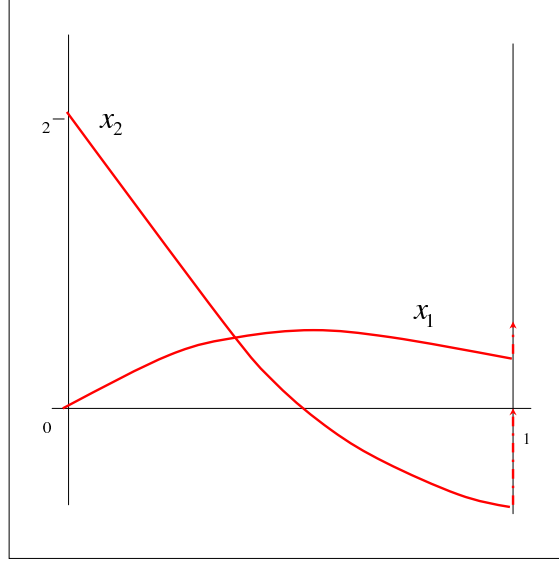


Рис. 3.1: Пример 1. Траектории исходной системы при $\mathfrak{J}^0 = (0, (0, 0))$

На второй итерации был найден процесс, на котором с заданной точностью достигается минимум функционала (см. Рис. 3.3). Соответствующие управления и траектории редуцированной задачи отмечены на Рис. 3.4 красным цветом.

Применяя обратную замену времени к найденной траектории редуцированной системы, мы получили непрерывную функцию, которая не удовлетворяет исходной системе, но является ее обобщенным решением. В результате аппроксимации траектории редуцированной системы репараметризованными траекториями, соответствующими чисто импульсным управлениям и обратной замены времени мы строим последовательность траекторий дискретно-непрерывной системы, сходящуюся к обобщенному решению (Рис. 3.5).

Пример 2. Требуется решить задачу

$$\begin{aligned}
 I &= x_1^2(1) + x_2^2(1) \rightarrow \inf, \\
 \dot{x}_1 &= t(x_1 + x_2), \quad x_1(0-) = 2/3, \\
 \dot{x}_2 &= \sin x_1 + t, \quad x_2(0-) = 1/2 \\
 x_1(\tau_i) &= e^{\nu_2}(x_1(\tau_i-) \cos \nu_2 + x_2(\tau_i-) \sin \nu_1), \\
 x_2(\tau_i) &= e^{\nu_2}(-x_1(\tau_i-) \sin \nu_1 + x_2(\tau_i-) \cos \nu_2), \\
 t &\in [0, 1], \quad \sum \|\nu_i\|_2 \leq 2.3.
 \end{aligned}$$

При начальном приближении $\mathfrak{J}^0 = (\tau^0, \nu^0) = (1/6, 1/2)$ на второй ите-

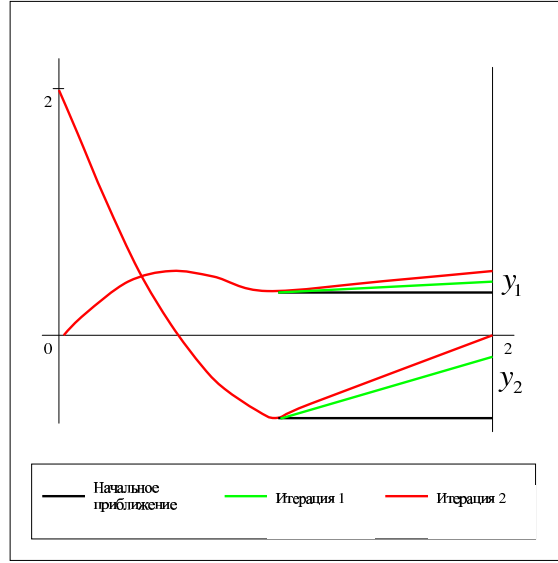


Рис. 3.2: Пример 1. Траектории редуцированной системы при $\mathfrak{J}^0 = (0, (0, 0))$

рации было найдено квазиоптимальное чисто импульсное управление, доставляющее с заданной точностью абсолютный минимум $I = 0$ целевому функционалу. Итеративный процесс в исходной и редуцированной задачах представлен на Рис. 3.6 и 3.7. Оптимальная траектория дискретно-непрерывной системы выделена на Рис. 3.6 красным цветом. Она испытывает скачок в начальный момент времени, после чего остается непрерывной.

Пример 3. Рассмотрим следующую модель

$$\begin{aligned}
 x^2(1/3) &\rightarrow \inf, \\
 \dot{x} &= x^2, \quad x(0-) = 1, \\
 x(\tau_i) &= x(\tau_i-)e^{\nu_i}, \\
 t &\in [0, 1/3], \quad \sum \|\nu_i\|_2 \leq 4.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь непрерывная динамика нелинейна. Функция, описывающая скачки траектории, зависит от переменной состояния. На интервалах непрерывной динамики траектория системы есть функция возрастающая.

При начальном импульсном управлении $\mathfrak{J}^0 = (1/3, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2))$ на четвертой итерации было получено решение редуцированной задачи. Итеративный процесс представлен в таблице:

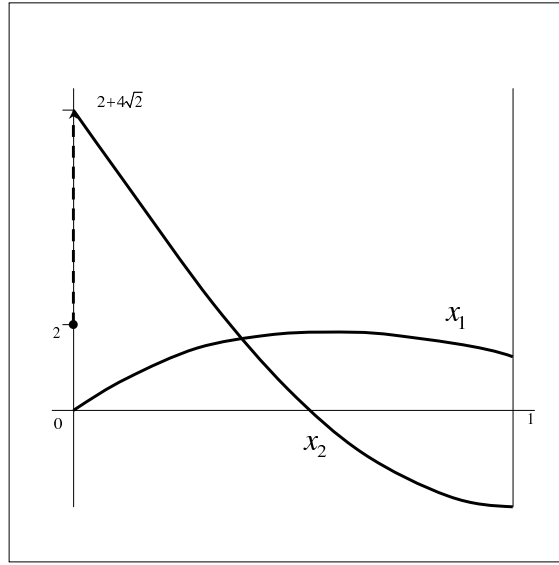


Рис. 3.3: Пример 1. Опорные траектории в исходной задаче при $\mathfrak{I}^0 = (0, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2))$

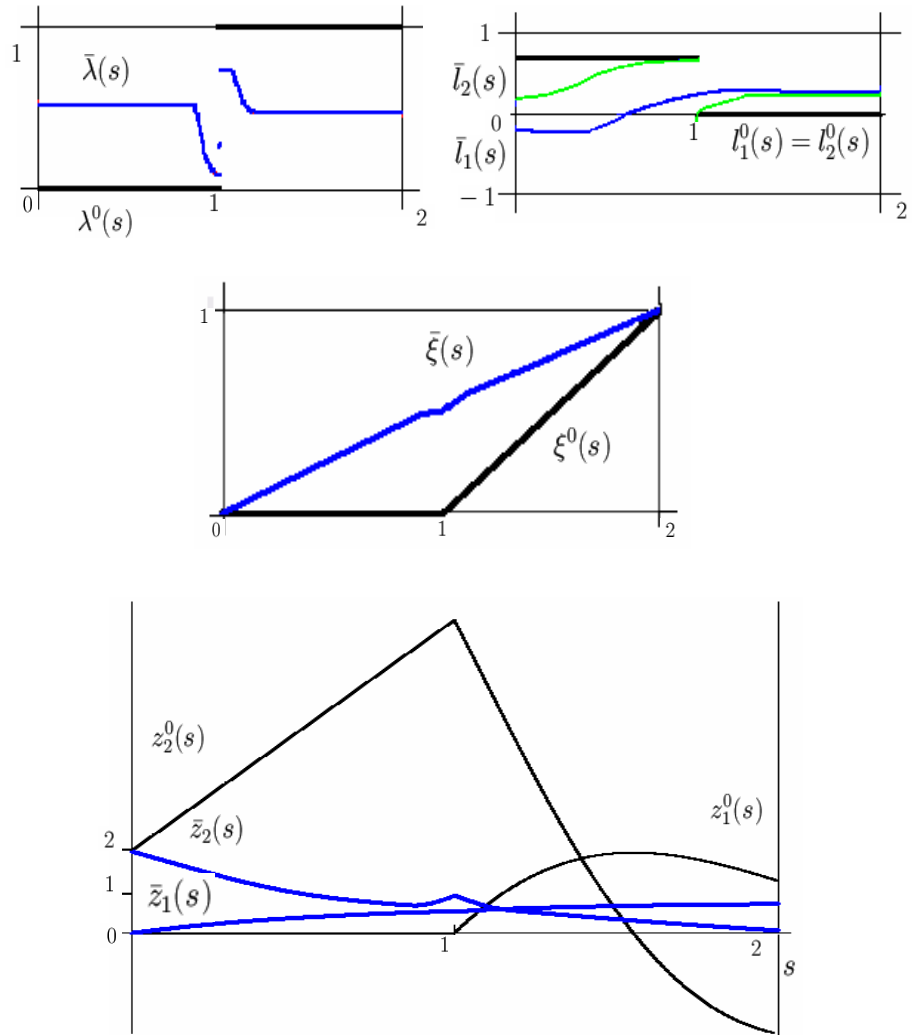


Рис. 3.4: Пример 1. Итеративный процесс в редуцированной задаче при $\mathfrak{I}^0 = (0, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2))$

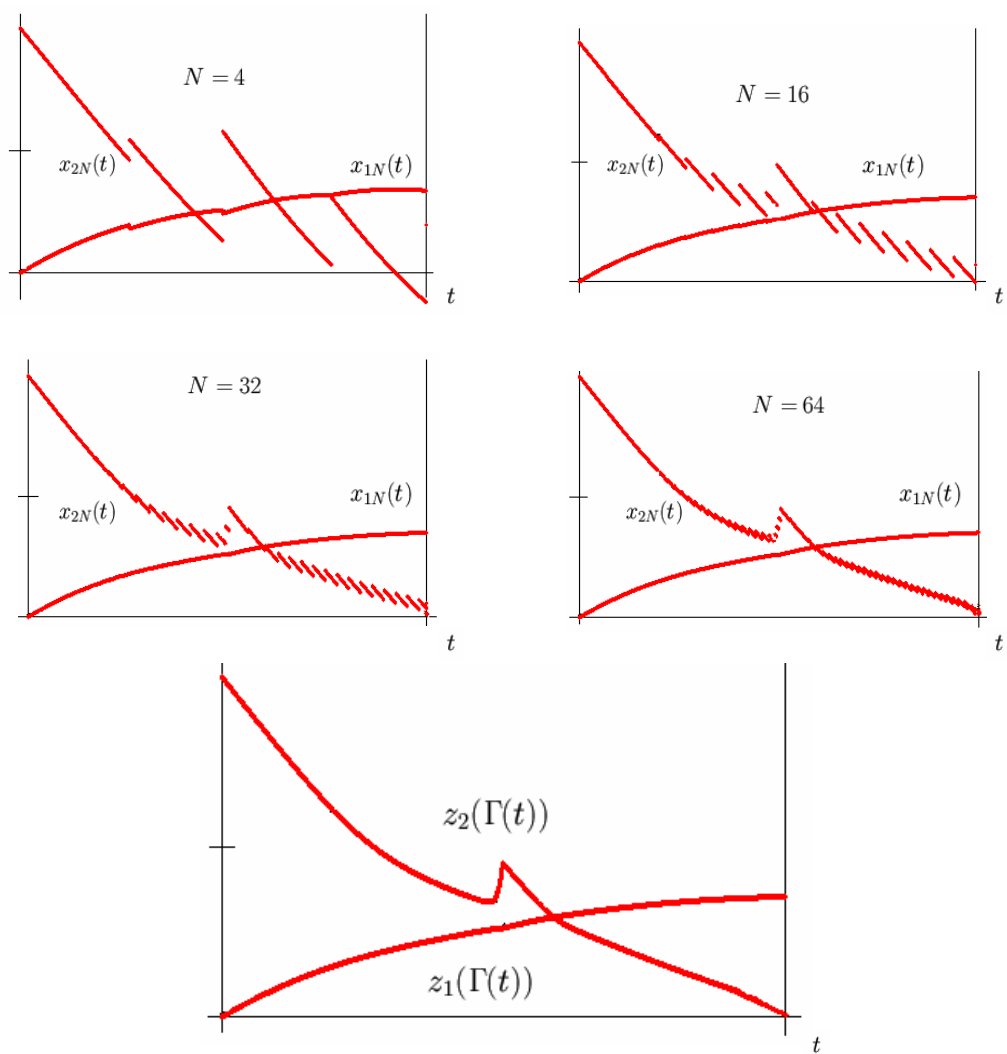


Рис. 3.5: Пример 1. Обобщенное решение ДНС и его аппроксимация

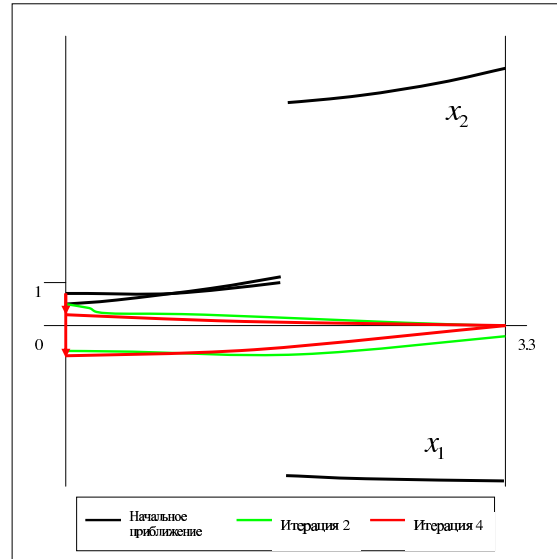


Рис. 3.6: Пример 2. Итеративный процесс в исходной задаче

№	$I(\varrho)$	$J(\sigma)$
0	8.71108	8.71108
1	$1.46428 \cdot 10^{-3}$	$1.19967 \cdot 10^{-3}$
2	$5.1334 \cdot 10^{-4}$	$6.47555 \cdot 10^{-4}$
4	$3.4967 \cdot 10^{-4}$	$3.5271 \cdot 10^{-4}$

На Рис. 3.8 представлены траектории ДНС по итерациям. Прослеживается следующая тенденция: моменты приложения импульсов накапливаются и смещаются в направлении к начальному моменту времени. В итоге получаем траекторию, которая испытывает скачок в начальный момент времени, после чего это есть непрерывная убывающая функция (выделена на графиках красным цветом). Такая функция не может быть траекторией ДНС (т.к. она непрерывна на $[0, 1/3]$ и убывает, а решение задачи Коши (3.5) — функция неубывающая), а значит она является ее обобщенным решением, и в ее описании существенное участие должна принимать непрерывная компонента соответствующей меры. Данное обобщенное решение может быть аппроксимировано последовательностью решений ДНС.

3.1.3 Замечания

Отметим некоторые “вычислительные” особенности. Применяемый для решения редуцированной задачи метод проекции градиента потребовал определенных модификаций. В алгоритме присутствуют два параметра. Требование эффективности делает необходимым внедрение в структуру алгоритма процедуры параметрического поиска (вообще говоря, по двум

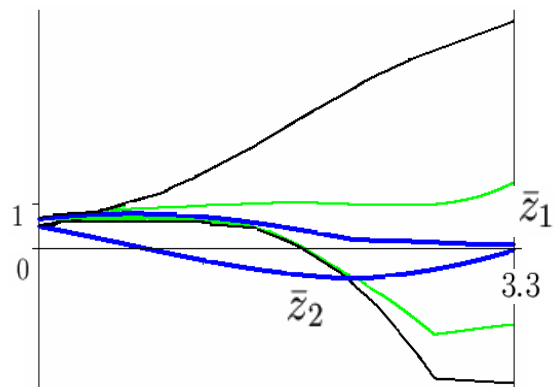
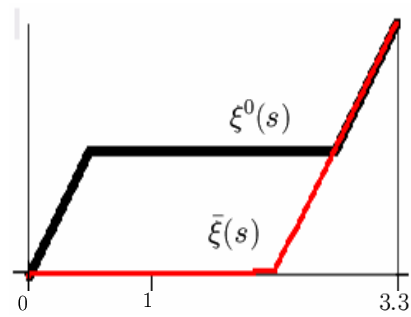
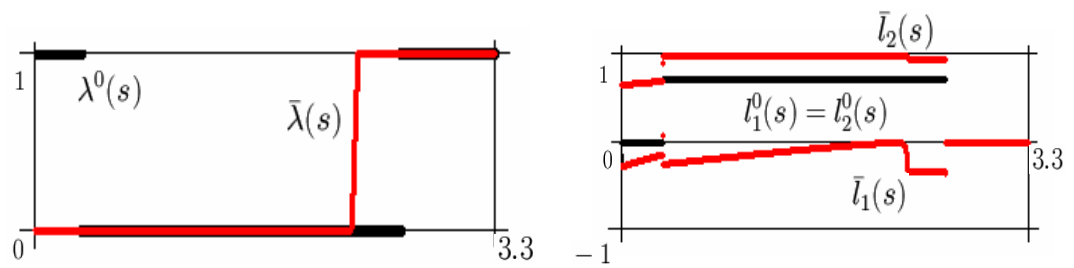


Рис. 3.7: Пример 2. Итеративный процесс в редуцированной задаче

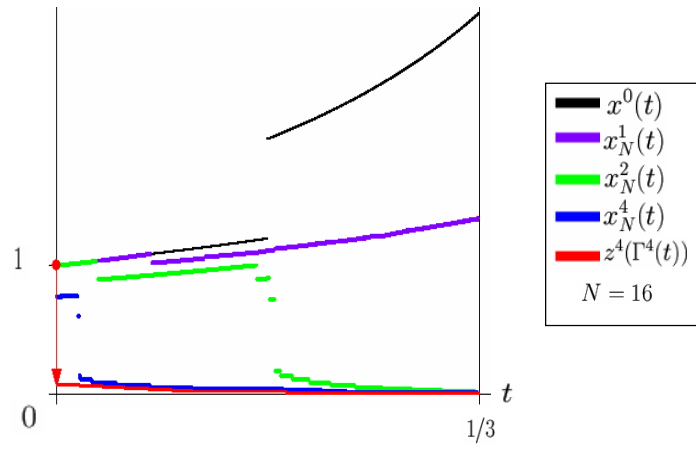


Рис. 3.8: Пример 3. Итеративный процесс в исходной задаче

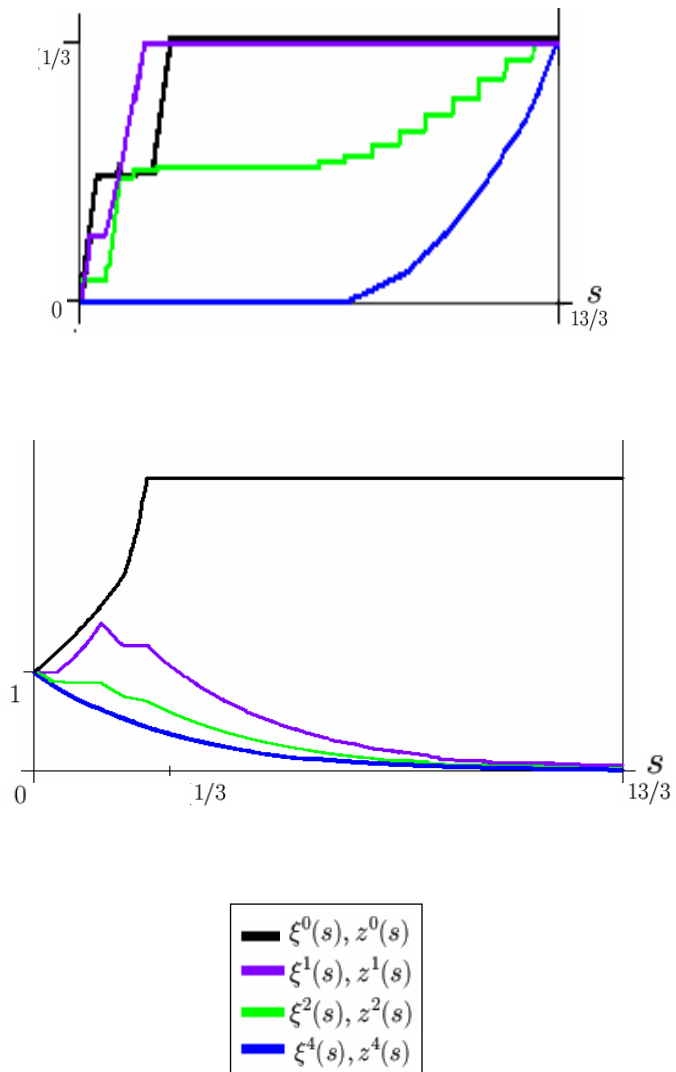


Рис. 3.9: Пример 3. Итеративный процесс в редуцированной задаче

параметрам). Однако, указанные параметры играют в процедуре принципиально различные роли. Первый, $p \in [0, 1]$, определяет глубину “спуска”, т.е. является по своей природе параметром настройки и отвечает за эффективность процедуры. Другой параметр, $\beta \in \mathbb{R}$, есть, по-сути, множитель Лагранжа и определяется из условия согласования временных шкал $\xi(S, \beta) = T$. Поиск параметра β связан с определенными трудностями. Первая трудность заключается в том, что область изменения параметра неограничена. Для решения этой проблемы обычно применяются эмпирические схемы. В нашем случае ситуация отягощается тем, что функция $|\xi(S, \cdot) - T|$, вообще говоря, не является монотонной. В разработанной программе на предварительном этапе установления границ области изменения параметра β применяется модификация эмпирического метода Свенна. В дальнейшем, для уточнения границ интервала применяется метод дихотомии золотого сечения.

3.2 Прикладные задачи

В данном параграфе мы рассмотрим модели, наполненные определенным прикладным содержанием. Первая из них относится к математической теории биологических систем, а поставленные в рамках этой модели оптимизационные задачи можно рассматривать как задачи эколого-экономического планирования. Другие две относятся к популярному направлению в робототехнике и связаны с управлением перемещениями манипуляторов. Отметим, что все рассматриваемые нам модели подчерпнуты из современных источников и являются неклассическими, что делает их исследование актуальной задачей.

Подчеркнем, что акцент в нашем исследовании ставится именно на численный анализ с привлечением методов и подходов, развитых в предшествующих главах диссертации.

3.2.1 Оптимальное импульсное управление популяцией паразитических организмов

Рассмотрим задачу управления популяцией паразитических организмов с помощью их естественных врагов (англ. “pest management problem”). Предполагается, что популяционная динамика отвечает следующей моде-

ли типа Лотки–Вольтерра

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2)dt + c_1 d\mu, & x_1(0-) &= x_1^0, \\ dx_2 &= x_2(b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2)dt + c_2 d\mu, & x_2(0-) &= x_2^0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $x = (x_1, x_2)$ — численности популяций соответственно жертвы и хищника, $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ — численности в начале периода управления, $a_{12}(t) < 0$, $a_{21}(t) > 0$ — коэффициенты, описывающие взаимодействие между видами, $a_{ii}(t) < 0$ — коэффициенты самоотравления соответствующих популяций, $b = (b_1(t), b_2(t))$ — коэффициенты рождаемости/смертности и $c = (c_1, c_2)$. Период управления есть отрезок $[0, T]$.

Активные исследования импульсных популяционных моделей начаты относительно недавно и инспирированы новыми биологическими технологиями, применяемыми в современном сельском хозяйстве. В последнее время такие задачи формируют популярное направление в области математической теории биологических и экологических систем [132, 137, 159, 191]. Подобные модели возникают также при исследовании задач эпидемиологического контроля [193], когда массовая вакцинация населения в короткие сроки изменяет процесс развития эпидемии и приводит к почти скачкообразному изменению скорости распространения заболевания.

Естественным критерием качества управления в моделях типа (3.6) представляется компромисс между суммарным ущербом, который популяция вредителей причиняет в течение всего периода управления, и расходами на мероприятия по борьбе с ними (разведение и распространение особей полезного вида):

$$I = q_1 \int_0^T x_1(t)dt + q_2 \mu(T) \rightarrow \min. \quad (3.7)$$

Здесь весовые коэффициенты $q_i > 0$ имеют смысл соответствующих ценовых характеристик.

Задача 1. Сначала рассмотрим модель без дополнительных ограничений, полагая кроме того $c = (0, 1)$ (т.е. управление популяцией x_1 осуществляется только “через” численность x_2). Похожая задача решалась в [137], где пополнение популяции хищников производилось (по постановке) чистыми импульсами в заданные моменты времени — раз в десять дней, — а в качестве управления выступало количество особей, вносимое в экосистему в каждый из таких моментов. Для исследования задачи в [137] применялся принцип максимума, а поиск численного решения производился в рамках “дискретной схемы динамической оптимизации”, подобной [132].

Обратимся к нашей задаче. Интуитивно понятно, что оптимальное управление не должно иметь импульс в последний момент времени, т.к. в этом случае популяция жертв (которой отвечает абсолютно непрерывная траектория) не успевает отреагировать на повышение численности хищников. На самом деле можно утверждать, что оптимальная управляющая мера $d\mu^*$ не сосредоточена в некоторой окрестности момента времени T , другими словами, найдется момент $\theta \in [0, T)$ такой, что $d\mu^*([\theta, T]) = 0$. Это следует из принципа максимума [39], который в нашем случае предполагает выполнение неравенства

$$\psi_2(t) \geq \lambda_0 q_2 \quad d\mu^*\text{-п.в.},$$

где $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ есть множитель Лагранжа, отвечающий целевому функционалу, а $\psi_2(\cdot)$ удовлетворяет сопряженной системе

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -a_{11}x_1\psi_1 - a_{21}x_2\psi_2 - \lambda_0 q_1, \quad \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -a_{12}x_1\psi_1 - (a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + b_2)\psi_2, \quad \psi_2(T) = 0. \end{aligned}$$

В силу непрерывности функции $\psi_2(\cdot)$ и условий трансверсальности (из них, кстати, следует, что $\lambda_0 = 1$, т.е. все экстремали в задаче нормальны, в противном случае набор множителей Лагранжа будет тривиальным, т.к. при $\lambda_0 = 0$ сопряженная система становится однородной и имеет нулевое решение) при любом значении $q_2 > 0$ имеет место $\psi_2 < q_2$ в некоторой окрестности T . Причем, естественно, эта окрестность тем шире, чем больше цена q_2 . Это означает, что после некоторого момента времени $\theta < T$ искусственное пополнение популяции x_2 не рентабельно.

Численное исследование проводилось для следующего набора входных данных

$$A := \{a_{ij}\}_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} -0.001 & -0.02 \\ 0.0029 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = (0.16, -0.19),$$

идентифицированных для популяции гусениц *Anticarsia gematalis*, паразитирующих на сельскохозяйственной культуре сои [132]. Естественными врагами (хищниками) выступают осы. При данных значениях параметров система (3.6) имеет устойчивое положение равновесия

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \approx (65.5172, 4.7241)$$

(особей на единицу площади). Однако, с экономической точки зрения уровень $\bar{x}_1$ является недопустимым и должен быть понижен.

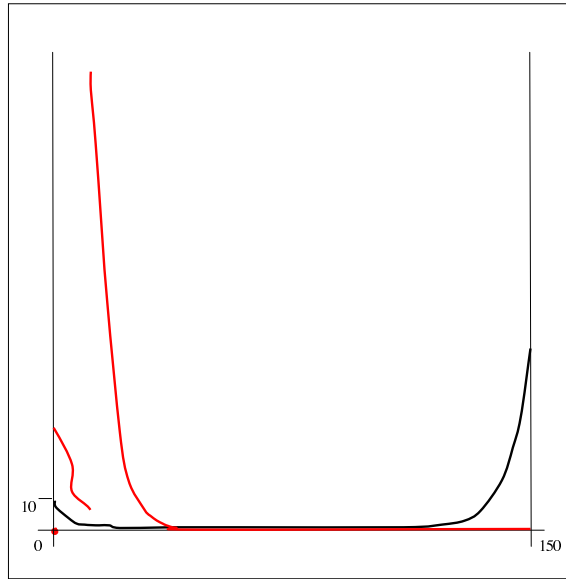


Рис. 3.10: Задача 1. Динамика численности популяций при $T = 150$, $x^0 = (10, 0)$.

Решая задачу улучшения, мы действовали в рамках концептуальной схемы, изложенной в Главе 2. В редуцированной задаче применялся пакет OPTCON III [45], разработанный в ИДСТУ СО РАН под руководством А.Ю. Горнова. По словам разработчиков, в пакете OPTCON III используется алгоритм стохастической аппроксимации множества достижимости. К сожалению, интерфейс OPTCON III не позволяет самостоятельно задавать начальное приближение, генерируя его автоматически, так что мы не можем обсудить здесь вопрос инициализации.

Вычислительный эксперимент проводился при $q_1 = q_2 = 1$ для различных начальных численностей x^0 и разных периодов времени T в диапазоне 150–200 дней (сельскохозяйственный цикл сои). В ходе численного эксперимента для различных начальных данных получены режимы, отвечающие чисто импульсным управлениям (по крайней мере, мы бы так интерпретировали результаты расчетов). При этом число импульсов, их локализация и интенсивности существенно зависят от начальных данных. На Рис. 3.10, 3.12 представлена динамика численностей видов (черные кривые — жертвы, красные — хищники) для начального состояния $x^0 = (10, 0)$. На Рис. 3.11, 3.13 — для начальной численности $x^0 = (10, 1)$.

Задача 2. Обычно в отсутствие естественных врагов популяция x_1 стремительно прогрессирует. С этим связана следующая проблема: требуется

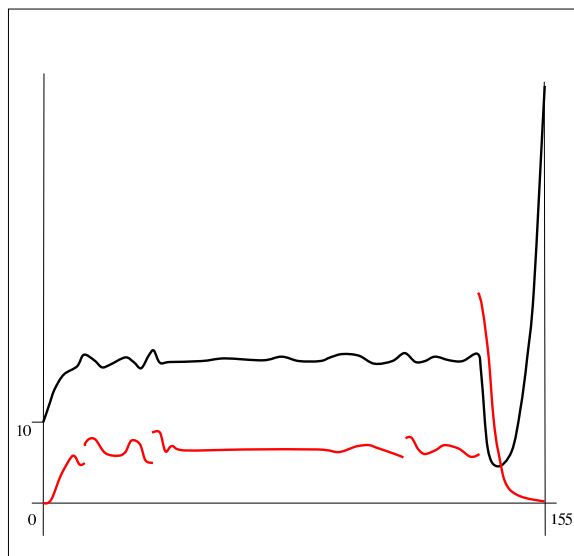


Рис. 3.11: Задача 1. Динамика численности популяций при $T = 155$, $x^0 = (10, 1)$.

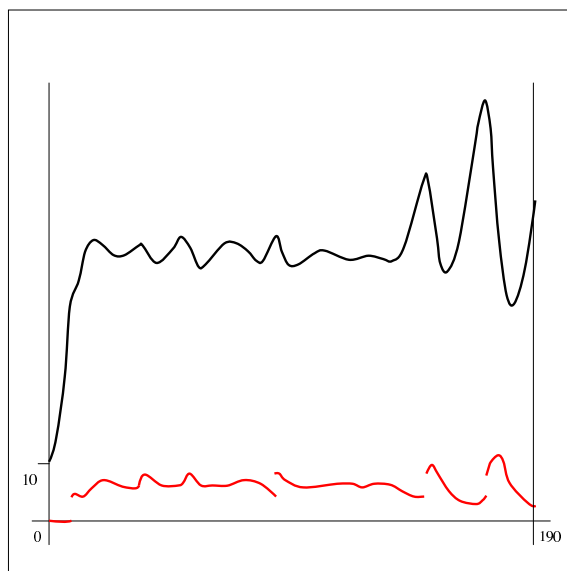


Рис. 3.12: Задача 1. Динамика численности популяций при $T = 190$, $x^0 = (10, 0)$.

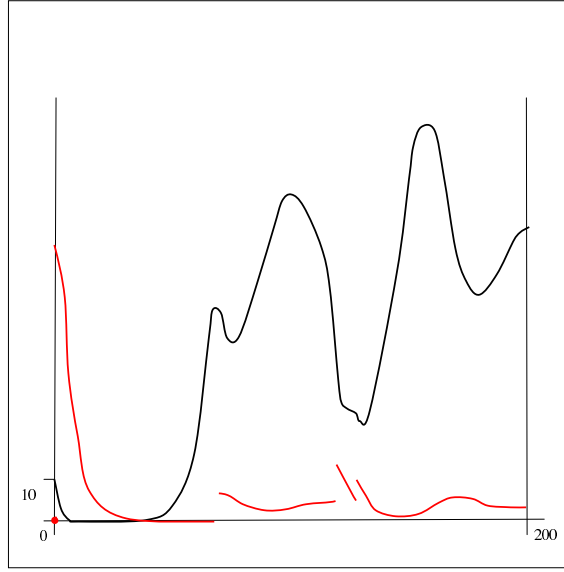


Рис. 3.13: Задача 1. Динамика численности популяций при $T = 200$, $x^0 = (10, 1)$.

удержать популяцию x_1 в допустимом диапазоне $x_1 \leq h$ на протяжении всего периода управления, где h — критический уровень (предельно допустимая концентрация) особей на единицу площади. При этом естественно положить $q_1 = 0$, $q_2 = 1$. Таким образом, имеем классическую задачу импульсного управления с фазовым ограничением.

Численные расчеты, проведенные нами для разных значений $h \in [20, 50]$ и различных начальных численностей $x_2^0 < x_1^0 \leq h$, выявляют следующую качественную картину, которая представлена на Рис. 3.14: как только популяция x_1 достигает критического значения в некоторый момент времени $t = \tau$, в экосистему мгновенно вводится популяция $\nu_\tau = [\mu(\tau)]$ особей вида x_2 на единицу площади, которая далее непрерывно пополняется так, чтобы x_1 оставалось на границе $x_1 = h$ допустимого диапазона. При этом x_2 также сохраняет постоянное значение $\tilde{x}_2 = x_2^0 + \nu_\tau$. Численное решение выглядит вполне ожидаемым, поскольку целевой функционал не зависит от x_1 . Соответствующая управляющая мера содержит абсолютно непрерывную и дискретную компоненты: $d\mu = (\nu_\tau \delta(t - \tau) + \dot{\mu}_{ac}(t) \chi_{(\tau, T]}(t)) dt$. Плотность $\dot{\mu}_{ac}$ меры $d\mu_{ac}$ относительно меры Лебега можно найти из управляемой системы: $\dot{\mu}_{ac} = \tilde{x}_2(b_2 - a_{21}h)$. Например, если $h = 20$ и $x_2^0 = 1$, то $\tau \approx 5.281$, $\nu_\tau \approx 7$, $\dot{\mu}_{ac} \approx 0.924$, и соответствующее значение критерия качества $I \approx 187.181$, т.е. за весь период управления следует ввести в систему всего около 187 особей вида x_2 на единицу площади. Если $x_2^0 = 0$, то можно найти аналитическое выраже-

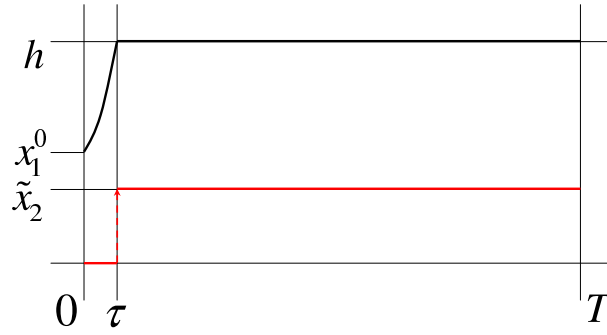


Рис. 3.14: Задача 2. Качественный характер поведения оптимальных траекторий

ние для момента времени τ :

$$\tau = \frac{1}{b_1} \ln \frac{h(b_1 + a_{11}x_1^0)}{x_1^0(b_1 + a_{11}h)}.$$

Мы не приводим здесь доказательства, но имеется ряд соображений, подтверждающих, что упомянутый процесс доставляет решение задачи с фазовым ограничением.

Задача 3. В работах [159, 191] модель (3.6) исследуется при условии, что импульсное внедрение хищников в систему осуществляется при достижении популяцией жертв определенного порогового значения h . В [159] применяется фиксированная управляющая стратегия: $[x_2(\tau)] = px(t-)$ при $x(t-) = h$, $p = \text{const}$. Отталкиваясь от этой модели, рассмотрим задачу (3.7) при дополнительном смешанном ограничении

$$x_1(t) \geq h, \quad x_2(t) \leq l(t, x_1(t)) \quad d\mu\text{-п.в.},$$

которое допускает следующую содержательную трактовку. Может оказаться, что введение особей x_2 в систему допустимо только в случае, когда популяция x_1 имеет некоторую “критическую массу”, формирующую необходимые условия развития хищников в данном районе. В противном случае такое воздействие нежелательно, или даже вредно. Это может быть связано с тем, что вид x_2 , не будучи обеспеченным привлекательной кормовой базой, не закрепляется в районе высадки, в короткие сроки мигрирует и не успеет оказать заметного влияния на популяцию x_1 . В крайнем случае, x_2 может даже нести вред, атакуя другие культурные виды. Скалярная неотрицательная непрерывная функция $l(t, x_1)$ задает максимально допустимый размер внешней популяции x_2 , которую

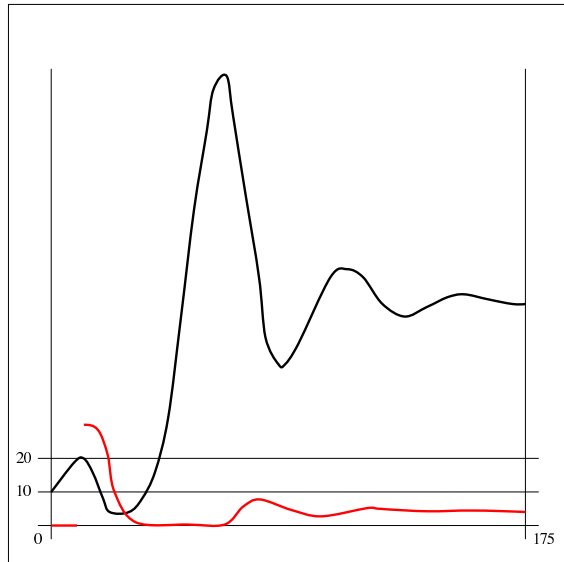


Рис. 3.15: Задача 3. Динамика численности популяций при $T = 175$, $x^0 = (10, 0)$.

можно ввести в систему в момент времени t при текущей численности вредителей x_1 .

Результаты численного анализа приведены для $l = 0$, $h = 20$, $q_1 = q_2 = 1$, и прежних значений A , b и c . На Рис. 3.15, 3.16 представлены траектории, отвечающие найденным процессам. В первом случае смешанное ограничение оказывается активным, траектория x_2 испытывает один скачок в момент первого выхода траектории x_1 на множество $\mathcal{Z}_- = \{x : x_2 \geq h\}$. Во втором случае ограничение не активно.

3.2.2 Телескопический манипулятор с блокируемой степенью свободы

Оптимизация перемещений манипуляторов — традиционная область приложения методов оптимального управления [1, 39, 43, 98, 100, 107, 152, 163, 164]. Манипуляторами называют механические системы, состоящие из нескольких твердых тел — звеньев, — сочлененных между собой с помощью подвижных шарниров. Обычно управление манипуляторами ищется в классе импульсных, что связано с “баллистическим” характером естественных движений антропоморфных механизмов [98].

Рассмотрим модель из робототехники, описывающую движение манипулятора с двумя степенями свободы, угловой и линейной (Рис. 3.17, детальное описание можно найти в [196]). Манипулятор совершает перемещения в горизонтальной плоскости в отсутствие внешних воздействий и представляет собой поступательную пару, прикрепленную к основанию

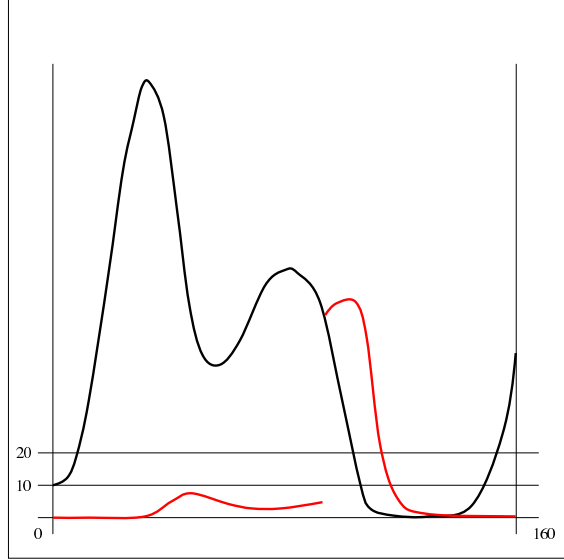


Рис. 3.16: Задача 3. Динамика численности популяций при $T = 160$, $x^0 = (10, 1)$.

с помощью шарнира. С шарниром связан электропривод, под действием которого происходит вращение телескопического механизма (обычное управление). Предполагается также, что поступательное движение внутреннего звена может быть мгновенно заблокировано путем активации фрикционного тормоза (импульсное управление), при этом механическая система утрачивает одну из своих степеней свободы. Насколько мы можем судить, подобного типа конструкции находят место в реальных технических устройствах, а сам принцип управления с помощью блокирования степеней свободы используется на практике [197].

Динамика системы описывается уравнениями

$$\begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\dot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_2 x \dot{\varphi}^2 dt \\ -2m_2 x \dot{x} \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d\mu \\ u \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

где φ и x — соответственно, угловая и линейная координаты центра масс S_2 второго (внутреннего) звена поступательной пары, $\Theta(x) = \Theta_1 + \Theta_2 + m_1 a^2 + m_2 x^2$, m_i — масса i -го звена, a — линейная координата центра масс S_1 первого звена (связанного с “основанием”); Θ_i — осевые моменты инерции относительно осей, проходящих через центры масс. Сила u (обычное управление) приложена к шарниру и управляет вращательным движением манипулятора. Мера $d\mu \geq 0$ есть импульсное управление (фрикционная сила), применение которого выражается в мгновенном сбросе линейной скорости $\dot{x}$:

$$\dot{x}(t) = 0 \text{ } d\mu\text{-п.в.} \quad (3.9)$$

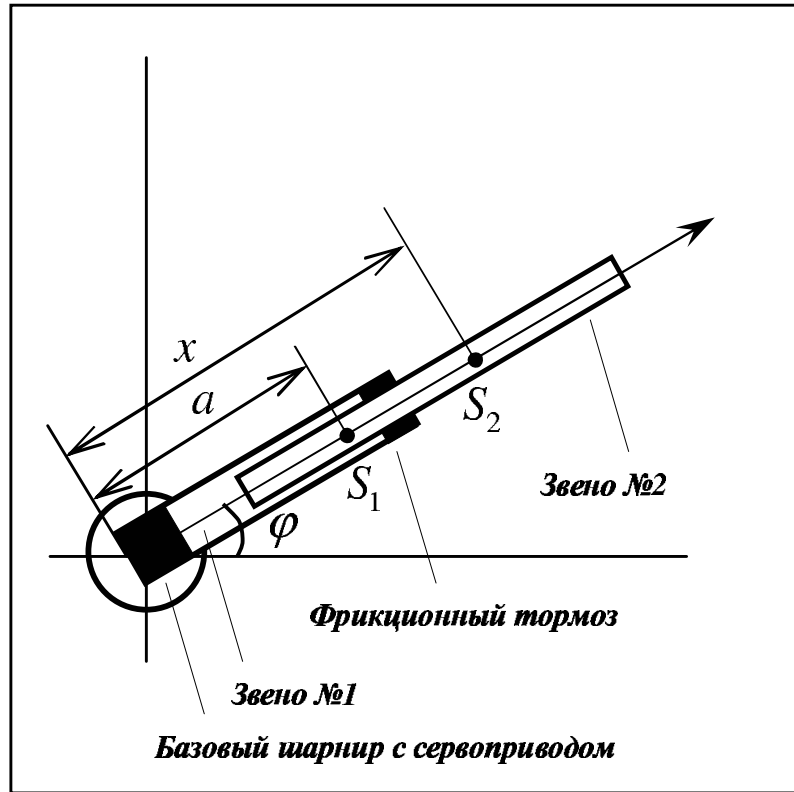


Рис. 3.17: Телескопический манипулятор

Цель управления состоит в перемещении манипулятора из положения $X(0-) = X_0$ в положение $X(T) = X_T$ за наименьшее время T при ограничении $\mu(T) \leq M$. Здесь $X = (x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi})$ — вектор обобщенных фазовых координат, X_0 и X_T — некоторые заданные допустимые состояния.

Отметим, что родственная модель манипулятора с телескопической поступательной парой, правда, более сложного, двузвенного (если считать поступательную пару единым звеном) исследовалась в [127] (см. также [43]). Требовалось минимизировать энергию, затрачиваемую на совершение заданного маневра. Задача ставилась в классе импульсных управлений — мер. Наиболее существенное отличие исследуемой нами модели состоит в наличии смешанных ограничений (3.9), позволяющих осуществлять импульсное воздействие лишь одного типа: полностью блокировать поступательное движение. Мы, кроме того, преследуем иную цель управления — решаем задачу быстродействия.

Вернемся к поставленной задаче. Соответствующая ей редуцированная имеет вид:

$$J = \xi(S) \rightarrow \inf,$$

$$\dot{\xi} = \alpha, \quad \dot{\eta}_{\pm} = (1 - \alpha)\beta_{\pm},$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \alpha y_{3,+}, \quad \dot{y}_2 = \alpha y_4, \quad \dot{y}_{3,\pm} = \alpha y_1 y_4^2 + (1-\alpha)\beta_{\pm}, \\
\dot{y}_4 &= \frac{\alpha}{\Theta(y_1)} (v - 2m_2 y_1 y_{3,+} y_4), \\
\xi(0) &= \eta_{\pm}(0) = 0, \quad y_1(0) = x^0, \quad y_2(0) = \varphi^0, \quad y_{3,\pm}(0) = \dot{x}^0, \quad y_4(0) = \dot{\varphi}^0, \\
\xi(S) &= T, \quad \eta_-(S) = \eta_+(S) \leq M, \quad y_{3,+}(S) = y_{3,-}(S), \\
v(s) &\in [0, 1], \quad \alpha(s), \beta_{\pm}(s) \in [0, 1], \quad \beta_+(s) + \beta_-(s) = 1, \\
\eta_-(s) - \eta_+(s) &\leq 0, \quad J_1 = \int_0^S \Upsilon(s) ds = 0, \quad ,
\end{aligned}$$

где

$$\Upsilon = \alpha(\eta_+ - \eta_-) + (1 - \alpha)\beta_-(y_{3,+})^2.$$

Управляемая система существенно нелинейна. Качественное исследование данной задачи (в том числе и применение результата теоремы 1.3.1) представляется сложным. Нами был проведен численный анализ в рамках сформулированной выше общей схемы улучшения. Для решения редуцированной задачи применялся пакет OPTCON III. Учет фазового ограничения в редуцированной задаче производился с помощью метода штрафов. Принятая точность отклонения от терминальных позиций: $\varepsilon = 0.05$. Управляемый процесс, найденный программой OPTCON III, был использован в качестве начального приближения для метода проекции градиента 3.1.1. В результате работы последнего решение удавалось уточнить.

Для следующего набора механических параметров (предполагается, что единицы измерения согласованы)

$$m_1 = m_2 = 1, \quad \Theta_1 = \Theta_2 = 0.1, \quad a = 0.4,$$

рассмотрим два маневра. Ресурс импульсного управления: $M = 10$.

Маневр 1. Начальная и конечная позиции:

$$X_0 = (0.4, 0, 0, 0), \quad X_T = (1, \pi/4, 0, 0).$$

В результате расчетов получены управления

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.733) \cup [1.867, 2.201], \\ -1 & t \in [0.733, 1.867), \end{cases} \quad d\mu(t) = 0.413 \delta(t - 2.201)dt,$$

переводящие систему в состояние X_T за время $T \approx 2.201$.

Обычное управление u типа “bang-bang” с двумя точками переключения отвечает возвратно-вращательному движению шарнира. Импульсное управление, сосредоточенное в конечный момент времени, соответствует

мгновенной остановке поступательного движения внутреннего звена манипулятора в завершающем этапе маневра. Наш результат качественно совпадает с управляемым процессом, представленным в [196], который в указанной работе характеризуется как оптимальный.

Отметим, что подход, применяемый в [196] заключается в сведении задачи оптимального управления к задаче математического программирования (как заявлено, в рассматриваемом примере решена задача с 1401 переменными при 3210 ограничениях типа неравенства).

Маневр 2. Позиции X_0 , x_T , $\dot{x}_T$, $\dot{\varphi}_T$ — те же, что и в предыдущем маневре, и $\varphi_T = \pi/2$. Получено управление без возвратного вращательного движения, переводящее систему в заданное положение за время $T = 2.098$:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.915), \\ -1 & t \in [0.915, 2.098], \end{cases} \quad d\mu^*(t) = 0.871 \delta(t - 1.821)dt.$$

Рекордные управления и траектории представлены на Рис. 3.18–3.20. Имеется один момент блокирования $\tau \approx 1.821$. После этого момента имеется незначительный прирост линейной скорости $\dot{x}$, однако $\dot{x}(T) \approx 0.046 < 0.05$, т.е. терминальное условие выполняется с принятой точностью.

3.2.3 Двухзвенный манипулятор с блокируемой степенью свободы

Рассмотрим манипулятор с двумя угловыми степенями свободы φ_1 и φ_2 , который имеет вид двойного маятника (Рис. 3.21). С первым (базовым) шарниром связан мотор, который позволяет непрерывно изменять скорость $\dot{\varphi}_1$ первого (несущего) звена маятника. Со вторым шарниром, соединяющим звенья, связан фрикционный тормоз, с помощью которого можно мгновенно заблокировать движение второго звена относительно первого (модель заимствована из [197]). Применение тормоза выражается в том, что относительная скорость $\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$ мгновенно становится равной нулю, т.е. второй шарнир теряет подвижность, и система в целом лишается одной степени свободы. Уравнения движения манипулятора имеют

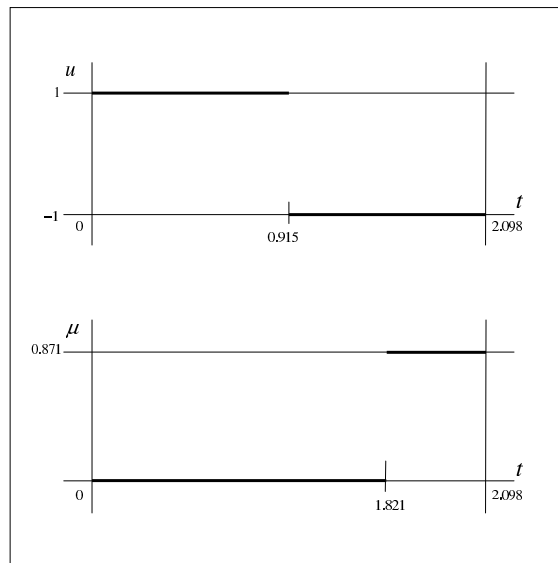


Рис. 3.18: Телескопический манипулятор. Рекордные управления для второго маневра

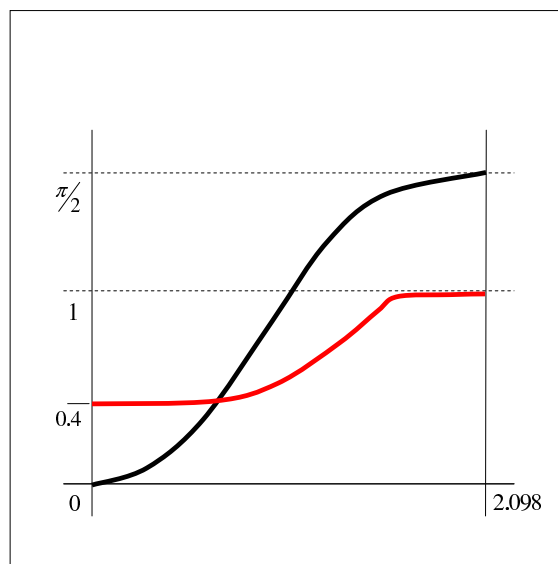


Рис. 3.19: Телескопический манипулятор. Рекордные траектории $x(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ для второго маневра (изображены, соответственно, красным и черным цветом)

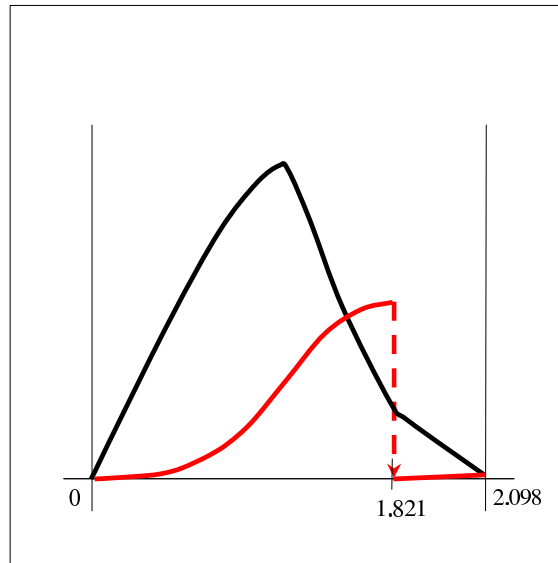


Рис. 3.20: Телескопический манипулятор. Рекордные компоненты $\dot{x}(\cdot)$ и $\dot{\varphi}(\cdot)$ фазовой траектории для второго маневра (угловая скорость $\dot{\varphi}$ выделена черным, линейная скорость $\dot{x}$ — разрывная красная кривая)

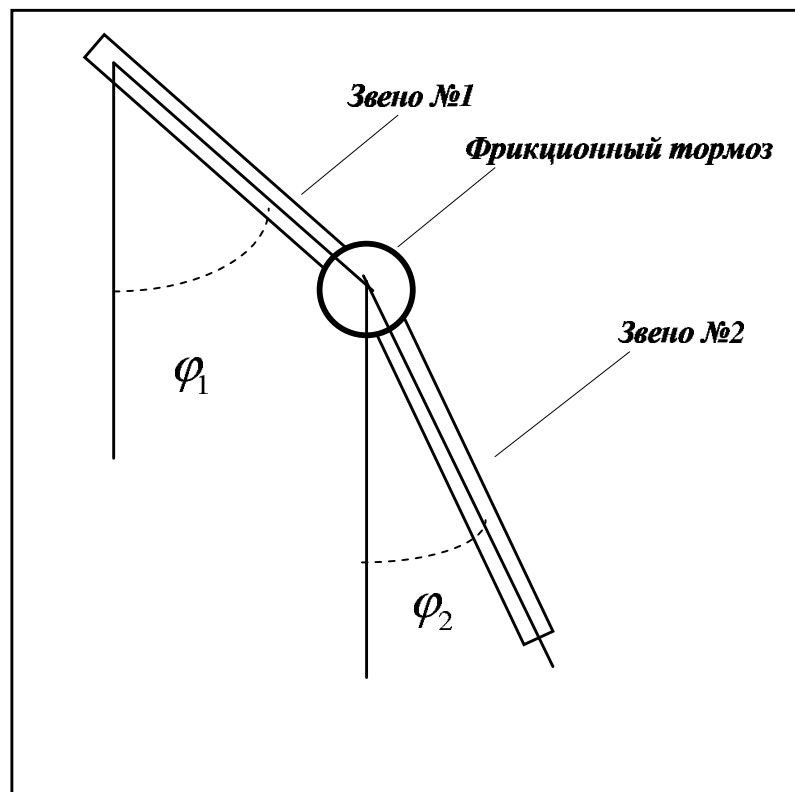


Рис. 3.21: Двухзвенный манипулятор

следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & ml \cos \Delta\varphi \\ \cos \Delta\varphi & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\dot{\varphi}_1 \\ d\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ml\dot{\varphi}_2^2 \sin \Delta\varphi + r^2 \sin \varphi_1 \\ -\dot{\varphi}_1^2 \sin \Delta\varphi + r^2 \sin \varphi_2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} udt \\ d\mu \end{pmatrix}.$$

Здесь φ_i — угловые координаты, $r^2 = g/l_1$, l_i — плечи, а m_i — массы соответствующих звеньев маятника (m_1 сосредоточена в точке соединения звеньев, т.е. во втором шарнире, а m_2 — на свободном конце второго звена), $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $m = m_2/(m_1 + m_2)$ и $l = l_2/l_1$.

Перепишем уравнения движения в более удобной форме:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad d\omega = (A(\varphi)(\omega_1^2, \omega_2^2)' + c(\varphi)) dt + D(\varphi)d\nu. \quad (3.10)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $c = (c_1, c_2)$, $D(\varphi) = \{d_{ij}(\varphi)\}$, $d\nu = (udt, d\mu)$, где

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= \begin{pmatrix} -mq_1(\varphi) & -mlq_2(\varphi) \\ -1/lq_2(\varphi) & mq_1(\varphi) \end{pmatrix}, \\ q(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi \sin \Delta\varphi / b(\varphi) \\ \sin \Delta\varphi / b(\varphi) \end{pmatrix}, \\ c(\varphi) &= \begin{pmatrix} r^2 (m \cos \Delta\varphi \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) / b(\varphi) \\ r^2 / l (\cos \Delta\varphi \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) / b(\varphi) \end{pmatrix}, \\ b(\varphi) &= 1 - m \cos^2 \Delta\varphi, \\ D(\varphi) &= \begin{pmatrix} l & -ml \cos \Delta\varphi \\ -\cos \Delta\varphi & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Модель рассматривается при ограничениях

$$\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t) = 0 \quad d\mu\text{-п.в. на } [0, T], \quad (3.11)$$

$$|u| \leq 1, \quad \mu(T) \leq M. \quad (3.12)$$

Замечание 3.2.1 Мы рассматриваем траектории системы (3.10)–(3.12) на относительно малых промежутках времени, т.к. при свободном движении двойного маятника в поле тяготения на больших временах проявляется эффект *существенной зависимости состояния от начальных условий*.

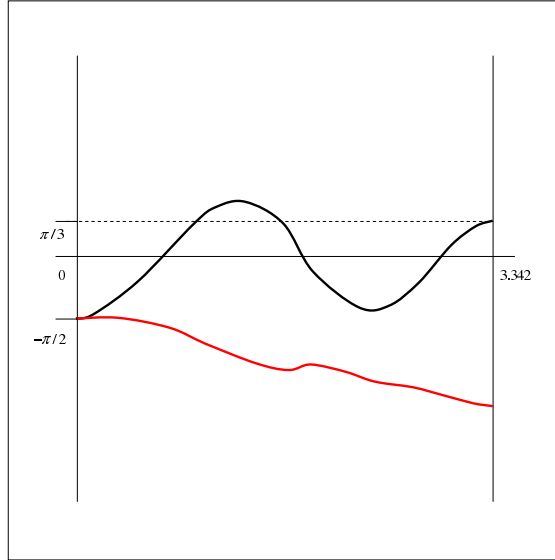


Рис. 3.22: Двухзвенный маятник. Рекордные траектории $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ для маневра 1 (изобразены, соответственно, черным и красным цветом)

Для следующего набора механических параметров (предполагается, что все единицы измерения согласованы)

$$m_1 = m_2 = 1, \quad l_1 = l_2 = 1,$$

рассмотрим два маневра. Полный импульс управления: $M = 10$.

Маневр 1. Требуется переместить манипулятор из положения $\varphi(0) = \varphi^0$, $\omega(0) = \omega^0$ в положение $\varphi_1(T) = \varphi_1^T$, $\omega(T) = 0$ за наименьшее время T ($\varphi_2(T)$ свободно). Рассмотрим ситуацию, когда ограниченное управление $u(\cdot)$ отсутствует, т.е. маятник движет под действием лишь силы тяжести, а единственным способом воздействия является блокирование второго шарнира. При $\varphi^0 = -(\pi/2, \pi/2)$ и $\omega^0 = (0, 0)$ получено импульсное управление, переводящее систему в состояние $\varphi_1^T = \pi/3$ за 3.342 единицы времени. Соответствующие траектории представлены на Рис. 3.22, 3.23. Второе звено маятника блокируется единственный раз в последний момент времени, чтобы добиться полной остановки движения.

Маневр 2. При наличии ограниченного управления и тех же начальных данных удастся перевести манипулятор из положения $\varphi^0 = -(\pi/2, \pi/2)$ и $\omega^0 = (0, 0)$ в позицию $\varphi^T = (\pi/2, \pi/3)$ и $\omega^T = (0, 0)$, за 3.363 единицы времени. Рекордные траектории представлены на Рис. 3.24, 3.25. Режим блокирования аналогичен тому, который был получен для первого маневра. Рекордное управление $u(\cdot)$ — типа “bang-bang” с семью моментами переключения (Рис. 3.26).

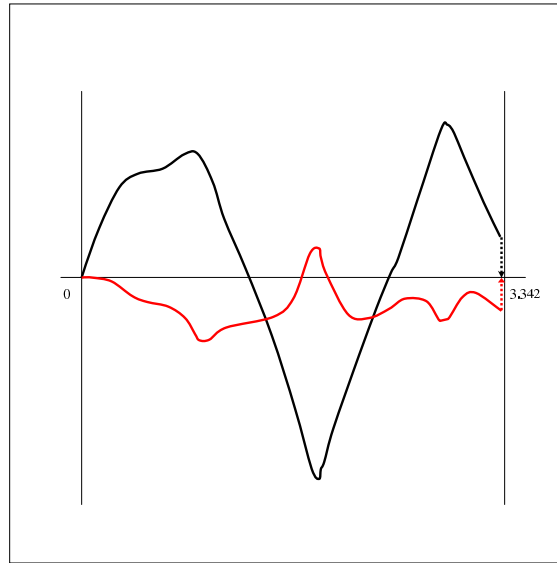


Рис. 3.23: Двузвенный маятник. Скорости $\dot{\varphi}_1(\cdot)$ и $\dot{\varphi}_2(\cdot)$ для маневра 1 (изображены, соответственно, черным и красным цветом)

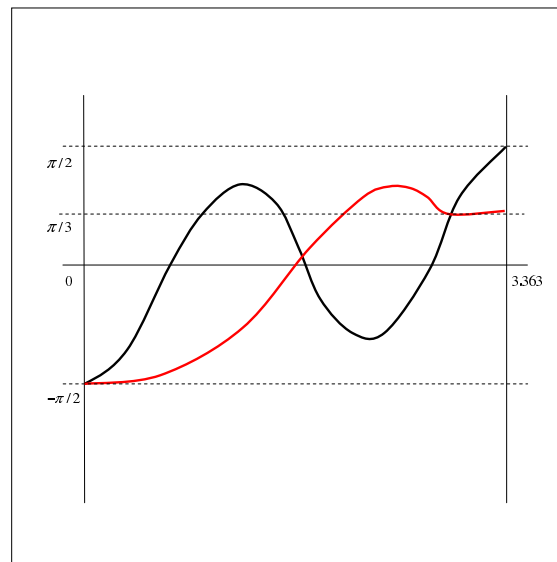


Рис. 3.24: Двузвенный маятник. Траектории $\varphi_1(\cdot)$ (черная) и $\varphi_2(\cdot)$ (красная) для маневра 2

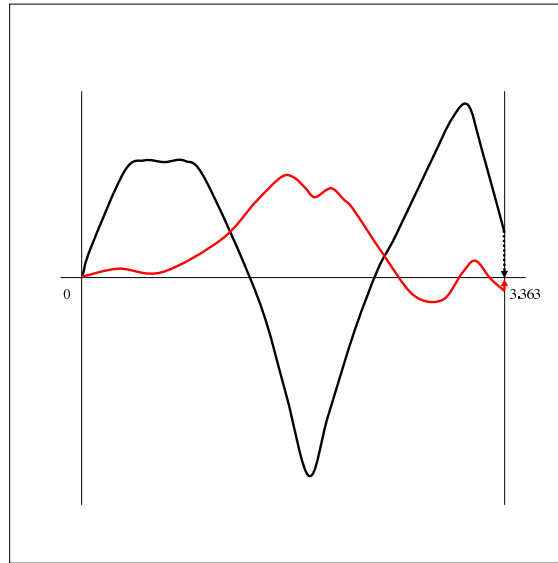


Рис. 3.25: Двухзвенный маятник. Скорости $\dot{\varphi}_1(\cdot)$ и $\dot{\varphi}_2(\cdot)$ для маневра 2 (изображены, соответственно, черным и красным цветом)

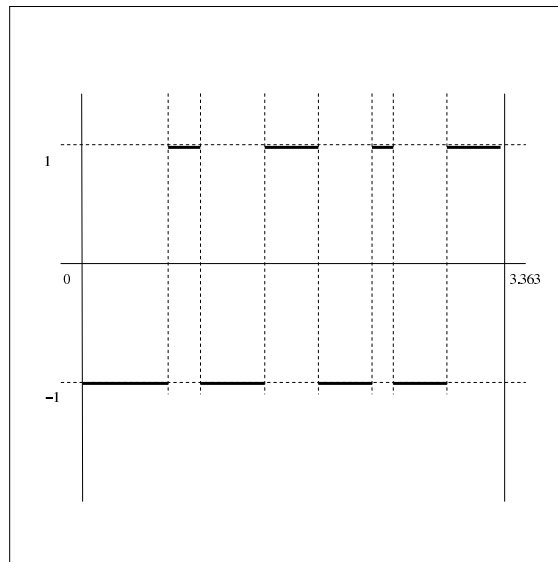


Рис. 3.26: Двухзвенный маятник. Рекордное управление $u(\cdot)$

Литература

- [1] Антипина Н.В. *Достаточные условия оптимальности импульсных процессов и их приложения*: Дис. . . канд. физ.-мат. наук. — Иркутск, 2003. — 165 с.
- [2] Арутюнов А.В. *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*. — М.: Факториал, 1997. — 256 с.
- [3] Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю., Перейра Ф. *Принцип максимума для задач оптимального управления при ограниченных фазовых координатах в форме Р.В. Гамкрелидзе и его связь с другими условиями оптимальности* // ДАН. — 2011. — Т. 436, № 6. — С. 738—742.
- [4] Батурин В.А., Урбанович Д.Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения*. — Новосибирск: Наука, 1997. — 175 с.
- [5] Батурин В.А., Гончарова Е.В. *Метод улучшения, основанный на приближенном представлении множества достижимости. Теорема о релаксации* // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 11. — С. 19–29.
- [6] Батурин В.А., Гончарова Е.В. *Метод улучшения, основанный на приближенном представлении множества достижимости и линеаризации* // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 7. — С. 3–11.
- [7] Батурин В.А., Лемперт А.А. *Метод сильного улучшения в задачах оптимального управления многоэтапными процессами* // Тр. Междунар. конф. “Методы оптимизации и их приложения”. — Иркутск, 2005. — Т. 2. — С. 105–110.
- [8] Батурин В.А., Черемных С.В. *Управление выбором параметров в алгоритмах слабого улучшения* // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 2. — С. 54–60.

- [9] Батурин В.А., Гончарова Е.В., Лемперт А.А. *Приближенные методы решения задач оптимального управления гибридными системами* // Тр. XIV Байкальской междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск–Северобайкальск, 2–8 июля 2008 г. — Иркутск, 2008. — Т. 2. — С. 3–22.
- [10] Батурин В.А., Малтугуева Н.С. *Метод слабого улучшения первого порядка для задач оптимального управления логико-динамическими системами* // Известия Иркутского гос. ун-та. Математика. — 2009. — Т. 2, № 1. — С. 83–93.
- [11] Бельшев Д.В., Гурман В.И. *Интеллектуальные процедуры оптимального управления* // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 5. — С. 147–155.
- [12] Бортаковский А.С. *Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами* // Информатика. Сер. Автоматизация проектирования. — 1992. — Вып. 2–3. — С. 72–79.
- [13] Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. *Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами* // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 7.
- [14] Васильев О.В., Тятюшкин А.И. *Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1981. — № 6. — С. 1376–1384.
- [15] Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения*. — Новосибирск: Наука, 1990. — 148 с.
- [16] Васильев О.В. *Лекции по методам оптимизации*. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994.
- [17] Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач*. — М.: Наука, 1980. — 520 с.
- [18] Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач*. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
- [19] Габелко К.Н. *Последовательное улучшение многоэтапных процессов* // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 12. — С. 72–80.

- [20] Галяев А.А. *Оптимальное импульсное управление динамической системой в фазе удара* // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 1. — С. 75–88.
- [21] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Задача улучшения управления для дискретно-непрерывных систем* // Тез. докл. VIII Всерос. конф. молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. — Новосибирск, 2007. — С. 18.
- [22] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Метод последовательных улучшений управления дискретно-непрерывными системами* // Материалы IV Междунар. симп. “Обобщенные решения в задачах управления” (GSCP-08). — Улан-Удэ, 2008. — С. 47–48.
- [23] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Метод улучшения для дискретно-непрерывных систем* // Тр. XIV Байкальской междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. — Иркутск–Северобайкальск, 2008. — Т. 2. — С. 125–134.
- [24] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Метод улучшения управления импульсными системами* // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 6. — С. 53–60.
- [25] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления гибридными системами* // Тез. докл. II Междунар. школы-семинара “Нелинейный анализ и экстремальные задачи”. — Иркутск, 2010. — С. 21.
- [26] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Градиентные методы улучшения для задач оптимального импульсного управления* // Управление большими системами. — М.: ИПУ РАН, 2010. — Вып. 31. — С. 35–48.
- [27] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными гибридными системами* // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 3. — С. 41–51.
- [28] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Задача оптимального импульсного управления с фазовыми и смешанными ограничениями* // ДАН. — 2011. — Т. 441, № 1. — С. 29–32.

- [29] Гончарова Е.В., Старицын М.В. *Задача импульсного управления при ограничениях на пределы траектории в точках разрыва* // Тр. XV Байкальской Междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, 23–29 июня, Иркутск–Листвянка. — Иркутск, 2011. — С. 56–60.
- [30] Гурман В.И. *Об оптимальных процессах особого управления* // Автоматика и телемеханика. — 1965. — Т. 26, № 5.
- [31] Гурман В.И. *Вырожденные задачи оптимального управления*. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
- [32] Гурман В.И., Дыхта В.А., Колокольникова Г.А., Константинов Г.Н., Москаленко А.И., Никифорова И.А. *Принцип расширения в задачах оптимального управления* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 200–217.
- [33] Гурман В.И., Батулин В.А., Расина И.В. *Приближенные методы оптимального управления*. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1983. — 178 с.
- [34] Гурман В.И. *Принцип расширения в задачах управления*. — М.: Наука, 1985. — 288 с.
- [35] Гурман В.И., Батулин В.А., Данилина Е.В. и др. *Новые методы улучшения управляемых процессов*. — Новосибирск: Наука, 1987.
- [36] Дыхта В.А. *Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых режимов*. — Иркутск: Изд-во ИГЭА, 1995. — 186 с.
- [37] Дыхта В.А., Деренко Н.В. *Численные методы решения задач импульсного управления, основанные на обобщенном условии стационарности* // Компьютерная логика, алгебра и интеллектуальное управление. Проблемы анализа устойчивости развития и стратегической стабильности: Сб. тр. Всерос. науч. школы. — Иркутск, 1994. — Т. 2. — С. 59–70.
- [38] Дарьин А.Н., Малакаева А.Ю. *Численные методы синтеза импульсных управлений для линейных систем* // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 2. — С. 50–56.

- [39] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. *Оптимальное импульсное управление с приложениями*. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
- [40] Дыхта В.А. *Инвариантность, достижимость и оптимальность в управляемых динамических системах* // Тр. XIV Байкальской междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения” (Иркутск, Байкал, 2–8 июля 2008 г.). Т. 2: Оптимальное управление. — Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008. — С. 35–47.
- [41] Дыхта В.А. *Некоторые приложения неравенств Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении* // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 405–426.
- [42] Емельянов С.В., Коровин С.К., Бобылев Н.А., Булатов А.В. *Гомотопии экстремальных задач*. — М.: Наука, 2001. — 350 с.
- [43] Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы: модели и приложения*. — М.: Наука, 1991. — 256 с.
- [44] Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е. *Динамические системы с импульсной структурой*. — Средловск: Средне-Уральское книжное изд-во, 1983. — 112 с.
- [45] Зароднюк Т.С. *Вычислительные технологии поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления с параллелепипедными ограничениями*: Дис. . . канд. тех. наук: 05.13.01; ИДСТУ СО РАН. — Иркутск, 2011. — 138 с.
- [46] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач*. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
- [47] Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ*: Пер. с англ. — М: Наука, 1988. — 280 с.
- [48] Колокольникова Г.А. *Вариационный принцип максимума для разрывных траекторий неограниченных, асимптотически линейных управляемых систем* // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 12. — С. 1631–1638.
- [49] Колокольникова Г.А. *Импульсные режимы в нелинейных управляемых динамических системах и условия их оптимальности*: Дис. . . канд. физ.-мат. наук. — Иркутск, 1985. — 157 с.

- [50] Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. *О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1962. — № 6. — С. 1132–1138.
- [51] Кротов В.Ф. *Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума* // Автоматика и телемеханика. — 1962. — Т. 23, № 12. — С. 1571–1583; Ч. 2: 1963. — Т. 24, № 15. — С. 581–598; Ч. 3: 1963. — Т. 24, № 7. — С. 826–843; Ч. 4: 1965. — Т. 26, № 1. — С. 24–41.
- [52] Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. *Новые методы вариационного исчисления в динамике полета*. — М: Машиностроение, 1969. — 228 с.
- [53] Кротов В.Ф., Гурман В.И. *Методы и задачи оптимального управления*. — М: Наука, 1973. — 446 с.
- [54] Кротов В.Ф. *Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем уравнений*. I, II // Техн. кибернетика. — 1975. — № 5. — С. 3–15; № 6. — С. 3–13.
- [55] Кротов В.Ф., Фельдман И.Н. *Итерационный метод решения экстремальных задач* // Моделирование технико-экономических процессов. — М.: МЭСИ, 1978. — С. 54–65.
- [56] Кротов В.Ф., Фельдман И.Н. *Итерационный метод решения задач оптимального управления* // Техн. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 160–168.
- [57] Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. *О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1962. — № 6. — С. 1132–1139.
- [58] Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. *Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1972. — № 1. — С. 14–34.
- [59] Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. *К управлению линейной системой обобщенными воздействиями* // Дифференциальные уравнения. — 1969. — Т. 5, № 8. — С. 1360–1370.

- [60] Куржанский А.Б. *Оптимальные системы с импульсными управлениями* // Дифференциальные игры и задачи управления. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. — С. 131–156.
- [61] Лемперт А.А., Батурин В.А. *Методы слабого улучшения в задаче оптимального управления на сети операторов* // Тр. Междунар. конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке и образовании”. — Павлодар, 2006. — Т. 2.
- [62] Лоуден Д. *Оптимальные траектории для космической навигации*. — М.: Мир, 1966.
- [63] Любушин А.А. *Модификации и исследование сходимости метода последовательных приближений для задач оптимального управления* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1979. — № 6. — С. 1414–1421.
- [64] Любушин А.А. *О применении модификации метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1982. — № 1. — С. 30–35.
- [65] Любушин А.А., Черноусько Ф.Л. *Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 147–159.
- [66] Методы улучшения в вычислительном эксперименте. — Новосибирск: Наука, 1988. — 184 с.
- [67] Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990. — 180 с.
- [68] Миллер Б.М. *Об одной задаче нелинейного импульсного управления* // Автоматика и телемеханика. — 1976. — Т. 37, № 6. — С. 63–72.
- [69] Миллер Б.М. *Задача нелинейного импульсного управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями с мерой*. I, II // Автоматика и телемеханика. — 1978. — Т. 39, № 1. — С. 75–83; № 3. — С. 34–42.
- [70] Миллер Б.М. *Условия оптимальности в задаче управления системой, описываемой дифференциальным уравнением с мерой* // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 6. — С. 60–72.

- [71] Миллер Б.М. *Условия оптимальности в задачах обобщенного управления* // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 5. — С. 50—58.
- [72] Миллер Б.М. *Метод разрывной замены времени в задачах управления дискретно-непрерывными системами* // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 12. — С. 3–32.
- [73] Миллер Б.М. *Обобщенные решения в нелинейных задачах оптимизации с импульсными управлениями. I. Проблема существования решения. II. Представление решений с помощью дифференциальных уравнений с мерой* // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 62–76; 1995. — № 5. — С. 56–70.
- [74] Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*. — М.: Наука, 2005. — 429 с.
- [75] Моисеев Н.Н. *Численные методы теории оптимального управления, использующие вариации в пространстве состояний* // Кибернетика. — 1966. — Т. 5, № 3. — С. 1–23.
- [76] Моисеев Н.Н. *Элементы теории оптимальных систем*. — М.: Наука, 1975. — 488 с.
- [77] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
- [78] Никифорова И.А. *Квадратичные условия оптимальности импульсных режимов*: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Иркутск, 1990. — 154 с.
- [79] Орлов А.Г., Расина И.В. *Сложные процессы и достаточные условия относительной оптимальности* // Управляемые системы. — Новосибирск, 1979. — № 18. — С. 39–46.
- [80] Орлов Ю.В. *Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями*. — М.: Наука, 1988.
- [81] Полак Э. *Численные методы оптимизации. Единый подход*. — М.: Мир, 1974. — 376 с.
- [82] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. — М.: Наука, 1961. — 384 с.

- [83] Пшеничный Б.М. *Численные методы в экстремальных задачах*. — М.: Наука, 1975. — 320 с.
- [84] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу*. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
- [85] Самсонюк О.Н. *Квадратичные условия оптимальности для задач оптимального импульсного управления* // Тр. XII Байкальской междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. — Иркутск, 2001. — Т. 2. — С. 144–149.
- [86] Самсонюк О.Н. *Достаточные условия оптимальности в задачах оптимального импульсного управления с промежуточными фазограничениями* // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2009. — Т. 2, № 1. — С. 333–337.
- [87] Сеа Ж. *Оптимизация. Теория и алгоритмы*. — М.: Мир, 1973. — 244 с.
- [88] Семенов В.В. *Динамическое программирование и синтез логико-динамических систем* // Приборостроение. — 1984. — № 2.
- [89] Сесекин А.Н. *О нелинейных дифференциальных уравнениях, содержащих произведения разрывных функций на обобщенные* // Обобщенные функции и дифференциальные уравнения. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. — С. 62–68.
- [90] Сесекин А.Н. *Об оптимальном управлении линейной системой с ограниченным ресурсом* // Нелинейные задачи в обобщенных функциях. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1988. — С. 77–84.
- [91] Сесекин А.Н. *О наилучшей траектории в интегральной воронке разрывных решений* // Обобщенные функции и дифференциальные уравнения. — Свердловск: УрО АН СССР, 1992. — С. 78–84.
- [92] Сесекин А.Н. *Импульсное расширение в задаче минимизации энергетического функционала* // Автоматика и телемеханика. — 1992. — Т. 53, № 8. — С. 53–62.
- [93] Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления*. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 160 с.

- [94] Старицын М.В. *Подход к решению задачи улучшения для дискретно-непрерывных управляемых систем* // Материалы IX школы-семинара “Математическое моделирование и информационные технологии” (Иркутск, 22–27 октября 2007 г.). — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2007. — С. 155–158.
- [95] Старицын М.В. *Оптимальное управление импульсными системами при ограничениях на пределы траектории в точках разрыва* // Тез. докл. Российско-монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Иркутск (Россия) – Ханх (Монголия), 17–21 июня 2011 г.). — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. — С. 83.
- [96] Тятюшкин А.И. *Многometодные технологии оптимизации управляемых систем*. — Новосибирск: Наука, 2006. — 343 с.
- [97] Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. — М.: Наука, Гл. редакция физ.-мат. лит., 1985. — 224 с.
- [98] Формальский А.М. *Движение антропоморфных механизмов*. — М.: Наука, 1982. — 368 с.
- [99] Черноусько Ф.Л. *Вычислительные и приближенные методы оптимального управления* // Математический анализ. Итоги науки и техники. — 1977. — Т. 14. — С. 101–166.
- [100] Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*. — М.: Наука, 1989. — 368 с.
- [101] Шилов Г.Е. *Математический анализ*. — М.: Наука, 1965.
- [102] Энеев Т.М. *О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления* // Космические исследования. — 1966. — Т. 4, вып. 5. — С. 651–669.
- [103] Ahmed N.U. *Necessary conditions of optimality for impulsive systems on Banach spaces* // Nonlinear Anal. — 2002. — V. 51, № 3. — P. 409–424.

- [104] Ahmed N.U. *Optimality conditions with state constraints for semilinear systems determined by operator valued measures* // Nonlinear Anal. — 2009. — V. 70, № 10. — P. 3522–3537.
- [105] *Special issue on hybrid control systems* / Ed. by P. Antsaklis, A. Nerode // IEEE Trans. Autom. Control. — 1998. — V. 43, № 4. — P. 453–587.
- [106] *Special issue on hybrid systems: Theory & Appl.* / Ed. by P. Antsaklis // IEEE Procs. — 2000. — 88 p.
- [107] Arkin R.C. *Behavior Based Robotics*. — The MIT Press, 1998.
- [108] Arutyunov A., Jacimovic V., Pereira F. *Second order necessary conditions for optimal impulsive control problems* // European Control Conf. 2001. — Porto (Portugal), 2001. — P. 2759–2763.
- [109] Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. *A Nondegenerate Maximum Principle for the Impulsive Control Problem with State Constraints* // SICOPT. — 2005. — V. 43. — P. 1812–1843.
- [110] Arutyunov A., Dykhta V., Pereira F. *Necessary conditions for impulsive nonlinear optimal control problems without a priori normality* // J. of Optimization Theory and Applications. — 2005. — V. 124, № 1. — P. 55–77.
- [111] Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L. *On Constrained Impulsive Control Problems* // J. of Mathematical Sciences. — 2010. — V. 165, № 6. — P. 654–688.
- [112] Aubin J.-P. *Impulse differential equations and hybrid systems: A viability approach* // Lecture Notes. — University of California at Berkeley, 2000.
- [113] Aubin J.-P., Lygeros J., Quincampoix M., Sastry S., Seube N. *Impulse Differential Inclusions: A Viability Approach to Hybrid Systems* // IEEE TAC. — 2002. — № 47. — P. 2–20.
- [114] Azhmyakov V., Raisch J. *A gradient-based approach to a class of hybrid optimal control problems* // Proc. of the 2nd IFAC Conf. on Analysis and Design of Hybrid Systems. — Alghero, 2006. — P. 89–94.

- [115] Azhmyakov V. *Optimal control of hybrid and switched systems* // Proc. of the IX Intern. Chetaev Conf. “Analytical Mechanics, Stability and Control of Motion”. — Irkutsk, 2007. — V. 2. — P. 308–317.
- [116] Azhmyakov V., Attia Sid A., Raisch J. *On the Maximum Principle for Impulsive Hybrid Systems* // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). — Springer-Verlag, 2008. — V. 4981. — P. 30–42.
- [117] Baturin V.A., Goncharova E.V. *An improvement method for a linear unbounded control problem* // Proc. of the IFAC Workshop “Singular Solutions and Perturbations”. — Bucharest (Romania), 2001. — P. 38–41.
- [118] Baturin V.A., Goncharova E.V. *An Algorithm for Impulsive Control Problems* // Proc. of 10th IEEE Mediterranean Conf. on Control and Automation (MED’2002), Lisbon (Portugal), July, 9–12, 2002.
- [119] Baturin V.A., Goncharova E.V. *An Algorithm for Optimal Impulsive Control Problems* // Proc. of 15th IFAC World Congress, Barcelona (Spain), July, 21–26, 2002. — Elsevier Science Ltd., 2002.
- [120] Baturin V.A., Nie Y.Y., Verkhozina I.O. *The Technique of Improving High-order Impulse Modes in the Optimal Control Problem* // Mini-micro Systems. — 2003. — V. 24, № 2. — P. 169–173.
- [121] Baturin V.A. *First-order improvement method for the problems of optimal control of logic-dynamic systems* // Nonlinear Analysis, Hybrid Systems and Applications (3). — 2006. — V. 64, Issue 2. — P. 288–294.
- [122] Baturin V., Goncharova E., Maltugueva N. *Algorithms for Optimal Control of Logic-Dynamic Systems* // Proc. of the European Control Conf. (ECC’07). — Kos (Greece), 2007.
- [123] Bentsman J., Miller B.M. *Mechanical systems with unilateral constraints: Controlled singularities approach* // Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC’01). — Orlando, Florida (USA), 2001. — P. 3692–3697.
- [124] Branicky M., Borkar V., Mitter S. *A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory* // IEEE TAC. — 1998. — V. 43. — P. 31–45.

- [125] Bressan A. *On differential systems with impulsive controls* // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. — 1987. — V. 1. — P. 67–83.
- [126] Bressan A., Rampazzo F. *Impulsive control systems with commutative vector fields* // J. Optim. Theory Appl. — 1991. — V. 71, № 1. — P. 67–83.
- [127] Bressan A., Rampazzo F. *Impulsive control systems without commutativity assumptions* // J. Optim. Theory Appl. — 1994. — V. 81, № 3. — P. 435–457.
- [128] Bressan A., Rampazzo F. *On differential systems with vector-valued impulsive controls* // Boll. Un. Mat. Ital. B(7). — 1988. — V. 2. — P. 641–656.
- [129] Boccadoro M., Wardi Y., Egerstedt M., Verriest E. *Optimal control of switching surfaces in hybrid dynamical systems* // Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications. — 2005. — V. 15, № 4. — P. 433–448.
- [130] Borrelli F. *Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems* // Lect. Notes Control & Inf. Sci. — Springer, 2003.
- [131] Brogliato B. *Nonsmooth Impact Mechanics* // Models, Dynamics and Control. — London: Springer-Verlag, 2000.
- [132] Cardoso R.T.N., Takahashi R.H.C. *Solving impulsive control problems by discrete-time dynamic optimization methods* // TEMA Tend. Mat. Apl. Comput. — 2008. — V. 9, № 1. — P. 21–30.
- [133] Cassandras C., Pepyne D., Wardi Y. *Optimal control of a class of hybrid Systems* // IEEE TAC. — 2001. — № 46. — P. 398–415.
- [134] Chevallereau C., Abba G., Aoustin Y., Plestan F., Westervelt E.R., Canudas de Wit C., Grizzle J.W. *Rabbit: a testbed for advanced control theory* // IEEE Contr. Syst. Mag. — 2003. — V. 23, № 5. — P. 57–79.
- [135] Clarke F.H., Vinter R.B. *Applications of optimal multiprocesses* // SIAM J. Control Optim. — 1989. — V. 27, № 5. — P. 1048–1071.
- [136] Clarke F.H., Vinter R.B. *Optimal multiprocesses* // SIAM J. Control Optim. — 1989. — V. 27, № 5. — P. 1072–1091.

- [137] Code W.J. *Measure-Driven Impulsive Systems: Stabilization, Optimal Control and Applications*: Ph.D. Thesis; University of British Columbia. — Vancouver, 2009.
- [138] Dal Maso G., Rampazzo F. *On systems of ordinary differential equations with measures as controls* // Differential Integral Equations. — 1991. — V. 4, № 4. — P. 739–765.
- [139] Daryin A.N., Kurzanski A.B., Seleznev A.V. *A dynamic programming approach to the impulse control synthesis problem* // Proc. Joint 44th IEEE CDC-ECC-2005. — Seville, 2005. — P. 8215–8220.
- [140] Egerstedt M., Wardi Y., Axelsson H. *Transition-time optimization for switched-mode dynamical systems* // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2006. — № 51. — P. 110–115.
- [141] Filippova T.F. *Set-valued solutions to impulsive differential inclusions* // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. — 2005. — V. 11, № 2. — P. 149–158.
- [142] Filippova T.F. *On the generalized solutions for uncertain systems with applications to optimal control and estimation problems* // WSEAS Trans. Syst. — 2005. — V. 4, № 5. — P. 481–486.
- [143] Filippova T.F. *Trajectory tubes of nonlinear differential inclusions and state estimation problems* // J. Concr. Appl. Math. — 2010. — V. 8, № 3. — P. 454–469.
- [144] Ferreira M.M.A., Fontes F.A.C., Vinter R.B. *Nondegenerate Necessary Conditions for Nonconvex Optimal Control Problems with State Constraints* // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — V. 233, № 1. — P. 116–129.
- [145] Goh B.S. *The second variation for singular Bolza problem* // SIAM J. Contr. — 1966. — V. 4, № 2. — P. 309–325.
- [146] Goh B.S. *Optimal singular control for multi-input linear systems* // J. Math. Anal. and Appl. — 1967. — V. 20, № 3. — P. 534–539.
- [147] Goncharova E., Ovseevich A., Staritsyn M. *Control Improvement Problem for Discrete-Continuous Dynamic System* // Proc. of the CONTROLO'2008 Conf., The 8th Portuguese Conf. on Automatic

Control, 21–23 July 2008, UTAD. — Vila Real (Portugal), 2008. — P. 130–135.

- [148] Goncharova E., Ovseevich A., Staritsyn M. *Control Improvement Problem for Discrete-Continuous Dynamic System* // Intern. J. of Mathematics and Statistics (IJMS). — 2009. — V. 5, № A09. — P. 71–82.
- [149] Goncharova E., Staritsyn M. *Optimal control of measure-driven impulse systems* // Book of Abstracts of the 5th Intern. Conf. on Physics and Control (PhysCon 2011). — León (Spain), 2011. — P. 81.
- [150] Goncharova E., Staritsyn M. *Optimal Control of Impulsive Hybrid Systems* // Proc. of the 18th IFAC World Congress. — Milan (Italy), 2011. — P. 10255–10260.
- [151] Goncharova E., Staritsyn M. *Optimization of measure-driven hybrid systems* // JOTA. — (Published online: 18 October 2011, doi:10.1007/s10957-011-9944-x; to appear in Vol. 153, № 1, April 2012).
- [152] Grizzle Jesse W., Abba G., Plestan F. *Asymptotically Stable Walking for Biped Robots: Analysis via Systems with Impulse Effects* // IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL. — 2001. — V. 46, № 1.
- [153] Gurman V.I., Baturin V.A. *Improvement of Control and Local Optimal Synthesis. Degenerate Problems* // Материалы VII Конгресса ИФАК. — Киото (Япония), 1981.
- [154] Haddad W.M., Chellaboina V., Nersesov S.G. *Hybrid Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems* // Mathematical Problems in Engineering. — 2002. — V. 8, № 6. — P. 493–515.
- [155] Haddad W., Chellaboina V., Nersesov S. *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control*. — Princeton: Princeton University Press, 2006.
- [156] Hager W., Pardalos P. *Optimal Control, Theory, Algorithms, and Applications*. — Springer, 2001.
- [157] Hedlund S., Rantzer A. *Optimal control of hybrid systems* // IEEE CDC. — 1999. — P. 3972–3976.

- [158] Jacobson D.H. *New second-order and first-order algorithms for determining optimal control. A differential programming approach* // J. Optimization Theory and Application. — 1968. — V. 2, № 4. — P. 441–440.
- [159] Jiang G., Lu Q. *Impulsive state feedback control of a predator-prey model* // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2007. — V. 200. — P. 193–207.
- [160] Karamzin D.Yu. *Necessary conditions of the minimum in an impulse optimal control problem* // J. Math. Sci. — 2006. — V. 139, № 6. — P. 7087–7150.
- [161] Krotov V.F. *Global Methods in Optimal Control Theory*. — N.Y.: Marcel Dekker, 1996. — 408 p.
- [162] Kurzhanski A.B., Tochilin P.A. *Impulse Controls in Models of Hybrid Systems* // Differential Equations. — 2009. — V. 45, № 5. — P. 731–742.
- [163] Latombe J.-C. *Robot Motion Planning*. — N.Y.: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [164] *Robot Motion Planning and Control, Lectures Notes in Control and Information Sciences* / Ed. by J.-P. Laumond. — Springer, 1998.
- [165] Lee E.B., Markus L. *Foundations of Optimal Control Theory*. — New York; London; Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967.
- [166] Lygeros J. *Lecture Notes on Hybrid Systems*. — Cambridge: University of Cambridge, 2003.
- [167] Lygeros J., Quincampoix M., Rzezuchowski T. *Impulse differential inclusions driven by discrete measures* // Lecture Notes in Computer Science. — Berlin: Springer, 2007. — V. 4416. — P. 385–398.
- [168] Marques Monteiro M.D.P. *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems: shocks and dry friction*. — Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1993.
- [169] Matveev A., Savkin A. *Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems*. — Boston: Birkhauser, 2000.

- [170] Miller B.M. *The generalized solutions of nonlinear optimization problems with impulse control* // SIAM J. Control Optim. — 1996. — V. 34. — P. 1420–1440.
- [171] Miller B.M., Bentsman J. *The Singularity Opening Approach To Control Of Mechanical Systems With Constraints* // Proc. of 2nd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control. — Seville, 2003.
- [172] Miller B.M., Bentsman J. *Optimal control problems in hybrid systems with active singularities* // Nonlinear Anal. — 2006. — V. 65, № 5. — P. 999–1017.
- [173] Motta M., Rampazzo F. *Space-time trajectories of nonlinear systems driven by ordinary and impulsive controls* // Differential and Integral Equations. — 1995. — V. 8, № 2. — P. 269–288.
- [174] Motta M., Rampazzo F. *Nonlinear systems with unbounded controls and state constraints: a problem of proper extension* // NoDEA. — 1996. — № 3. — P. 191–216.
- [175] Motta M., Sartori C. *Discontinuous solutions to unbounded differential inclusions under state constraints. Applications to optimal control problems* // Set-Valued Analysis. — 1999. — № 7. — P. 295–322.
- [176] Pereira F., Silva G., Vinter R. *Necessary Conditions of Optimality for Impulsive Differential Inclusions* // Proc. Conf. Decision and Control'98. — Tampa, FL, 1998. — P. 16–18.
- [177] Pereira F.L. *A maximum principle for impulsive control problems with state constraints* // Comp. Appl. Math. — 2000. — V. 19, № 2. — C. 137–155.
- [178] Pereira F., Silva G. *Necessary Conditions of Optimality for Vector-Valued Impulsive Control Problems* // Systems & Control Letters. — 2000. — № 40. — P. 205–215.
- [179] Pereira F.L., Filippova T.F. *On a solution concept to impulsive differential systems* // Tools for mathematical modelling, Math. Res. (St. Petersburg). — 2003. — № 9. — P. 350–355.
- [180] Pereira F.L., Silva G.N., Oliveira V. *Invariance for impulsive control systems* // Avtomatika i Telemekhanika. — 2008. — № 5. — P. 57–71.

- [181] Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. — N.Y.: Academic Press, 1970.
- [182] Rishel R.W. *An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures* // J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control. — 1965. — № 3. — P. 191–205.
- [183] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Impulsive Differential Equations*. — Singapore: World Scientific, 1995.
- [184] Sanfelice R.G., Goebel R., Teel A.R., Hespanha J., Tiwari A. *A Feedback Control Motivation for Generalized Solutions to Hybrid Systems* // HSCC. — 2006. — LNCS 3927. — P. 522–536.
- [185] Siljak D.D. *Large-Scale Dynamic Systems*. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [186] Silva G.N., Vinter R.B. *Measure Differential Inclusions* // J. of Mathematical Analysis and Applications. — 1996. — № 202. — P. 727–746.
- [187] Silva G.N., Litvinchev I.S., Rojas-Medar M., Brandao A.J.V. *State constraints in optimal impulsive controls* // Comput. and Math. Appl. — 2000. — V. 19, № 2. — P. 179–206.
- [188] Silva G.N., Vinter R.B. *Necessary optimality conditions for optimal impulsive control problem* // SIAM J. Contr. and Optim. — 1997. — V. 35, № 6. — P. 1829–1846.
- [189] Sussman H.J. *On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations* // The Annals of Probability. — 1978. — V. 6, № 1. — P. 19–41.
- [190] Sussmann H.J. *A maximum principle for hybrid optimal control problems* // Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision and Control. — Phoenix, 1999.
- [191] Tang S., Cheke R.A. *State-dependent impulsive models of integrated pest management (IPM) strategies and their dynamic consequences* // J. Math. Biol. — 2005. — V. 50, № 3. — P. 257–292.
- [192] Van der Shaft A.J., Schumacher H. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*. — London: Springer-Verlag, 2000.

- [193] Verriest E., Delmotte F., Egerstedt M. *Control of epidemics by vaccination* // Proc. of the American Control Conf. — Portland, 2005. — P. 985–990.
- [194] Vinter R.B., Pereira F.M.L. *A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories* // SIAM J. Control and Optim. — 1988. — № 26. — P. 205–229.
- [195] Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*. — N.Y.: Academic Press, 1972.
- [196] Yunt K., Glocker Ch. *Trajectory Optimization of Hybrid Mechanical Systems Using SUMT* // IEEE Proc. of Advanced Motion Control. — Istanbul, 2006. — P. 665–671.
- [197] Yunt K. *Impulsive optimal control of hybrid finite-dimensional lagrangian systems*: Ph.D. thesis; ETH. — Zurich, 2008.