

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

На правах рукописи

СОРОКИН СТЕПАН ПАВЛОВИЧ

**НЕРАВЕНСТВА ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ В ЗАДАЧАХ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ СИСТЕМАМИ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор В.А. Дыхта

Иркутск – 2012

Оглавление

Введение	4
0.1 Монотонные L -функции: определения и критерии в форме неравенств Гамильтона-Якоби	12
1 Бипозиционные решения неравенств Гамильтона-Якоби в классической задаче оптимального управления	23
1.1 Постановка задачи	23
1.2 Канонические достаточные условия оптимальности. Сравнение с альтернативными подходами	25
1.2.1 Базовые K -достаточные условия оптимальности . . .	25
1.2.2 Модифицированные достаточные условия Кротова с множеством L -функций	29
1.2.3 Модифицированные достаточные условия Каратеодори	36
1.3 Бипозиционные L -функции и канонические условия оптимальности	39
1.3.1 Оценки и точное описание интегральных воронок . .	39
1.3.2 Оценки множества соединимых точек	42
1.3.3 Необходимые и достаточные условия оптимальности .	45
1.4 Анализ достаточных условий оптимальности	49
1.5 Условия оптимальности с бипозиционными L -функциями в неклассической линейно-квадратичной задаче оптимального управления	52
1.6 Производящие функции и нестандартная двойственность . .	58
1.7 Примеры	61

2	Канонические условия оптимальности в задачах управления дискретно-непрерывными системами	67
2.1	Постановка задачи	67
2.2	Необходимые и достаточные условия оптимальности с бипозиционными L -функциями	71
2.3	Достаточные условия в форме принципа максимума Понтрягина	73
2.4	Макроэкономическая модель оптимизации перехода к новой технологии	77
2.5	Связь общих достаточных условий оптимальности с биекстремалами системы и принципом максимума Понтрягина . .	80
2.6	Теоретические приложения, обобщения и примеры	87
2.6.1	Задачи с разрывной зависимостью по времени	87
2.6.2	Исследование экстремалей с разрывным управлением	93
2.6.3	Использование производящих функций	98
3	Монотонность, достижимость и оптимальность в задачах управления дискретными системами	102
3.1	Монотонные L -функции для дискретных систем	102
3.2	Внешние оценки множества соединимых точек и достаточные условия оптимальности	106
3.3	Анализ достаточных условий оптимальности и примеры . .	108
3.4	Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума	114
3.5	Необходимые условия оптимальности со слабо монотонными и производящими функциями	118
3.5.1	Применение слабо монотонных L -функций	118
3.5.2	Производящие функции в задаче оптимизации, линейной по состоянию	122
3.6	Оптимизация дискретно-импульсных систем	127
	Заключение	135
	ЛИТЕРАТУРА	136

Введение

Актуальность работы. Дискретно-непрерывные динамические системы различной природы (составные, многоэтапные, импульсные) в последнее время стали объектом пристального внимания специалистов по динамике систем и оптимальному управлению. Объясняется это богатыми приложениями в механике, робототехнике, оптике, экономике, экологии и в других областях науки, которые потребовали применения сложных моделей, объединенных собирательным термином «гибридные». Системы этого широкого класса характеризуются наличием двух типов динамики — дискретной и непрерывной, и являются интересными с точки зрения математических свойств. Данная работа посвящена качественному исследованию задач оптимального управления дискретно-непрерывными системами.

Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (ПМ) для различных классов гладких дискретно-непрерывных задач оптимального управления были получены в целой серии работ. Их систематическое изложение дано в монографии Л.Т. Ащепкова [9]. В ней в качестве базовой модели выбрана задача оптимального управления с промежуточными (многоточечными) фазовыми ограничениями. Она оказалась достаточно удобной и универсальной не только для дискретно-непрерывных задач динамической оптимизации, но и для задач оптимизации разрывных систем. На это впервые обратил внимание В.В. Величенко; в указанной монографии этот факт последовательно раскрыт и реализован. Отметим, что в ней (и во многих других работах) доказательство ПМ основано на довольно трудоемкой технике многоточечного иголь-

чатого варьирования управления¹. В недавних работах А.В. Дмитрука и А.М. Кагановича [26, 122] детально показано, что намного более короткое и естественное доказательство принципа максимума может быть получено, если свести дискретно-непрерывную задачу оптимального управления к классической с общими (не разделенными) концевыми ограничениями. Это сведение достигается путем «размножения» фазовых и управляющих переменных, восходящего к работам Ю.М. Волина и Г.М. Островского [17], в комбинации с заменой времени. Иная техника вывода ПМ использована А.В. Арутюновым и А.И. Околевичем [103] для дискретно-непрерывных задач оптимизации со смешанными ограничениями (в отсутствие включения $u \in U$).

Большая серия работ Ф. Кларка, Р. Винтера, Г. Зуссмана, М. Гаравелло, Б. Пиколли и др. [118, 119, 132, 147, 148] посвящена «гибридному» принципу максимума для негладких дискретно-непрерывных задач оптимального управления. Исследуемые в них модели обладают большой общностью и требуют изощренной техники негладкого и вариационного анализа. Однако в гладких вариантах этих моделей полученные принципы максимума сводятся к уже упомянутым выше (и, в конечном счете, к классическому ПМ).

Отметим также задачи оптимального импульсного управления, которые в некоторых постановках имеют дискретно-непрерывный (гибридный) характер, но весьма специфичны как по методам анализа, так и результатам (их достаточно обстоятельное изложение до уровня принципа максимума и обзор литературы см. в [68]).

Обратим внимание, что во всех работах по дискретно-непрерывным задачам оптимального управления вопрос об обращении ПМ в достаточное условие оптимальности рассматривается только для линейно-выпуклых задач и нормальных экстремалей (например, в [9, 68]). Для гораздо более общих задач и экстремалей такое обращение получено в диссертации.

Достаточные условия оптимальности для различных классов задач оп-

¹ПМ для задач управления с промежуточными фазограничениями из [9] не вполне завершен: не установлено существование универсальных множителей Лагранжа, соответствующих оптимальному процессу задачи (что интерпретировалось как «явление распада ПМ»). В последствии автор естественным образом модифицировал свое доказательство и устранил недостаток.

тимизации дискретно-непрерывных (гибридных) динамических систем получались путем обобщения метода В.Ф. Кротова [60, 136] (в зарубежной литературе аналогичные результаты часто связываются с родственным методом проверочных функций К. Каратеодори [102, 114, 144, 156]) и метода динамического программирования Р. Беллмана [16, 115] — через использование квазивариационных неравенств для субрешений одноименного уравнения. Отметим здесь цикл работ, выполненных под руководством В.И. Гурмана [24], А.Б. Куржанского [54] (оптимальный синтез в линейно-выпуклых задачах), Ж.-П. Обена [104, 105] (примыкающих по технике оперирования функциями типа Ляпунова), М.С. Браникки (M.S. Branicky) [111], а также Р. Винтера с Г. Гелбрайтом [131], Л.Т. Ащепкова [9] и др. [10, 11, 24, 32, 34, 110, 131, 133, 134] (ввиду широты проблематики этот перечень отнюдь не полон).

Значительная часть диссертации выполнена в русле этих исследований, но отличается следующими особенностями:

- в соответствии с *канонической теорией оптимальности Гамильтона-Якоби* [3, 29, 33, 35–38, 123, 140, 141], достаточные и необходимые условия формулируются в терминах *множеств функций* типа Ляпунова (L -функций) — сильно и слабо монотонных решений соответствующих квазивариационных неравенств Гамильтона-Якоби (в общем случае не гладких); эти функции используются для построения внешних и внутренних оценок достижимых состояний управляемой динамической системы²;
- используется новый класс решений неравенств Гамильтона-Якоби, параметрически зависящих от начальной (или финальной) позиции.

В первой главе диссертации показано, что введение этого класса функций, названных *бипозиционными*, естественно уже для классических задач оптимального управления с общими концевыми ограничениями. В этой же главе установлено, что канонические достаточные условия оптимальности эффективнее условий Каратеодори и Кротова даже в модифицированных вариантах — с использованием множеств сильно монотон-

²Для классических задач оптимального управления с закрепленным концом траекторий близкий подход развивался в работах М.М. Хрусталева [99, 100], а также В.И. Гурмана [24], Г.Н. Константинова [58] (в части достаточных условий), но с единственным решением неравенств Гамильтона-Якоби.

ных L -функций. Естественно, что это свойство должно наследоваться и дискретно-непрерывными задачами. Поэтому развитие канонических условий оптимальности для задач оптимизации дискретно-непрерывных систем является актуальным.

Цель диссертационной работы состоит в получении необходимых и достаточных условий оптимальности дискретно-непрерывных процессов путем обобщения канонической теории оптимальности Гамильтона-Якоби на новые классы задач.

Объектом исследования являются задачи оптимального управления дискретно-непрерывными системами с включением в анализ базовых составляющих: классических и дискретных задач оптимального управления с общими концевыми ограничениями на траекторию.

Поясним, что как гибридный принцип максимума, так и условия оптимальности кротовского типа характеризуют оптимальную непрерывную динамику задач управления гибридной системой, оставляя в тени дискретную (которая не допускает классического вариационного анализа)³. Чтобы нивелировать этот крен, в условиях оптимальности второй главы диссертации акцент сделан на анализе непрерывной динамики, а дискретная «снесена» во вспомогательную дискретно-концевую экстремальную задачу. В третьей главе (теми же методами) исследуются уже дискретные задачи оптимизации, которые охватывают возможные варианты дискретно-концевых задач⁴.

Методы исследования базируются на свойствах сильной и слабой монотонности обобщенных решений неравенств Гамильтона-Якоби, оценках множеств соединимых точек управляемых систем, канонической теории оптимальности в оригинальных вариантах, принципе максимума Понтрягина и теории экстремальных задач.

Научная новизна. Для качественного исследования оптимизационных и позиционных задач теории управления дискретно-непрерывными системами введен новый класс *бипозиционных* решений неравенств (и урав-

³Лишь в нескольких работах «перекося» сделан в сторону дискретной динамики.

⁴Конечно, не все; например, рассматриваемые в [75] задачи требуют специальных подходов.

нений) Гамильтона-Якоби, параметрически зависящих от начальной или финальной позиции управляемой системы. Доказано, что этот класс L -функций (типа Ляпунова) необходим для обоснования канонической теории оптимальности уже в классических задачах оптимального управления с не разделенными концевыми ограничениями. Полученные условия локальной и глобальной оптимальности дискретно-непрерывных процессов с множествами бипозиционных L -функций существенно усиливают известные аналоги. В частности, из них выводятся наиболее общие достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для дискретно-непрерывных задач оптимизации без априорных предположений выпуклости, нормальности исследуемой экстремали, единственности соответствующих ей наборов множителей Лагранжа. Представляют интерес необходимые и достаточные условия оптимальности, усиливающие принцип максимума для дискретных задач оптимального управления в линейных системах с управляемыми коэффициентами. Переход к бипозиционным решениям неравенств Гамильтона-Якоби позволил получить способ построения субоптимальных бипозиционных управлений по нижней огибающей разрешающего множества L -функций, что невозможно в традиционном классе решений.

Теоретическая и практическая значимость работы. Развитие в работе методы могут применяться для качественного анализа и решения различных классов задач оптимального управления и для оценки достижимых состояний управляемых систем при общих концевых ограничениях. Исследованные многомерные модели оптимизации перехода экономики к новой технологии и распределения ресурсов иллюстрируют эффективность предлагаемых методов и условий оптимальности. Конструкция позиционного управления, экстремального к разрешающему множеству бипозиционных решений неравенств Гамильтона-Якоби, близка к традиционной и вполне реализуема в численных методах решения задач управления. Это относится и к необходимым условиям оптимальности с позиционными контруправлениями для задач оптимизации дискретных систем, линейных по состоянию.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проекта по

программе СО РАН «Нелокальные методы в теории управления динамическими системами» (№ гос. регистрации 01201001345), интеграционного проекта СО-УрО РАН № 85 «Качественный и численный анализ эволюционных уравнений и управляемых систем» и грантов РФФИ (проекты 07-01-00741-а, 11-01-00672-а, 09-01-16002-моб_з_рос, 10-01-09370-моб_з).

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Доказаны достаточные условия сильного и глобального экстремума с бипозиционными решениями неравенств Гамильтона-Якоби для классических, дискретных и дискретно-непрерывных задач оптимального управления с общими концевыми ограничениями и целевыми функционалами.
2. Получены достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для невыпуклых задач оптимального управления дискретными и дискретно-непрерывными системами.
3. Доказаны необходимые условия глобальной оптимальности с бипозиционными и производящими функциями для классических, дискретных и дискретно-непрерывных задач оптимального управления.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 155 наименования. Общий объем диссертации составляет 153 страницы.

Апробация работы. Результаты диссертации представлялись на следующих конференциях:

- 1) Школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи», Иркутск, 24 – 30 июня 2008 г.;
- 2) Конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения», Иркутск, 19 – 23 декабря 2008 г.;
- 3) Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, 27 января – 2 февраля 2009 г.;
- 4) Конференция аспирантов факультета экономической кибернетики БГУЭП, Иркутск, 8 апреля 2009 г.;

- 5) Всероссийская конференция «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях», Иркутск, 6 – 7 июня 2009 г.;
- 6) Международная конференция «Актуальные проблемы теории устойчивости и управления», Екатеринбург, 21 – 26 сентября 2009 г.;
- 7) Международная конференция «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения», Тамбов, 5 – 9 октября 2009 г.;
- 8) Конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения», Иркутск, 21 – 23 декабря 2009 г.;
- 9) XI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Иркутск — пос. Старая Ангасолка, 15 – 21 марта 2010 г.;
- 10) XI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Е.С. Пятницкого)», Москва, 1 – 4 июня 2010 г.;
- 11) II Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи», Иркутск, 28 июня – 4 июля 2010 г.;
- 12) V Международный симпозиум «Обобщенные постановки и решения задач управления», Улан-Батор, Монголия, 13 – 17 сентября 2010 г.;
- 13) Конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения», Иркутск, 20 – 23 декабря 2010 г.;
- 14) 42-ая Всероссийская Молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики», Екатеринбург, 30 января – 6 февраля 2011 г.;
- 15) Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти И.Г. Петровского, Москва, 29 мая – 4 июня 2011 г.;
- 16) Российско-монгольская конференция молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению, Иркутск – Ханх (Монголия), 17 – 21 июня 2011 г.;
- 17) XV Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск – пос. Листвянка, 23 – 29 июня 2011 г.;
- 18) VIII Международный конгресс ISAAC 2011, Москва, 22 – 27 августа 2011 г.;
- 19) V Международная научная конференция PhysCon 2011, Леон (Испания), 5 – 8 сентября 2011 г.;

- 20) V Международная конференция «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2011)», Тамбов, 10 – 14 октября 2011 г.;
- 21) Конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения», Иркутск, 28 – 30 ноября 2011 г.;
- 22) XII Прибайкальская школа-семинар молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии», Иркутск — пос. Старая Ангасолка, 19 – 24 марта 2012 г.

Результаты работы неоднократно обсуждались на семинарах в Институте динамики систем и теории управления СО РАН.

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликована 31 работа — [41–50, 74, 76–91, 126–128, 146]. Наиболее значимые результаты представлены в работах [44, 46–48, 50, 76, 77, 79, 85, 88, 90], 6 из которых входят в Перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК РФ, 3 статьи в других научных журналах, 2 полных текста докладов в трудах международных конференций.

Из совместных публикаций с В.А. Дыхтой и Г.Н. Яковенко в диссертацию вошли личные результаты автора. В совместных публикациях с научным руководителем [44, 46–48, 50] автору принадлежат все результаты, связанные с реализацией канонической теории оптимальности с бипозиционными решениями неравенств Гамильтона-Якоби для классических и дискретно-непрерывных задач оптимального управления; кроме того им построены примеры, стимулирующие развитие этого направления теории и иллюстрирующие ее сравнительную эффективность с аналогами. Проблематика исследований Г.Н. Яковенко не связана с темой диссертации.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 156 наименований. Общий объем диссертации составляет 154 страницы. Основные результаты главы 1 опубликованы в работах [44, 46, 48, 50, 79], главы 2 — в работах [48, 76, 77, 85], главы 3 — в работах [47, 88, 90].

Автор выражает глубокую признательность профессору В.А. Дыхте за научное руководство данной работой.

0.1 Монотонные L -функции: определения и критерии в форме неравенств Гамильтона-Якоби

Приведем необходимые нам понятия монотонности L -функций, подходящим образом адаптируя определения и критерии в форме неравенств Гамильтона-Якоби из [130, 144, 152] к рассматриваемым далее задачам. Тем самым мы избежим постоянного выписывания этих неравенств в дальнейшем.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \quad (S)$$

где множество $U \subset R^m$ замкнуто, а вектор-функция $f(t, x, u) : R \times R^n \times U \rightarrow R^n$ непрерывна; эти предположения на систему назовем *предварительными*.

Для части излагаемых далее критериев предварительных предположений недостаточно, поэтому введем следующие *стандартные предположения*:

- (Н1) функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных и локально липшицева по x равномерно по $(t, u) \in R \times U$;
- (Н2) существует действительное число $c > 0$, такое что $|f(t, x, u)| \leq c(1 + |x|)$ на $R^{n+1} \times U$;
- (Н3) множество $f(t, x, U)$ выпукло $\forall (t, x) \in R^{n+1}$;
- (Н4) множество U компактно.

Через σ обозначим любой *процесс управляемой системы* (S) , состоящий из пары функций $(x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$, определенных на некотором отрезке времени $\Delta = [t_0, t_1]$ (зависящем от σ), и таких, что траектория $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, а управление $u(\cdot)$ измеримо и ограничено на Δ , причем соотношения (S) выполнены почти всюду на Δ . Считаем, что $\dim x = n$, $\dim u = m$. Таким образом, любой процесс системы (S) записывается в виде $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$ (отрезок Δ не фиксирован и зависит от σ).

Обозначим через $\mathcal{T}_\Delta(x_0)$ множество траекторий системы (S) на Δ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, а через $\mathcal{T}_\Delta^-(t_1, x_1)$ — множество траекторий системы (S) на Δ с граничным условием $x(t_1) = x_1$ (левосторонние решения (S) в обратном времени).

Введем функцию Понтрягина

$$H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$$

(запись $a \cdot b$ обозначает скалярное произведение векторов a и b), нижний гамильтониан

$$h(t, x, \psi) = \min_{u \in U} H(t, x, \psi, u)$$

и расширенный нижний гамильтониан

$$\bar{h}(t, x, p) = p_t + h(t, x, p_x),$$

где $p = (p_t, p_x) \in R \times R^n$.

Для произвольной гладкой функции $\varphi(t, x) : R \times R^n \rightarrow R$ через

$$\dot{\varphi}(t, x, u) = \varphi_t(t, x) + H(t, x, \varphi_x(t, x), u)$$

обозначим её *полную производную в силу системы (S)* . Заметим, что для локально липшицевых функций полная производная определена почти всюду, а

$$\varphi_t(t, x) + \min_U H(t, x, \varphi_x(t, x), u) = \bar{h}(t, x, \nabla \varphi(t, x)), \quad \nabla \varphi = (\varphi_t, \varphi_x)$$

— запись классического оператора Гамильтона-Якоби. Зачастую используются верхний гамильтониан и операция $\max$ вместе $\min$, что несущественно; как правило, мы будем использовать нижний гамильтониан.

Некоторые производные негладких функций

Напомним некоторые понятия негладкого анализа [56, 130, 144, 152].

Пусть даны функция $g : R^n \rightarrow R$, точка $y \in R^n$, в которой g конечна, и вектор $w \in R^n$. Предел

$$D_+g(y)(w) = \limsup_{\eta \rightarrow 0+, v \rightarrow w} \frac{g(y + \eta v) - g(y)}{\eta}$$

называется *верхней производной Дини функции g в точке y по направлению w* . Нижнюю производную Дини можно определить формулой

$$D_-g(y)(w) = -D_+(-g(y))(w).$$

Заметим, что если g удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки y , то

$$D_+g(y)(w) = \limsup_{\eta \rightarrow 0+} \frac{g(y + \eta w) - g(y)}{\eta}.$$

Вектор $\xi \in R^n$ называется *проксимальным субградиентом* функции g в точке y , если существует окрестность Ω точки y и константа $c \geq 0$, такие что

$$g(z) \geq g(y) + \xi \cdot (z - y) - c|z - y|^2 \quad \forall z \in \Omega.$$

Множество всех проксимальных субградиентов в точке y обозначается $\partial_P g(y)$ и называется *проксимальным субдифференциалом*. Это множество может оказаться пустым (например, для функции $g(y) = -|y|$ множество $\partial_P g(0) = \emptyset$). Если функция g дифференцируема в точке y , то $\partial_P g(y) \subset \{g'(y)\}$; равенство выполняется, если функция g дважды непрерывно дифференцируема в y . Существование проксимального градиента ξ в точке y означает возможность локальной аппроксимации снизу функции g квадратичной функцией: точка $(y, g(y))$ есть точка касания графика функции g и минорирующей параболы крутизны ξ .

Проксимальный супердифференциал $\partial^P g(y)$ функции g в точке y может быть определен следующим образом:

$$\partial^P g(y) = -\partial_P(-g(y)).$$

Свойство $\partial^P g(y) \neq \emptyset$ означает, что в точке y функция g может быть локально аппроксимирована сверху квадратичной с касанием графиков в точке $(y, g(y))$.

Сильно и слабо монотонные L -функции

Пусть $I = (a, b)$ — некоторый интервал времени, а $G_I = I \times R^n$ — соответствующий цилиндр.

Определение 1. Непрерывную функцию $\varphi : G_I \rightarrow R$ назовем:

а) *сильно возрастающей* на G_I (в прямом времени), если

$$(\forall (t_0, x_0) \in G_I) (\forall t_1 \in I, t_1 \geq t_0) (\forall x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}(x_0))$$

$$\varphi(t, x(t)) \text{ возрастает на } [t_0, t_1]^5;$$

б) *слабо возрастающей* на G_I (в прямом времени), если

$$(\forall (t_0, x_0) \in G_I) (\forall t_1 \in I, t_1 \geq t_0) (\exists x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}(x_0)) :$$

$$\varphi(t, x(t)) \text{ возрастает на } [t_0, t_1].$$

Как видно из определения, сильно и слабо возрастающие L -функции отличаются друг от друга тем, что первые возрастают вдоль *всех траекторий* системы (S) , проходящих по G_I , а слабо монотонные — лишь вдоль *некоторых* (хотя бы одной). Свойства сильной и слабой монотонности очевидным образом распространяются на убывающие L -функции, а также могут рассматриваться в обратном времени (относительно системы $(-S)$). Дополним определение 1 некоторыми типами монотонных L -функций, используемыми в дальнейшем.

Определение 2. Непрерывную функцию $\varphi : G_I \rightarrow R$ назовем:

в) *слабо убывающей* на G_I (в прямом времени), если

$$(\forall (t_0, x_0) \in G_I) (\forall t_1 \in I, t_1 \geq t_0) (\exists x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}(x_0)) :$$

$$\varphi(t, x(t)) \text{ убывает на } [t_0, t_1];$$

г) *сильно убывающей* на G_I в обратном времени, если

$$(\forall (t_1, x_1) \in G_I) (\forall t_0 \in I, t_0 \leq t_1) (\forall x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}^-(x_1))$$

$$\varphi(t, x(t)) \text{ убывает в обратном времени на } [t_0, t_1];$$

⁵Неубывающие функции мы называем возрастающими, а невозрастающие — убывающими, т.е. возрастание (убывание) трактуется в нестрогом смысле.

д) слабо возрастающей на G_I в обратном времени, если

$$(\forall (t_1, x_1) \in G_I) (\forall t_0 \in I, t_0 \leq t_1) (\exists x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}^-(x_1)) : \\ \varphi(t, x(t)) \text{ возрастает в обратном времени на } [t_0, t_1].$$

Множества всех функций, удовлетворяющих условиям а), в), г), д), соответственно обозначим через $L_{s\uparrow}(G_I)$, $L_{w\downarrow}(G_I)$, $L_{s\downarrow}^-(G_I)$ и $L_{w\uparrow}^-(G_I)$, где верхний индекс « $-$ » указывает на обратную направленность времени. Если множество G_I совпадает с расширенным фазовым пространством $R \times R^n$ системы (S) , то будем опускать указание области в этих обозначениях.

Критерии сильной и слабой монотонности

Для конструктивной проверки свойств монотонности и разработки методов нахождения L -функций с этими свойствами используются соответствующие инфинитезимальные (дифференциальные) критерии типа неравенств Гамильтона-Якоби [130, 144, 152]. Мы приведем их краткий обзор для различных классов L -функций и предположений относительно свойств управляемой системы.

Пусть выполнены стандартные предположения (Н1)–(Н4). Тогда включение $\varphi \in L_{s\uparrow}(G_I)$ эквивалентно выполнению любого из следующих неравенств:

$$\dot{\varphi}(t, x, u) \geq 0 \quad \forall u \in U, \quad \dot{\forall} (t, x) \in G_I, \quad (1)$$

$$\bar{h}(t, x, \nabla \varphi(t, x)) \geq 0 \quad \dot{\forall} (t, x) \in G_I, \quad (2)$$

когда φ локально липшицева; и

$$\inf_{u \in U} D_+(-\varphi(t, x))(-1, -f(t, x, u)) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in G_I, \quad (3)$$

$$\bar{h}(t, x, p) \geq 0 \quad \forall p = (p_t, p_x) \in \partial_P \varphi(t, x), \quad \forall (t, x) \in G_I, \quad (4)$$

когда φ непрерывна.

Заметим, что множества $L_{s\uparrow}(G_I)$ и $L_{s\downarrow}^-(G_I)$ совпадают даже в классе непрерывных L -функций.

Примечательно, что неравенства (1), (2) гарантируют сильную монотонность локально липшицевой функции даже при предварительных предположениях на систему (S) (неравенство (2) должно быть дополнено условием достижимости функцией $H(t, x, \varphi_x(t, x), \cdot)$ своей точной нижней грани на U при почти всех $(t, x) \in G_I$).

Теперь укажем инфинитезимальные критерии для слабо монотонных функций в предположениях (H1)–(H4).

Включение $\varphi \in L_{w\downarrow}(G_I)$ эквивалентно выполнению любого из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \forall (t, x) \in G_I \quad \exists u \in U : \quad \dot{\varphi}(t, x, u) &\leq 0, \\ \bar{h}(t, x, \nabla \varphi(t, x)) &\leq 0 \quad \forall (t, x) \in G_I, \end{aligned} \quad (5)$$

когда φ гладкая; и

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} D_- \varphi(t, x)(1, f(t, x, u)) &\leq 0 \quad \forall (t, x) \in G_I, \\ \bar{h}(t, x, p) &\leq 0 \quad \forall p = (p_t, p_x) \in \partial_P \varphi(t, x), \quad \forall (t, x) \in G_I, \end{aligned} \quad (6)$$

когда φ непрерывна.

Заметим, что в стандартных предположениях подмножества гладких функций из $L_{w\downarrow}(G_I)$ и $L_{w\uparrow}^-(G_I)$ совпадают; однако уже для класса липшицевых функций это не так (см. ниже пример 1).

Для непрерывной функции φ включение $\varphi \in L_{w\uparrow}^-(G_I)$ эквивалентно выполнению любого из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} D_- (-\varphi(t, x))(-1, -f(t, x, u)) &\leq 0 \quad \forall (t, x) \in G_I, \\ \bar{h}(t, x, p) &\leq 0 \quad \forall p = (p_t, p_x) \in \partial^P \varphi(t, x), \quad \forall (t, x) \in G_I. \end{aligned} \quad (7)$$

Наконец, отметим, что критерии с обобщенными производными справедливы и для полунепрерывной снизу φ ⁶.

⁶Для полунепрерывной снизу функции φ сильное возрастание на G_I означает, что $\forall (t_0, x_0) \in G_I$, $\forall t_1 \in I$, $t_1 \geq t_0$, $\forall x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}(x_0)$ неравенство $\varphi(t, x(t)) \geq \varphi(t_0, x_0)$ выполняется при всех $t \in [t_0, t_1]$. Остальные свойства монотонности определяются подобным образом.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = u, \quad u \in [-1, 1], \quad G_I = R \times R,$$

для которой расширенный нижний гамильтониан имеет вид

$$\bar{h}(t, x, p) = p_t - |p_x|, \quad p = (p_t, p_x) \in R^2.$$

Возьмем вогнутую липшицевую функцию $\varphi(t, x) = t - |x|$ и воспользуемся проксимальными критериями. Выпишем для φ проксимальные суб- и супердифференциалы:

$$\partial_P \varphi(t, x) = \begin{cases} \{(1, 1)\}, & x < 0, \\ \emptyset, & x = 0, \\ \{(1, -1)\}, & x > 0; \end{cases}$$

$$\partial^P \varphi(t, x) = \begin{cases} \{(1, 1)\}, & x < 0, \\ \{(1, d) \mid d \in [-1, 1]\}, & x = 0, \\ \{(1, -1)\}, & x > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что φ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби в субдифференциальной форме —

$$\bar{h}(t, x, p) = 0, \quad \forall p = (p_t, p_x) \in \partial_P \varphi(t, x), \quad \forall (t, x) \in R^2$$

— и поэтому является слабо убывающей в прямом времени в силу (6) (и, одновременно, сильно возрастающей в силу (4)). Но она не удовлетворяет супердифференциальному условию слабого возрастания в обратном времени (7). Действительно, для $(1, 0) \in \partial^P \varphi(t, 0)$ выполняется неравенство

$$\bar{h}(t, 0, (1, 0)) = 1 > 0 \text{ при всех } t \in R.$$

В данном примере наличие свойства слабого убывания в прямом времени и отсутствие слабого возрастания в обратном времени можно установить без использования инфинитизимальных критериев следующим образом. Возьмем произвольную точку (t_0, x_0) , $x_0 \geq 0$. Выберем процесс $\tilde{\sigma}$ управляемой системы с траекторией $\tilde{x}(t) = t - t_0 + x_0$.

$$\Rightarrow \quad \forall t \geq t_0 \quad \varphi(t, \tilde{x}(t)) = t - |t - t_0 + x_0| = t_0 - x_0 \quad (= \text{const}).$$

Если $x_0 < 0$, то выбирать следует процесс с траекторией $\tilde{x}(t) = -t + t_0 + x_0$. Значит φ слабо убывает на $R \times R$ в прямом времени.

Теперь покажем, что φ не является слабо возрастающей на $R \times R$ в обратном времени, т.е.

$$\exists (t_1, x_1) : \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}^-(x_1) \quad \exists t_* \leq t_1 \quad \varphi(t_*, x(t_*)) < \varphi(t_1, x_1).$$

В качестве (t_1, x_1) возьмем $(0, 0)$. Очевидно, что

$$\forall t < 0 \quad \max_{x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, 0]}^-(0)} \varphi(t, x(t)) = t$$

достигается при $\tilde{x}(t) \equiv 0$, но функция $\varphi(t, \tilde{x}(t)) = t$ строго убывает в обратном времени, и при $t_* < t_1 = 0$ имеем $\varphi(t_*, \tilde{x}(t_*)) < 0$.

Обратную ситуацию иллюстрирует функция $\hat{\varphi}(t, x) = t + |x|$, слабо возрастающая в обратном времени, но не обладающая свойством слабого убывания в прямом времени.

Отметим, что обе функции φ и $\hat{\varphi}$ удовлетворяют п. в. классическому уравнению Гамильтона-Якоби, соответствующему равенству в (5), но при этом не обладают ожидаемыми свойствами слабой монотонности. $\square$

Свойства монотонности могут быть установлены и другими критериями, использующими, например, суб- и супердифференциалы, обобщенный дифференциал Кларка, конусы касательных направлений и другие конструкции негладкого анализа [56, 93, 105–108, 152], а также специальные предположения полувогнутости функции φ [4, 99, 100, 109, 113, 130], однако, мы ограничимся представленными.

Отметим, что неравенства Гамильтона-Якоби для L -функций приведены без каких-либо краевых условий. Однако в дальнейшем будет показано, что они носят *квазивариационный характер*: краевые условия неявно задаются через конечномерную концевую задачу.

Замечание 1. В дальнейшем выполнение свойств монотонности будет требоваться не только на цилиндрических множествах вида G_I , но и на некоторых произвольных связных множествах $G \subset R \times R^n$ (необязательно открытых). В качестве таких множеств будут выступать области, на которых рассматриваются задачи, оценки интегральных воронок управляемых

систем или окрестности траекторий исследуемых на оптимальность процессов. Критерии монотонности в этих случаях должны выполняться в точках множеств G .

Управления, экстремальные относительно L -функций

В методе неравенств Гамильтона-Якоби и динамическом программировании приходится иметь дело с разрывными позиционными управлениями (стратегиями), соответствующими им решениями управляемой системы и стратегиями, экстремальными по отношению к решению неравенства Гамильтона-Якоби того или иного типа. Опишем кратко подход к этим задачам, принятый в диссертации.

а) Пусть $\bar{G}_\Delta = [t_0, t_1] \times R^n$ и $v(t, x) : \bar{G}_\Delta \rightarrow U$ — некоторое позиционное управление, определенное всюду на указанном множестве, а в остальном — произвольная (как правило разрывная) функция. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x, v(t, x)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (8)$$

для системы (S) , замкнутой позиционным (синтезирующим) управлением v . Поскольку (8) — система с разрывной правой частью, то необходимо указать, что понимается под её решением.

Мы примем концепцию Красовского–Субботина [59, 135] (см. также [97, 98]) как конструктивную и весьма универсальную.

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка времени $\Delta = [t_0, t_1]$:

$$\rho = \{t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N+1} = t_1\}.$$

Этому разбиению и заданному начальному условию поставим в соответствие *ломаную Эйлера* $x_\rho(\cdot)$ как решение системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_\rho(t) &= f(t, x_\rho(t), u(\theta_i, x_\rho(\theta_i))), \quad x(t_0) = x_0, \\ t &\in [\theta_i, \theta_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N \end{aligned}$$

с кусочно постоянным управлением. Тогда *решение Эйлера* разрывной системы (8) определяется как любой равномерный предел некоторой последовательности ломаных $\{x_{\rho_k}\}$ при $|\rho_k| \rightarrow 0$, где

$$|\rho_k| = \text{diam}(\rho_k) := \max\{\theta_{i+1} - \theta_i \mid 0 \leq i \leq N\}.$$

Таким образом, системе (8) сопоставляется множество решений Эйлера.

б) Пусть φ — классическое (гладкое) решение неравенства Гамильтона-Якоби (2) на $\bar{G}_\Delta = \Delta \times R^n$. Определим φ -экстремальное многозначное отображение

$$U_\varphi(t, x) = \underset{u \in U}{\operatorname{Argmin}} H(t, x, \varphi_x, u) \quad (9)$$

При стандартных предположениях оно имеет непустые, замкнутые образы и полунепрерывно сверху. Любой селектор этого отображения — функцию $\varphi : \bar{G}_\Delta \rightarrow U$ назовем φ -экстремальным позиционным управлением. Соответствующие ему решения описаны в п. а).

Пусть теперь φ — локально липшицево решение соответствующего неравенства (3) или (4). Теперь φ -экстремальное отображение (9) надлежит переопределить, т.к. производные φ_t , φ_x не существуют на множестве нулевой меры Лебега из $\bar{G}_\Delta$. В этом случае используется регуляризация — гладкая аппроксимация функции φ [57, 59, 92, 93, 116, 144], или K -стратегия [97, 98]. Мы не будем останавливаться на деталях, поскольку в диссертации они не используются.

Конструктивные методы поиска L -функций

Для нахождения монотонных L -функций могут применяться естественные модификации всех конструктивных методов, разработанных в ходе развития подхода В.Ф. Кротова [24, 60, 136], а также теории обобщенных решений уравнений и неравенств Гамильтона-Якоби [92, 93, 109, 113]. Напомним некоторые из них.

1) Прием нормировки, применимый в случае, если для некоторой функции $\varphi(t, x)$, локально липшицевой на G , функция

$$m(t) = \inf_{x \in G^t} \bar{h}(t, x, \nabla \varphi(t, x))$$

(G^t означает сечение множества G по t) оказалась интегрируемой на $(a, b) = \operatorname{pr}_t G$. Тогда, как легко проверяется, функция

$$\tilde{\varphi}(t, x) = \varphi(t, x) - \int_a^t m(\tau) d\tau$$

удовлетворяет неравенству Гамильтона-Якоби (2) на G , т.е. сильно возрастает на этом множестве.

2) Поиск в классе линейно-квадратичных функций

$$\varphi(t, x) = x' S(t) x + \psi'(t) x + c(t) \text{ }^7.$$

Оперирование такими функциями тесно связано с достаточными условиями оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина и локальными квадратичными условиями оптимальности.

3) Метод кратных максимумов [24] и нелинейного преобразования Гоха [33, 40] (совсем не обязательно только для нерегулярных задач с неограниченным линейным управлением — в случае ограниченности последнего после преобразований этими методами подсистемы, зависящие от управления, не отбрасываются). Второй из методов проиллюстрирован ниже на примерах 1.3 и 1.4, а в параграфе 3.6 он обобщается на задачу оптимального управления дискретно-импульсной системой (системой «с толчками»).

4) Метод Беллмана, точнее, поиск L -функций среди решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Заметим, однако, что в диссертации не исследуются задачи построения оптимального синтеза — оптимизация идет в классе программных управлений. В таких задачах оперирования решениями нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби рассматриваются как исключительные («идеальные») в силу известных трудностей.

⁷Здесь и далее в матричных операциях «штрих» означает транспонирование.

Глава 1

Бипозиционные решения неравенств Гамильтона-Якоби в классической задаче оптимального управления

1.1 Постановка задачи

В этой главе рассматривается следующая задача оптимального управления (задача (P)):

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (S)$$

$$q \in Q, \quad (1.1)$$

$$J[\sigma] = l(q) \rightarrow \min. \quad (1.2)$$

Здесь через σ обозначается любой *процесс управляемой системы* (S) , состоящий из пары функций $(x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$, определенных на некотором отрезке времени $\Delta = [t_0, t_1]$ (зависящем от σ), и таких, что траектория $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, а управление $u(\cdot)$ измеримо и ограничено на Δ , причем соотношения (S) выполнены почти всюду на Δ . Считаем, что $\dim x = n$, $\dim u = m$. Таким образом, любой процесс описывается равенством $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$. Далее, через q обозначается *концевой вектор*, соответствующий любому процессу, т.е. $q = q(\sigma) = (t_0, x(t_0); t_1, x(t_1))$. Функции f , l и множества U , Q заданы.

Процесс σ назовем *допустимым*, если его компоненты удовлетворяют ограничению (1.1). Пусть Σ — непустое множество всех допустимых процессов задачи (P) . Ставится задача поиска *оптимального процесса* на

множестве Σ , т.е. пары функций

$$\bar{\sigma} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid t \in \bar{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1]) \in \Sigma,$$

для которой

$$J[\bar{\sigma}] \leq J[\sigma] \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Заметим, что здесь и далее $J[\bar{\sigma}] = l(\bar{q})$, где $\bar{q} = q(\bar{\sigma}) = (\bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0); \bar{t}_1, \bar{x}(\bar{t}_1))$.

Сформулированная задача является общей задачей оптимального управления в форме Майера без поточечных фазовых и смешанных ограничений. Её общность состоит в не разделенной зависимости конечного ограничения (1.1) и целевого функционала (1.2) от начальной и конечной позиции $(t_0, x(t_0))$, $(t_1, x(t_1))$. Как известно, другие типы задач оптимального управления без поточечных фазовых и смешанных ограничений приводятся к данной *стандартной форме* путем элементарных приемов. В частности, задача (P_Δ) с *фиксированным отрезком времени* $\Delta = [t_0, t_1]$ получается из (P) исключением моментов t_0 , t_1 из концевых векторов q ($q = (x(t_0), x(t_1))$), из аргументов функции l и включением конечного множества Q в пространство $R^{2n} = R^n \times R^n$. А задача (P_0) с *фиксированным левым концом* $x(t_0) = x_0$ — исключением подвектора начальных позиций $q_0 = (t_0, x(t_0))$ из q , фиксацией соответствующих аргументов функции l и рассмотрением вместо множества Q его сечения — $Q_1 = \{(t_1, x_1) \mid (t_0, x_0; t_1, x_1) \in Q\}$.

Для ясности мы ограничиваемся задачей на минимум (а не на инфимум) целевого функционала J , хотя многие результаты без труда переносятся и на случай минимизирующих последовательностей $\{\sigma^k\} \subset \Sigma$. Часть таких ситуаций охватывается соответствующими замечаниями.

Далее, помимо условий глобальной оптимальности исследуемого процесса $\bar{\sigma}$ нас будут интересовать и условия *сильного минимума* на этом процессе. Для задачи (P) это понятие формализуется следующим образом [33, 140].

Пусть G — открытое множество в пространстве переменных t , x , содержащее график исследуемой траектории $\bar{x}(\cdot)$. Обозначим через $(P(G))$ сужение задачи (P) на множество G , т.е. задачу (P) , дополненную огра-

ничением

$$(t, x(t)) \in G \quad \forall t \in \bar{\Delta}.$$

Тогда процесс $\bar{\sigma}$ *доставляет сильный минимум* в задаче (P) , если найдется такое открытое множество $G \subset R \times R^n$, $(t, \bar{x}(t)) \in G \quad \forall t \in \bar{\Delta}$, что $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс в задаче $(P(G))$.

Для задач с фиксированным временем это определение сводится к традиционному понятию сильного минимума в смысле полунормы $\|\sigma\| = \|x(\cdot)\|_{C(\Delta)} = \max_{\Delta} |x(t)|$.

Описанное сужение задачи (P) и переход к локальной оптимальности оказываются полезными с точки зрения развиваемых методов, поскольку расширяют сферу их применимости. Например, к ним естественно обращаться, если подходящие решения неравенств типа Гамильтона-Якоби не существуют глобально.

Всюду в дальнейшем предполагается, что функции f, l непрерывны, а множества U, Q замкнуты. Эти *предварительные предположения* будут уточняться по ходу изложения.

1.2 Канонические достаточные условия оптимальности. Сравнение с альтернативными подходами

Приведем базовую, прединфинитезимальную версию достаточных условий канонической теории с семейством негладких традиционных L -функций [4, 29, 33, 123, 140, 141]. На этом же уровне общности рассмотрим методологически близкие модификации достаточных условий оптимальности Кротова [37, 136, 136], Каратеодори [114, 117, 144, 150, 152, 153] и проведем их сравнение с K -достаточными условиями. Эти результаты отражены в совместных публикациях [44, 46], в которых автор построил и проанализировал соответствующие примеры и контрпримеры.

1.2.1 Базовые K -достаточные условия оптимальности

Определение 1.2.1. Множество

$$\mathcal{R} = \{q = (t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid \exists x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}(x_0) : x(t_1) = x_1\}$$

назовем *множеством соединимых точек* системы (S) .

Очевидно, что имеет место равенство

$$\min(P) = \min\{l(q) \mid q \in \mathcal{R} \cap Q\},$$

где для краткости принято обозначение $\min(P) := \min\{J[\sigma] \mid \sigma \in \Sigma\}$ ¹.

Пусть $\Phi = \{\varphi^\alpha(t, x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subset L_{s\uparrow}$ — произвольное семейство сильно возрастающих L -функций. Введем множество

$$E(\Phi) = \{q = (t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid \varphi^\alpha(t_1, x_1) - \varphi^\alpha(t_0, x_0) \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Ясно, что $\mathcal{R} \subset E(\Phi)$; поэтому назовем $E(\Phi)$ *внешней оценкой* множества $\mathcal{R}$.

Рассмотрим следующую конечномерную задачу $(EP(\Phi))$, которую будем называть *концевой*:

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in E(\Phi) \cap Q.$$

Очевидно, что имеет место оценка

$$\inf(EP(\Phi)) \leq \min(P),$$

откуда вытекают достаточные условия глобальной оптимальности канонической теории для задачи (P) .

Теорема 1.2.1. *Пусть для процесса $\bar{\sigma} \in \Sigma$ существует такое семейство $\Phi = \{\varphi^\alpha(t, x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subset L_{s\uparrow}$, что концевой вектор $\bar{q}$ является точкой глобального минимума в задаче $(EP(\Phi))$. Тогда процесс $\bar{\sigma}$ доставляет глобальный минимум в задаче (P) .*

Любое множество функций Φ , удовлетворяющее условиям теоремы 1.2.1 вместе с процессом $\bar{\sigma}$, будем называть *разрешающим* для задачи (P) и процесса $\bar{\sigma}$ (в смысле канонической теории оптимальности) или, кратко, K -разрешающим. Очевидно, что множество Φ является разрешающим для задачи (P) и $\bar{\sigma}$ тогда и только тогда, когда

$$J[\bar{\sigma}] = \min(EP(\Phi)).$$

¹В дальнейшем используются подобные обозначения для значений других рассматриваемых оптимизационных задач.

Ясно, что множество Φ , разрешающее для некоторого $\bar{\sigma}$, позволяет установить оптимальность всех глобально оптимальных процессов задачи (P) , и поэтому называется разрешающим (K -разрешающим) для задачи (P) .

Замечание 1.1. Требование сильного возрастания функций $\varphi \in \Phi$ в теореме 1.2.1 можно ослабить, если априори известно некоторое множество $W \subset R^{n+1}$, сильно инвариантное для системы (S) [25, 144], или априорно оценивающее траектории системы в расширенном фазовом пространстве. Это свойство в данном контексте означает выполнение включения

$$(t, x(t)) \in W \text{ на } \Delta \text{ вдоль всех } \sigma \in \Sigma.$$

В этом случае можно требовать сильной монотонности функций $\varphi \in \Phi$ только вдоль траекторий, график которых проходит по W , а в экстремальной задаче $(EP(\Phi))$ добавить ограничения

$$(t_0, x(t_0)) \in W, \quad (t_1, x(t_1)) \in W.$$

Подобным образом следует поступать и в случае зависимости W от начальной позиции (t_0, x_0) . Попутно отметим, что нарушение свойств управляемости системы, как правило, доставляет серьезные трудности для методов кротовского типа.

Для внешних оценок множеств достижимости и соединимых точек управляемых систем могут использоваться дифференциальные неравенства, отличные от Гамильтона-Якоби, например, типа Чаплыгина или Важевского [64, 66]. По отношению к K -достаточным условиям оптимальности они рассматриваются как вспомогательные (экзогенные) для формирования априорных оценок фазовых состояний динамической системы. Их более целенаправленное и систематическое применение к задачам теории управления естественно реализовать в рамках общего метода сравнения (метода вектор-функций Ляпунова) в динамике систем [14, 15, 65, 137]. Ясно, что этот комментарий связан с замечанием 1.1.

Обратим внимание, что неравенства Гамильтона-Якоби для L -функций разрешающего множества носят *квазивариационный характер*: через концевую задачу $(EP(\Phi))$ неявно задается краевое условие в форме неравенств, обращающихся в равенство в точке $\bar{\sigma}$. Действительно, мы имеем

неравенства

$$l(q) \geq l(\bar{q}),$$

$$\Delta\varphi(q) := \varphi(t_1, x_1) - \varphi(t_0, x_0) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \Phi$$

на множестве Q , причем в невырожденном случае (см. параграф 1.4) для «существенных» $\varphi \in \Phi$ $\Delta\varphi(\bar{q}) = 0$. Поэтому точность аппроксимации множества $\mathcal{R}$ оценкой $E(\Phi)$ играет не столь определяющую роль, как может показаться с первого взгляда.

Ключевым моментом канонических условий оптимальности является оперирование семейством $\Phi = \{\varphi^\alpha(t, x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ сильно возрастающих L -функций, зависящим от некоторого произвольного параметра. Поскольку условие сильной монотонности функций φ^α является неявным дифференциальным неравенством в частных производных, то множество $\mathcal{A}$ может быть бесконечномерным и состоять из функций, например, задающих начальное (граничное) условие для дифференциального неравенства. Иначе говоря, множество Φ может иметь функциональный произвол. Показательные примеры с таким свойством рассмотрел А. А. Милютин [140, 141] (см. также [4]).

Для дальнейшего анализа задачи (P) нам важен частный случай, когда в роли параметров выступает начальная позиция (t_0, x_0) или финальная (t_1, x_1) , так что множество Φ можно описать равенством вида

$$\Phi = \{\varphi(t, x; t_0, x_0) \mid (t_0, x_0) \in Q_0\},$$

в котором функция φ обладает нужным свойством монотонности по основным аргументам (t, x) при фиксированных $(t_0, x_0) \in Q_0$. Именно эта интерпретация параметра приводит к понятию *бипозиционных* L -функций, на важность и естественность которых для задачи (P) было обращено внимание в работах [4, 37]. Однако в данном разделе мы не будем развивать эту тему, оставаясь в рамках традиционных L -функций и их семейств (множеств).

1.2.2 Модифицированные достаточные условия Кротова с множеством L -функций

Приведем модификацию условий Кротова [37, 38, 125], использующую произвольное множество L -функций $\Phi_K \subset L_{s\uparrow}$, и основанную на конструкции укороченного обобщенного лагранжиана задачи (P) .

Рассмотрим семейство (по $\varphi \in \Phi_K$) конечномерных задач $(EP_K(\varphi))$:

$$\varkappa[\varphi](q) := l(q) + \varphi(t_0, x_0) - \varphi(t_1, x_1) \rightarrow \inf; \quad q \in E(\varphi) \cap Q,$$

где $\varkappa$ выступает в качестве лагранжиана, а множество $E(\varphi) = E(\{\varphi\})$ строится по одноэлементному семейству $\{\varphi\}$. Очевидно, что для любой $\varphi \in \Phi_K$

$$\min(P) \geq \inf(EP_K(\varphi)),$$

откуда следует оценка

$$\min(P) \geq \sup_{\varphi \in \Phi_K} \{\inf(EP_K(\varphi))\} =: v(\Phi_K) \quad \forall \Phi_K \subset L_{s\uparrow}$$

и достаточные условия глобальной оптимальности типа Кротова с множеством L -функций.

Теорема 1.2.2. Пусть для процесса $\bar{\sigma} \in \Sigma$ существует такое множество $\Phi_K \subset L_{s\uparrow}$, что

$$J[\bar{\sigma}] = v(\Phi_K).$$

Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P) .

Любое множество Φ_K , удовлетворяющее теореме, будем называть *разрешающим по Кротову*.

Поясним, что достаточные условия Кротова в стандартном и наиболее распространенном в приложениях варианте оперируют одной сильно возрастающей функцией φ , причем следствие монотонности — включение $q \in E(\varphi)$ — не входит в ограничения концевой задачи $(EP_K(\varphi))$, и дополнительно требуется постоянство φ вдоль траектории $\bar{x}(\cdot)$. Последнее условие автоматически следует из равенства $J[\bar{\sigma}] = v(\{\varphi\})$. Следствие монотонности было включено в концевую задачу в работе [29], а впоследствии В.Ф. Кротовым в один из вариантов достаточных условий

Кротова (см. [136, теорема 2.7], а также [24]). В обобщенных достаточных условиях Кротова используются также последовательности функций $\{\varphi^k\} \subset L_{s\uparrow}$, переход к которым инспирирован стремлением приблизить достаточные условия к необходимым (см. работы Р. Винтера с коллегами [149–151, 153, 154] и обзор в [136]). Отметим, что наиболее общие необходимые условия оптимальности обсуждаемого типа [117, 151] оперируют всем множеством липшицевых (и даже гладких) сильно монотонных L -функций (решений соответствующего неравенства Гамильтона-Якоби). Однако они установлены только для задачи (P_0) с фиксированной начальной позицией (t_0, x_0) , причем рассматриваются как обоснование метода проверочных функций Каратеодори (см. следующий раздел). Для задачи (P) необходимость условий Кротова не установлена².

Вернемся к связи K -условий с кротовскими.

Предложение 1.2.1. *Если множество Φ_K — разрешающее по Кротову, то оно является разрешающим и в смысле канонической теории.*

Доказательство. Из неравенства

$$\inf (EP_K(\varphi)) \leq \inf (EP(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \Phi_K,$$

справедливого в силу включения $\Phi_K \subset L_{s\uparrow}$, и совпадения допустимых множеств в задачах $(EP_K(\varphi))$ и $(EP(\varphi))$, получаем

$$l(\bar{q}) = v(\Phi_K) \leq \inf (EP(\Phi_K)) \leq l(\bar{q}).$$

Отсюда заключаем, что множество Φ_K — K -разрешающее. □

Нетрудно привести примеры, в которых для некоторого множества $\Phi \subset L_{s\uparrow}$ реализуется строгое неравенство

$$v(\Phi) < \inf (EP(\Phi)),$$

причем множество Φ оказывается разрешающим в смысле K -достаточности. Следовательно, канонические достаточные условия оптимальности являются более тонкими, нежели условия кротовского типа.

²Все доказательства этих необходимых условий базируются на построении разрешающей последовательности L -функций как функций Белмана последовательности задач с оштрафованными терминальными ограничениями задачи (P_0) . Ясно, что этот подход динамического программирования не применим к задаче (P) без радикальных изменений.

Пример 1.1 ([29]). $\dot{x} = 0 \cdot u$, $|u| \leq 1$, $J[\sigma] = x(0)x(1) \rightarrow \min$. Линейные функции $\varphi^{1,2}(x) = \pm x$, очевидно, сильно возрастают (удовлетворяют неравенству $\bar{h} = \varphi_t \geq 0$ и являются первыми интегралами системы). Положим $\Phi = \{\varphi^1, \varphi^2\}$. Тогда $E(\Phi) = \{(x_0, x_1) \mid x_0 = x_1\}$ и совпадает с множеством точек, соединимых траекториями системы. Из конечной задачи ($EP(\Phi)$) получаем её решение $\bar{x}_0 = \bar{x}_1 = 0$ и, следовательно, оптимальными оказываются все процессы вида $\bar{\sigma} = (\bar{x} \equiv 0, \bar{u}(\cdot))$ допустимо (заметим, что произвольное допустимое управление экстремально относительно φ^1 и φ^2 , т.е. любое $u(t) \in \arg \min\{\varphi_x^{1,2} \cdot 0 \cdot u \mid |u| \leq 1\}$). Таким образом, Φ — разрешающее множество в смысле канонической теории (причем для всех модификаций данного примера).

В то же время гладкой функции Кротова в этом примере не существует [29], а если взять $\Phi_K = \Phi$, то это множество оказывается не разрешающим по Кротову. Действительно, рассмотрим сначала задачу ($EP_K(\varphi^1)$):

$$\kappa[\varphi^1](x_0, x_1) = x_0x_1 - x_1 + x_0 \rightarrow \inf; \quad x_1 - x_0 \geq 0.$$

Зафиксируем произвольное $x_0 < 0$ и рассмотрим последовательность точек $q^k = (x_0, x_1^k)$, где $x_1^k = -kx_0$, $k > 0$. Очевидно, что эти точки допустимы в задаче ($EP_K(\varphi^1)$) и

$$\kappa[\varphi^1](q^k) = -kx_0^2 + (k+1)x_0 \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, $\inf(EP_K(\varphi^1)) = -\infty$. Аналогично обстоит дело с задачей ($EP_K(\varphi^2)$), откуда заключаем, что $v(\Phi) = -\infty < J[\bar{\sigma}]$ и теорема 1.2.2 не работает.

Для перехода в дальнейшем к бипозиционным L -функциям отметим следующее обстоятельство: если взять нижнюю огибающую K -разрешающего множества Φ , т.е. $\varphi_*(x) = \min\{\varphi^1(x), \varphi^2(x)\} = -|x|$, то множество $E(\varphi_*)$ оказывается гораздо шире $E(\Phi)$, а φ_* — не разрешающей. Таким образом, стандартный для задач типа (P_0) переход от множества разрешающих функций к одной L -функции не работает. Однако если заменить φ^1 , φ^2 на бипозиционные $\tilde{\varphi}^1(x; x_0) = x - x_0$, $\tilde{\varphi}^2(x; x_0) = -x + x_0$ (также из $L_{s\uparrow}$), то множество $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2\}$ — K -разрешающее, как и его нижняя огибающая липшицевая $\tilde{\varphi}_*(x; x_0) = -|x - x_0|$, причем $E(\tilde{\varphi}_*) = E(\Phi)$.

Мы видим, что в классе бипозиционных L -функций оказался возможным переход к разрешающей нижней огибающей. Этот факт будет установлен далее в целом для задач типа (P) .

Пример 1.2 ([38]). $\dot{x} = xu$, $u \in [0, 1]$, $x(0)$, $x(1)$ свободны, $J[\sigma] = x^4(0) + x^4(1) \rightarrow \min$. Очевидно, что процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x} \equiv 0, \bar{u} \equiv 0)$ является глобально оптимальным. Неравенство Гамильтона-Якоби для гладких сильно возрастающих L -функций имеет следующий вид:

$$\bar{h} = \varphi_t + \min_{u \in [0,1]} \{\varphi_x x u\} = \begin{cases} \varphi_t + \varphi_x x, & \varphi_x x < 0, \\ \varphi_t, & \varphi_x x \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, для L -функций, не зависящих времени, сильное возрастание гарантируется неравенством $\varphi_x x \geq 0$. Из функций простой структуры ему удовлетворяет $\varphi = x^2$, и мы положим $\Phi = \{\varphi = x^2\}$. Тогда φ -экстремальное позиционное управление $u^\varphi(x) \equiv 0$, а в концевой задаче $(EP(\Phi)) = (EP(\varphi))$:

$$x_0^4 + x_1^4 \rightarrow \min; \quad x_1^2 - x_0^2 \geq 0$$

решением является вектор $\bar{q} = (\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_1 = 0)$. Тем самым формально — с помощью K -достаточных условий — установлена глобальная оптимальность $\bar{\sigma} = 0$.

Рассмотрим теперь кротовскую концевую задачу $(EP_K(\varphi))$:

$$\kappa[\varphi](q) = x_0^4 + x_1^4 - x_1^2 + x_0^2 \rightarrow \min; \quad x_1^2 - x_0^2 \geq 0.$$

Покажем, что $\bar{q}$ не является её решением и, следовательно, $\varphi = x^2$ — не функция Кротова. Действительно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеются допустимые точки $q^\varepsilon = (x_0 = \varepsilon^2, x_1 = \varepsilon) \rightarrow \bar{q} = 0$, для которых

$$\kappa[\varphi](q^\varepsilon) = -\varepsilon^2 + o(\varepsilon^4) < 0 = \kappa[\varphi](\bar{q}).$$

Следовательно, условия теоремы 1.2.2 не выполнены с $\Phi_K = \{\varphi = x^2\}$, т.е. это множество не является разрешающим по Кротову.

Заметим, что эта задача абсолютно вырождена в смысле [4,38] — дифференциальная связь в ней не играет роли, и $\varphi \equiv 0$ — разрешающая функция

Кротова и для K -условий. Этот пример показывает, во-первых, что запас возможных K -разрешающих L -функций шире множества разрешающих по Кротову. Во-вторых, минимум в точке $\bar{\sigma}$ здесь «пологий» — четвертого порядка $\gamma = l(q)$, а не типичного $\gamma' = |q|^2$ (порядок минимума здесь понимается в смысле [36,125]), — а в таких случаях не тривиальные L -функции простой структуры (квадратичные) не могут быть разрешающими по Кротову.

Пример 1.3 получается из предыдущего заменой функционала на $J[\sigma] = x(0)x(1)$. Тогда оценка, порождаемая функцией $\varphi = x^2$, оказывается слушком грубой, но пример можно решить K -достаточными условиями, если учесть, что множества $W_1 = \{x \geq 0\}$, $W_2 = \{x \leq 0\}$ сильно инвариантны, причем функции $\varphi^1(x; x_0) = x - x_0$, $\varphi^2(x; x_0) = x_0 - x$ сильно возрастают на W_1 , W_2 соответственно. Поскольку задача рассматривается на $W_1 \cup W_2$, то она распадается на две, скажем, $(P(W_1))$ и $(P(W_2))$. Легко убедиться, что бипозиционные функции φ^1 , φ^2 — разрешающие для этих задач. Например, для $(P(W_1))$ соответствующая конечная задача

$$x_0x_1 \rightarrow \min; \quad x_1 - x_0 \geq 0, \quad x_0, x_1 \geq 0$$

имеет решение $\bar{q} = (\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_1 = 0)$, а φ^1 -экстремальное управление

$$u^1(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \text{любое } u \in U, & x = 0 \end{cases}$$

порождает траекторию $\bar{x} \equiv 0$ с произвольным допустимым $\bar{u}(\cdot)$. Тот же результат дает задача $(P(W_2))$, так что оптимальные процессы исходной задачи получены.

Если этот прием декомпозиции задачи использовать в методе Кротова с функциями φ^1 , φ^2 в качестве пробных, то мы не достигнем цели — конечные вспомогательные задачи не имеют решения (инфимумы в них равны $-\infty$). Например, для $(P(W_1))$ задача $(EP_K(\varphi^1))$ такова:

$$\kappa[\varphi^1](q) = x_0x_1 + x_0 - x_1 \rightarrow \inf; \quad x_1 - x_0 \geq 0, \quad x_0, x_1 \geq 0.$$

Если взять любое $x_0 \in (0, 1)$, а $x_1 = k > 0$, то получим допустимую последовательность, на которой $\kappa \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Таким образом, с данными φ^1, φ^2 метод Кротова не работает, и причина здесь, в общем-то, та же, что и в примере 1.2: на оптимальных процессах задачи реализуется минимум более тонкий («пологий»), нежели линейные порядки $\gamma^{1,2} = \varphi^{1,2} \geq 0$ в задачах $(P(W_1)), (P(W_2))$ соответственно; поэтому обобщенный лагранжиан $\mathcal{L}$ оказывается грубым.

Использованный прием учета инвариантных множеств достаточно специфичен, и гораздо более предпочтительнее другой, более универсальный способ решения этой и других задач с линейным управлением — использование нелинейного преобразования Гоха³ [28, 31, 33]. Если ориентироваться на его комбинацию с методом неравенств Гамильтона-Якоби, то необходимо, во-первых, дополнить управляемую систему гоховской фазовой переменной w с элементарной динамикой

$$\dot{w} = u, \quad w_0 := w(t_0) = 0$$

и, во-вторых, искать далее подходящие L -функции (в данном контексте — разрешающие) из условия независимости полной производной $\dot{\varphi}$ в силу дополненной системы от управления. В нашем примере имеем:

$$\dot{\varphi} = \varphi_t + \varphi_x x u + \varphi_w u, \quad \varphi = \varphi(t, x, w)$$

и условие независимости дает линейное уравнение в частных производных

$$x\varphi_x + \varphi_w = 0.$$

Его общее решение имеет вид $\varphi(t, x, w) = S(t, \eta(x, w))$, где

$$\eta(x, w) = x e^{-w}$$

— первый интеграл характеристического уравнения $dx/dw = x$, а $S(t, y)$ — произвольная гладкая функция.

Заметим, во-первых, что дальнейший ход решения равносильен применению K -условий к преобразованной задаче, которая получается из исходной заменой $(x, u) \rightarrow (y = \eta(x, w), w, u)$, и, во-вторых, если S не зависит от t ,

³Обычно это преобразование применяется для расширения задачи путем введения импульсных режимов. Но в задачах с ограниченным множеством U такое расширение не возможно, хотя само преобразование оказывается эффективным, поскольку приводит к новой задаче с элементарной зависимостью от управления.

то указанные φ тривиально удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби дополненной системы (являются её первыми интегралами) и, следовательно, сильно возрастают. Из этого множества L -функций, как обычно, сначала попробуем простейшую — $S(y) = y$, т.е. полагаем $\varphi(x, w) = \eta(x, w)$. Соответствующая концевая задача ($EP(\varphi)$) такова:

$$x_0 x_1 \rightarrow \min; \quad x_1 e^{-w_1} - x_0 = 0, \quad w_1 = w(1) \in [0, 1]$$

(последнее ограничение следует из очевидной оценки $w(t) \in [0, t]$). Её решение ($\bar{x}_0 = \bar{x}_1 = \bar{w}_1 = 0$), как и ранее, задает оптимальные процессы задачи с траекторией $\bar{x} \equiv 0$, а функция $\varphi = \eta$ — разрешающая.

Пример 1.4. $\dot{x} = 0, \dot{y} = xu, |u| \leq 1, y(0) = 0, x^2(0) + y^2(1) \leq 1, J[\sigma] = y(1) \rightarrow \min$.

Расширенный нижний гамильтониан управляемой системы имеет вид

$$\bar{h}(t, x, y, p) = p_t - |p_y x|, \quad p = (p_t, p_x, p_y).$$

Так как фаза y не существенна (не входит в правую часть системы, а целевой функционал линеен по y), то решения неравенства $\bar{h} \geq 0$ естественно искать в виде

$$\varphi(t, x, y) = S(t, x) + y,$$

где функция S подлежит нахождению. Для нее получается дифференциальное неравенство

$$S_t(t, x) - |x| \geq 0,$$

которое является обыкновенным, так как не содержит S_x . Поэтому выгодно перейти к равенству, т.е. к уравнению Гамильтона-Якоби. Интегрируя, получим липшицевую $S(t, x) = t|x|$ и, следовательно, $\varphi(t, x, y) = t|x| + y$, а φ -экстремальное позиционное управление

$$u^\varphi(x) \in -\text{sign } x = -\text{sign } x_0.$$

Положим $\Phi = \{\varphi, \varphi' = x\}$, где φ' — очевидный первый интеграл системы. Тогда в концевой задаче ($EP(\Phi)$) оптимальны две точки

$$\bar{q} = \left(\bar{x}_0 = \bar{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \bar{y}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \tilde{q} = \left(\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tilde{y}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Соответствующие им программные управления находятся с помощью u^φ :

$$\bar{u}(t) = u^\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \equiv -1, \quad \tilde{u}(t) = u^\varphi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \equiv 1.$$

Таким образом, K -условия дают два оптимальных процесса.

Тот же результат можно получить, если вместо Φ рассмотреть множество $\Phi_1 \subset L_{s\uparrow}$ из двух гладких функций

$$\varphi^2(x, y, w) = y - xw, \quad \varphi^3(t, z) = t + w,$$

где w — гоховская переменная (см. пример 1.3). Введение гоховских переменных часто оказывается эффективным в линейных по управлению системах, обладающих плохими свойствами управляемости [33].

Заметим, что ни одно из семейств Φ , Φ_1 не удовлетворяют модификации достаточных условий оптимальности Кротова даже с учетом замечания 1.1.

1.2.3 Модифицированные достаточные условия Каратеодори

Метод проверочных функций Каратеодори [114, 117, 144, 150, 152, 153], как и метод Беллмана, непосредственно не применим к задаче (P) с общим конечным ограничением. Поэтому рассмотрим более простую задачу (P_0) с фиксированной начальной позицией (t_0, x_0) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \\ x(t_0) &= x_0, \quad q := (t_1, x(t_1)) \in Q, \\ J[\sigma] &= l(t_1, x(t_1)) \rightarrow \inf, \end{aligned}$$

где целевая функция l непрерывна, а множество Q , задающее терминальное ограничение, замкнуто.

Приведем формулировку модифицированных условий Каратеодори, которая оперирует семейством сильно возрастающих L -функций. Сразу отметим, что на проверочные функции Каратеодори φ накладывается дополнительное граничное условие

$$\varphi(t, x) \leq l(t, x) \quad \forall (t, x) \in Q. \quad (1.3)$$

Теорема 1.2.3. Пусть для процесса $\bar{\sigma} \in \Sigma$ существует такое множество функций $\Phi_C \subset L_{s\uparrow}$, удовлетворяющих граничному условию (1.3), что

$$J[\bar{\sigma}] = v(\Phi_C) := \sup\{\varphi(t_0, x_0) \mid \varphi \in \Phi_C\}.$$

Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P_0) .

Множество Φ_C , удовлетворяющее вместе с процессом $\bar{\sigma} \in \Sigma$ условиям теоремы 1.2.3, назовем разрешающим по Каратеодори.

Предложение 1.2.2. Если для допустимого процесса $\bar{\sigma}$ множество Φ_C является разрешающим по Каратеодори, то $\Phi = \Phi_C$ является разрешающим множеством в смысле канонического подхода.

Доказательство. При $\Phi = \Phi_C$ из (1.3) и ограничений задачи $(EP(\Phi))$ следует цепочка неравенств

$$l(q) \geq \varphi(q) \geq \varphi(t_0, x_0) \quad \forall \varphi \in \Phi_C,$$

откуда

$$\inf(EP(\Phi)) \geq v(\Phi) = l(\bar{q}).$$

Но строгое неравенство здесь невозможно, поскольку $\bar{q}$ — допустимая точка в задаче $(EP(\Phi))$. Следовательно, $\bar{q}$ доставляет глобальный минимум в задаче $(EP(\Phi))$, и процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в соответствии с теоремой 1.2.1. $\square$

Таким образом, любое разрешающее по Каратеодори множество является разрешающим в смысле K -достаточных условий оптимальности. Теорема 1.2.1 оставляет больше свободы в выборе подходящих L -функций, поскольку они не обязаны удовлетворять граничному условию (1.3).

Пример 1.5 ([38]). $\dot{x} = xu + b(t)u$, $x(0) = 0$, $u \in [0, 1]$, $J[\sigma] = x^3(1) \rightarrow \min$, где функция $b(t) \geq 0$ на $[0, 1]$. Очевидно, что система имеет сильно инвариантное множество $W = \{(t, x) \mid x \geq 0\}$; с учетом замечания 1.1 можно ограничиться рассмотрением функций, сильно возрастающих лишь на W . Тогда для $\varphi = x$ имеем

$$\dot{\varphi} = \dot{x} \geq 0 \text{ на } W,$$

и, следовательно, φ сильно возрастает на W . Положим $\Phi = \{\varphi = x\}$. Соответствующая задача $(EP(\Phi))$

$$x^3 \rightarrow \min; \quad x \geq 0$$

имеет глобальный минимум в точке $\bar{x} = 0$. Следуя канонической теории, заключаем, что $\bar{\sigma} = 0$ — глобально оптимальный процесс. Однако функция $\varphi = x$ не удовлетворяет граничному условию (1.3), поэтому она не является проверочной по Каратеодори. Более того, φ не является и функцией Кротова, потому что точка $\bar{x} = \bar{x}(1) = 0$ не доставляет глобального минимума в задаче $(EP_K(\varphi))$:

$$\kappa[\varphi](x) = x^3 - x \rightarrow \min; \quad x \geq 0.$$

В этом примере $\bar{\sigma}$ — вырожденная экстремаль, т.е. удовлетворяет принципу максимума Понтрягина в нестрогой форме ($H_u(\bar{\sigma}) \equiv 0$). Однако даже наиболее полные квадратичные достаточные условия локальной оптимальности для вырожденных экстремалей [121] не позволяют установить и локальной оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ (так как $l_q(\bar{q}) = 0$, $l_{qq}(\bar{q}) = 0$, то первая и вторая вариации целевого функционала на $\bar{\sigma}$ равны нулю).

Отметим, что для K -разрешающей функции $\varphi = x$ не выполняется традиционная связь $\varphi_x(t, \bar{x}(t)) = \psi(t)$ между градиентом разрешающей L -функции и коэкстремалью, т.е. решением сопряженного уравнения из принципа максимума. Это соотношение появляется, если заменить функцию $l = x^3$ на $\mathcal{L} = x$, а целевой функционал $J[\sigma]$ — на $I[\sigma] = \mathcal{L}(x(1))$. Заметим, что после такой замены процесс $\bar{\sigma}$ становится невырожденной экстремалью Понтрягина. $\square$

Примененный здесь прием замены целевого функционала называется переходом к функционалу сравнения. Он эффективно применим к вырожденным задачам управления и предоставляет свободу в задании граничного условия для L -функций. Применительно к задаче (P) и процессу $\bar{\sigma}$ переход к функционалу сравнения может быть формализован следующим образом.

Функционал $I[\sigma] = \mathcal{L}(q)$ назовем функционалом сравнения для процес-

са $\bar{\sigma}$, если функция $\mathcal{L} : R^{2n+2} \rightarrow R$ удовлетворяет неравенству

$$(l(q) - l(\bar{q}))(\mathcal{L}(q) - \mathcal{L}(\bar{q})) \geq 0 \quad \forall q \in Q.$$

В этом случае назовем $\mathcal{L}$ функцией сравнения для $\bar{q}$ на множестве Q .

Ясно, что свойство глобальной оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ инвариантно по отношению к замене $J[\sigma]$ на функционал сравнения для $\bar{\sigma}$. Однако это не означает эквивалентности задач оптимизации с целевыми функционалами J и I .

1.3 Бипозиционные L -функции и канонические условия оптимальности

1.3.1 Оценки и точное описание интегральных воронок

Сначала приведем результаты по оценкам и точному описанию интегральных воронок управляемой системы (S) с использованием произвольных множеств традиционных L -функций, обладающих определенным свойством монотонности. Эти результаты лежат в основе оценок множества соединимых точек системы (S) и условий оптимальности в задаче (P) , речь о которых пойдет далее.

Интегральной воронкой системы (S) , выходящей из замкнутого множества X_0 в момент времени t_0 , называют множество

$$\mathcal{R}(t_0, X_0) = \{(t, x(t)) \mid x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t]}(x_0), x_0 \in X_0, t \geq t_0\}.$$

Нас будут интересовать внешние, внутренние и точные оценки этого множества.

Пусть $G_{\geq} = G_{[t_0, +\infty)} = [t_0, +\infty) \times R^n$. Для любой L -функции $\varphi(t, x)$ и произвольного множества Φ таких функций определим следующие множества в R^{n+1} :

$$E(\varphi) = \{(t, x) \in G_{\geq} \mid \varphi(t, x) \geq 0\},$$

$$E_+(\Phi) = \bigcap_{\varphi \in \Phi} E(\varphi) \quad \text{и} \quad E_-(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} E(\varphi).$$

Для любого множества $E \subset R^{n+1}$ обозначим через E^t его сечение по t ; в частности, примем обозначение

$$E^t(\varphi) = \{x \in R^n \mid \varphi(t, x) \geq 0\}.$$

Справедливы следующие утверждения об оценках и точном описании интегральной воронки.

Лемма 1.3.1. а) Если $\Phi \subset L_{s\uparrow}(G_{\geq})$ и

$$\forall \varphi \in \Phi \quad E^{t_0}(\varphi) \supseteq X_0,$$

то $\mathcal{R}(t_0, X_0) \subseteq E_+(\Phi)$.

б) Если $\Phi \subset L_{w\uparrow}^-(G_{\geq})$ и

$$\forall \varphi \in \Phi \quad E^{t_0}(\varphi) \subseteq X_0, \tag{1.4}$$

то $\mathcal{R}(t_0, X_0) \supseteq E_-(\Phi)$.

в) Если $\varphi \in L_{s\uparrow}(G_{\geq}) \cap L_{w\uparrow}^-(G_{\geq})$ и $E^{t_0}(\varphi) = X_0$, то $\mathcal{R}(t_0, X_0) = E(\varphi)$.

Доказательство. Утверждение а) леммы очевидно.

б) Возьмем некоторую функцию $\varphi \in \Phi$ и произвольную точку $(t_*, x_*) \in G_{\geq}$, для которой $\varphi(t_*, x_*) \geq 0$ (т.е. $(t_*, x_*) \in E(\varphi) \subseteq E_-(\Phi)$). Тогда из свойства слабого возрастания в обратном времени функции φ получаем, что

$$\exists x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_*]}^-(x_*) : \quad \varphi(t_0, x(t_0)) \geq \varphi(t_*, x_*) \geq 0.$$

Из условия (1.4) заключаем, что существует траектория системы (S) , исходящая из множества X_0 и достигающая в момент t_* точки x_* . Из произвольности выбора (t_*, x_*) следует, что каждая $\varphi \in \Phi$ порождает внутреннюю оценку интегральной воронки. Очевидно, что объединение внутренних оценок также является таковой, а значит выполнено включение $E_-(\Phi) \subseteq \mathcal{R}(t_0, X_0)$.

в) Точное описание множества $\mathcal{R}(t_0, X_0)$ является очевидным следствием первых двух утверждений. $\square$

Теоретически идеальное утверждение в) представляется мало эффективным с точки зрения приложений: единственная функция, точно описывающая столь геометрически сложный объект как множество достижимости нелинейной системы, должна обладать существенными особенностями,

да и само её нахождение из уравнения Гамильтона-Якоби является проблематичным. Поэтому на первый план выходят внешние и внутренние оценки множества $\mathcal{R}(t_0, X_0)$ и оперирование множествами L -функций, предпочтительно гладких.

Из леммы 1.3.1 очевидным образом вытекают оценки множества достижимости системы (S) в заданный момент t_1 , которое является сечением интегральной воронки $\mathcal{R}(t_0, X_0)$ при $t = t_1$:

$$\mathcal{R}^{t_1}(t_0, X_0) = \{x(t_1) \mid x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}(x_0), x_0 \in X_0\}.$$

Кроме того, на этом пути получают оценки множества достижимости к заданному моменту времени t_1 из (t_0, X_0) —

$$\bigcup_{t_0 \leq t \leq t_1} \mathcal{R}^t(t_0, X_0),$$

а также оценки множества точек x фазового пространства, достижимых к некоторому моменту времени траекториями системы (S) , исходящими в момент времени t_0 из множества X_0 —

$$\bigcup_{t \geq t_0} \mathcal{R}^t(t_0, X_0)$$

(это множество совпадает с проекцией интегральной воронки $\mathcal{R}(t_0, X_0)$ на фазовое пространство).

Обратимся к аппроксимации интегральной воронки системы (S) в обратном времени и множеств управляемости на заданное замкнутое целевое множество X_1 в момент t_1 — множества

$$\mathcal{C}(t_1, X_1) = \{(t, x(t)) \mid x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t, t_1]}^-(x_1), x_1 \in X_1, t \leq t_1\}$$

и его сечений. Эти оценки получаются аналогично сформулированным путем обращения времени.

Пусть $G_{\leq} = G_{(-\infty, t_1]} = (-\infty, t_1] \times R^n$. Для любой L -функции $\varphi(t, x)$ и произвольного множества Φ таких функций введем множества

$$Z(\varphi) = \{(t, x) \in G_{\leq} \mid \varphi(t, x) \leq 0\},$$

$$Z_+(\Phi) = \bigcap_{\varphi \in \Phi} Z(\varphi) \quad \text{и} \quad Z_-(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} Z(\varphi).$$

Лемма 1.3.2. а) Если $\Phi \subset L_{s\downarrow}^-(G_{\leq})$ и

$$\forall \varphi \in \Phi \quad Z^{t_1}(\varphi) = \{x \in R^n \mid \varphi(t_1, x) \leq 0\} \supseteq X_1,$$

то $\mathcal{C}(t_1, X_1) \subseteq Z_+(\Phi)$.

б) Если $\Phi \subset L_{w\downarrow}(G_{\leq})$ и $\forall \varphi \in \Phi \quad Z^{t_1}(\varphi) \subseteq X_1$, то $\mathcal{C}(t_1, X_1) \supseteq Z_-(\Phi)$.

в) Если $\varphi \in L_{s\downarrow}^-(G_{\leq}) \cap L_{w\downarrow}(G_{\leq})$ и $Z^{t_1}(\varphi) = X_1$, то $\mathcal{C}(t_1, X_1) = Z(\varphi)$.

1.3.2 Оценки множества соединимых точек

Рассмотрим задачу построения оценок множества соединимых точек

$$\mathcal{R} = \{q = (t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid \exists x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0, t_1]}(x_0) : x(t_1) = x_1\}.$$

Покажем, что аппроксимации этого множества могут быть получены из оценок интегральной воронки другой управляемой системы, полученной из (S) несложными преобразованиями.

Через Σ_f обозначим множество всех процессов $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta = [t_0, t_1])$ системы (S) (необязательно допустимых в задаче (P)). Разобьем изложение на микропункты.

1) Наряду с (S) рассмотрим следующую систему (S') , получающуюся заменой времени (переходом к новому времени τ):

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1, & t(0) = t_0 \quad (\Rightarrow t(\tau) = t_0 + \tau), \\ \frac{dy}{d\tau} = f(t(\tau), y(\tau), v(\tau)), & v(\tau) \in U, \quad \tau \in [0, \tau_1] =: I. \end{cases}$$

В (S') будем рассматривать процессы

$$\sigma' = (t(\tau), y(\tau), v(\tau) \mid \tau \in I)$$

со свободным τ_1 и соответствующие им концевые наборы

$$q' = q'(\sigma') = (t_0, y_0; t_1, y_1; \tau_1),$$

где $t_0 = t(0)$, $t_1 = t(\tau_1)$, $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(\tau_1)$. Множество всех процессов σ' системы (S') обозначим через Σ'_f .

Пусть $\sigma \in \Sigma_f$. Определим отображение $\mathcal{F} : \Sigma_f \rightarrow \Sigma'_f$ формулами:

$$\mathcal{F}(\sigma) = \left(t(\tau) = t_0 + \tau, y(\tau) = x(t(\tau)), v(\tau) = u(t(\tau)) \mid \tau \in [0, t_1 - t_0] \right).$$

Оно определено однозначно, причем для $\sigma' = \mathcal{F}(\sigma)$ имеем

$$q' = q'(\sigma') = (t_0, x_0; t_1, x_1; t_1 - t_0) = (q(\sigma), t_1 - t_0).$$

Легко проверяется, что отображение $\mathcal{F}$ обратимо, и

$$\mathcal{F}^{-1}(\sigma') = \left(x(t) = y(\tau(t)), u(t) = v(\tau(t)) \mid t \in [t_0, t_1] \right),$$

причем $\tau(t) = t - t_0$, $t_0 = t(0)$, $t_1 = t(\tau_1)$.

При отображении $\mathcal{F}^{-1}$ концевые наборы связаны соотношениями

$$q = q(\sigma) = (t_0 = t(0), x_0 = y(0); t_1 = t(\tau_1) = t_0 + \tau_1, x_1 = y(\tau_1)),$$

если $\sigma = \mathcal{F}^{-1}(\sigma')$, т.е. q фактически совпадает с q' без последней компоненты.

Таким образом, на первом шаге система (S) сведена к автономной системе (S') с фиксированным начальным временем.

2) Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ — множества соединимых точек систем (S) и (S') . Из предыдущего следует, что они находятся во взаимно однозначном соответствии. Более того,

$$q(\sigma) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (q(\sigma), t_1 - t_0) \in \mathcal{R}',$$

т.е. множество $\mathcal{R}$ совпадает с объединением всех сечений множества $\mathcal{R}'$ при $\tau_1 > 0$:

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\tau_1 > 0} (\mathcal{R}')^{\tau_1}.$$

3) Изучение $\mathcal{R}$ в исходной системе можно свести к случаю изучения интегральной воронки некоторой системы со специальным начальным множеством C_0 . Для этого можно рассмотреть систему

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U \quad (1.5)$$

с начальным условием $(z(t_0), x(t_0)) \in C_0 := \{(z_0, x_0) \mid z_0 = x_0\}$. Очевидно, что множество Σ_f всех процессов системы (S) и множество допустимых

процессов системы (1.5) находятся во взаимно однозначном соответствии, а множество

$$\mathcal{A} = \{ (t_0, z(t_1); t_1, x(t_1)) \mid (z(\cdot), x(\cdot)) \text{ — траектория системы (1.5),} \\ z(t_0) = x(t_0) \}$$

совпадает с $\mathcal{R}$ (с точностью до обозначений). Однако здесь момент времени t_0 нефиксирован.

Аналогичный прием применим и к системе (S') .

4) На этом шаге сведем задачу описания множества соединимых точек $\mathcal{R}$ системы (S) к описанию интегральной воронки из начального множества новой системы (S'') .

Применяя преобразование из 3), перейдем от системы (S') к системе (S'') путем введения дополнительных фазовых переменных $\theta = t_0$, $z = y_0$ уравнениями

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{z} = 0$$

с начальными условиями

$$\theta(0) = t(0), \quad z(0) = y(0).$$

Получим систему (S'') :

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{dz}{d\tau} = 0, \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dy}{d\tau} = f(t, y, v), \quad v(t) \in U$$

с фиксированным начальным моментом времени $\tau_0 = 0$, начальным множеством $X_0 = \{(\theta_0, z_0, t_0, y_0) \mid \theta_0 = t_0, z_0 = y_0\}$ и свободными τ_1 , $t(\tau_1)$, $\theta(\tau_1)$, $z(\tau_1)$, $y(\tau_1)$.

Для процессов σ'' этой системы вектор подвижных концов траекторий есть

$$q'' = q''(\sigma'') = (\eta(0), \eta(\tau_1), \tau_1),$$

где для краткости введен фазовый вектор $\eta = (\theta, z, t, y)$ системы (S'') . Ясно, что вектор q'' содержит все компоненты q' , а также подвектор концевых значений θ , z .

Рассмотрим сечение при $\tau = \tau_1$ интегральной воронки системы (S'') , выпущенной в момент $\tau = 0$ из множества X_0 :

$$(\mathcal{R}''(0, X_0))^{\tau_1} = \{ (\theta(\tau_1), z(\tau_1); t(\tau_1), y(\tau_1)) \mid (\theta(\cdot), z(\cdot), t(\cdot), y(\cdot)) \text{ —} \\ \text{траектория системы } (S''), \theta(0) = t(0), z(0) = y(0) \}.$$

Из сказанного выше следует, что

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\tau_1 \geq 0} (\mathcal{R}''(0, X_0))^{\tau_1},$$

где справа стоит множество всех точек, достижимых к некоторому моменту времени траекториями системы (S'') .

Таким образом, применением леммы 1.3.1 для построения оценок множеств достижимости системы (S'') можно получить оценки множества соединимых точек $\mathcal{R}$ системы (S) .

Указанная связь множества соединимых точек системы (S) с интегральной воронкой системы (S'') из начального множества $X_0 = \{(t_0, x_0; t_0, x_0) \mid (t_0, x_0) \in R^{n+1}\}$ вновь приводит к необходимости оперирования *бипозиционными* L -функциями, зависящими от дополнительных аргументов-параметров (t_0, x_0) , роль которых выше играли фазовые переменные θ, z . Определения бипозиционных L -функций и их применение для оценок множества соединимых точек и в канонических условиях оптимальности даются в следующем пункте

Заметим, что аналогичные рассуждения относительно системы (S) , рассматриваемой в обратном времени (т.е. относительно системы $(-S)$), приводят к естественному введению бипозиционных L -функций, зависящих не от начальной позиции (t_0, x_0) системы (S) , а от конечной — (t_1, x_1) .

1.3.3 Необходимые и достаточные условия оптимальности

Определение 1.3.1. Непрерывную функцию $V(t, x; t_0, x_0) : R^{2n+2} \rightarrow R$ назовем

а) *сильно возрастающей*, если $\forall (t_0, x_0) \in R^{n+1} \quad V(\cdot, \cdot; t_0, x_0) \in L_{s\uparrow}$ и

$$V(t_0, x_0; t_0, x_0) = 0; \tag{1.6}$$

б) *слабо возрастающей в обратном времени*, если $\forall (t_0, x_0) \in R^{n+1}$
 $V(\cdot, \cdot; t_0, x_0) \in L_{w\uparrow}^-$ и

$$\forall x \neq x_0 \quad V(t_0, x; t_0, x_0) < 0. \tag{1.7}$$

Подобным образом определяются сильно и слабо убывающие бипозиционные L -функции и бипозиционные L -функции, монотонные в обратном времени. Указанные определения имеют аналоги для функций, дополнительно зависящих не от начальной, а от конечной позиции (t_1, x_1) системы (S) . Дальнейшее изложение в основном идет с использованием бипозиционных L -функций $V(t, x; t_0, x_0)$.

Чтобы отличать бипозиционные L -функции от традиционных функций $\varphi(t, x)$, для соответствующих семейств бипозиционных L -функций примем следующие понятные обозначения: $\mathcal{V}_{s\uparrow}$, $\mathcal{V}_{w\downarrow}$, $\mathcal{V}_{s\downarrow}^-$ и $\mathcal{V}_{w\uparrow}^-$.

Условия (1.6), (1.7) назовем *краевыми условиями наведения*. Отметим, что традиционные сильно монотонные L -функции вкладываются в класс бипозиционных по формуле

$$V(t, x; t_0, x_0) = \varphi(t, x) - \varphi(t_0, x_0) \quad (1.8)$$

с сохранением типа монотонности. Однако для слабо монотонных функций условие наведения (1.7) довольно жестко, и для построения по традиционной слабо монотонной функции φ бипозиционной V с таким же свойством монотонности формула (1.8) в общем случае не подходит (один из возможных способов построения бипозиционных слабо монотонных функций по традиционным указан в примере 1.7).

Из определения 1.3.1 очевидным образом следуют инфинитезимальные критерии для бипозиционных функций типа Ляпунова, аналогичные критериям, приведенным во введении.

Представим оценки множества соединимых точек $\mathcal{R}$ управляемой системы (S) с использованием бипозиционных L -функций. Для этого введем следующие множества:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(V) &= \{(t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid V(t_1, x_1; t_0, x_0) \geq 0\}, \\ \mathcal{E}_+(\mathcal{V}) &= \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{E}(V) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_-(\mathcal{V}) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{E}(V), \end{aligned}$$

где $\mathcal{V}$ — некоторое множество бипозиционных L -функций.

Теорема 1.3.1. а) Если $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}$, то $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{V})$.

б) Если $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$, то $\mathcal{R} \supset \mathcal{E}_-(\mathcal{V})$.

в) Если $V \in \mathcal{V}_{s\uparrow} \cap \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$, то $\mathcal{R} = \mathcal{E}(V)$.

Доказательство аналогично лемме 1.3.1.

Дадим некоторые комментарии.

1) Для решения некоторых задач управления достаточно оценивать не всё множество $\mathcal{R}$, а только некоторые его подмножества, например, множество точек, соединимых допустимыми по ограничению $q = (t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \in Q$ траекториями системы (S) , т.е. множество $\mathcal{R} \cap Q$. Достигается это следующим образом.

Пусть $Q_0 = pr_{t_0 x_0} Q$ — проекция множества Q на подпространство переменных t_0, x_0 , т.е.

$$Q_0 = \{(t_0, x_0) \mid \exists (t_1, x_1) : (t_0, x_0; t_1, x_1) \in Q\}.$$

Тогда в определении 1.3.1 (и соответствующих критериях монотонности) можно ограничиться только точками $(t_0, x_0) \in Q_0$.

Другое очевидное ослабление связано с учетом возможных сильно инвариантных множеств (см. замечание 1.1): если априори известно множество $W \subset R^{n+1}$, по которому проходят все рассматриваемые (например, допустимые по некоторому ограничению) траектории системы, то сильного возрастания функций $V \in \mathcal{V}$ можно требовать только на W , а в оценивающее множество $\mathcal{E}(V)$ добавить ограничения $(t_0, x_0) \in W, (t_1, x_1) \in W$.

2) Отправляясь от описаний множества управляемости системы (S'') (т.е. исходя из теоремы 1.3.2), можно получить аналогичный результат, использующий бипозиционные L -функции, параметрически зависящие от терминального вектора (t_1, x_1) . Очевидно, что ответ в такой форме эквивалентен теореме 1.3.1.

3) В первых формулировках достаточных условий канонической теории [29, 33] использовались семейства сильно монотонных L -функций, параметризованные некоторым, вообще говоря, произвольным параметром α . Введение в L -функции дополнительных аргументов-параметров можно трактовать как возможную конкретизацию смысла параметра α , а бипозиционные функции $V(t, x; t_0, x_0)$ и $V(t, x; t_1, x_1)$ рассматривать как специальный подкласс L -функций, применяемых в каноническом подходе. $\square$

Сформулируем один из основных результатов диссертации — канонические условия оптимальности с бипозиционными L -функциями для стан-

дартной задачи оптимального управления (P) с общим ограничением на концы траекторий и целевым функционалом типа Майера:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \\ q &= (t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \in Q, \\ J[\sigma] &= l(q) \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Напомним, что исследуемый на оптимальность процесс обозначен через

$$\bar{\sigma} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid t \in \bar{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1]) \in \Sigma.$$

Рассмотрим вспомогательную конечномерную задачу $(EP(\mathcal{E}))$:

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in \mathcal{E} \cap Q,$$

где $\mathcal{E} \subset R^{2n+2}$ — пока произвольное множество.

Теорема 1.3.2. а) Пусть для процесса $\bar{\sigma}$ существует такое множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}$, что

$$J[\bar{\sigma}] = \min(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V}))).$$

Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P) .

б) Пусть процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P) . Тогда для любого множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$ выполнено неравенство

$$J[\bar{\sigma}] \leq \inf(EP(\mathcal{E}_-(\mathcal{V}))). \quad (1.9)$$

в) Пусть существует функция $V \in \mathcal{V}_{s\uparrow} \cap \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$. Тогда для оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ необходимо и достаточно выполнение равенства

$$J[\bar{\sigma}] = \min(EP(\mathcal{E}(V))).$$

Ясно, что при выполнении достаточного условия оптимальности концевой вектор $\bar{q} = q(\bar{\sigma})$ является решением задачи $(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V})))$, так как он принадлежит допустимому множеству этой задачи. Подобная ситуация имеет место в третьей части теоремы. В случае, если вектор $\bar{q}$ допустим в задаче $(EP(\mathcal{E}_-(\mathcal{V})))$ из второго утверждения теоремы, то неравенство (1.9) выполняется как равенство и вектор $\bar{q}$ является решением задачи

$(EP(\mathcal{E}_-(\mathcal{V})))$. Таким образом, приведенные условия оптимальности могут формулироваться в терминах оптимальности вектора $\bar{q}$ в соответствующих концевых задачах.

Утверждение б) теоремы представляет интерес в контрпозитивной форме — как достаточное условие неоптимальности.

Следствие 1.3.1. Пусть для процесса $\bar{\sigma}$ найдется такое множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$, что

$$J[\bar{\sigma}] > \inf(EP(\mathcal{E}_-(\mathcal{V}))).$$

Тогда процесс $\bar{\sigma}$ не оптимален в задаче (P) .

Как и ранее, множество $\mathcal{V}$ назовем *разрешающим* (K -разрешающим) для процесса $\bar{\sigma}$ и задачи (P) , если оно удовлетворяет утверждению а) теоремы 1.3.2.

1.4 Анализ достаточных условий оптимальности

Рассмотрим некоторые свойства разрешающего множества функций.

Следуя [141, с. 117], дадим

Определение 1.4.1. Назовем $\bar{\sigma}$ точкой почти глобального минимума в задаче (P) , если $J[\bar{\sigma}]$ является изолированной слева точкой множества $J[\Sigma]$.

Это нестандартный тип минимума, более глубокий, чем сильный, поскольку он не использует какой-либо топологии на множестве допустимых процессов (и лишь частично связан со сходимостью концевых векторов допустимых процессов).

Задачу (P) назовем *вырожденной* (в смысле почти глобального минимума в точке $\bar{\sigma}$), если вектор $\bar{q}$ доставляет локальный минимум в следующей задаче:

$$l(q) \rightarrow \min; \quad q \in Q.$$

Ясно, что вырожденные задачи (в данном смысле) не представляют интереса, так как в них дифференциальная связь не играет роли и тривиальная $V \equiv 0$ позволяет установить почти глобальную оптимальность $\bar{\sigma}$.

А. Пусть $\mathcal{V}$ — разрешающее множество для $\bar{\sigma}$, равномерно полунепрерывное снизу в точке $\bar{q}$ ⁴. Если задача (P) не вырождена, то для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\mathcal{V}_\varepsilon(\bar{\sigma}) = \{V \in \mathcal{V} \mid V(\bar{q}) \leq \varepsilon\} \neq \emptyset \quad (1.10)$$

и, следовательно, выполняется равенство

$$\inf_{V \in \mathcal{V}} V(\bar{q}) = 0. \quad (1.11)$$

Это утверждение легко доказывается от противного. Оно означает, что для невырожденных задач множество ε -активных «индексов» V по ограничению $q \in \mathcal{E}_+(\mathcal{V})$ в концевой задаче $(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V})))$ канонического подхода не пусто для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Именно эти «почти активные» V важны для достаточных условий. Заметим, что

$$V(t, \bar{x}(t); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)) = 0 \quad \text{на} \quad \bar{\Delta} \quad \forall V \in \mathcal{V}_0(\bar{\sigma}).$$

Условие (1.10), пожалуй, наиболее полно характеризует возможных кандидатов в элементы разрешающего множества L -функций и порождает следующую серию следствий. Например, справедливо свойство

Б. Для любой $V \in \mathcal{V}_\varepsilon(\bar{\sigma})$ процесс $\bar{\sigma}$ ε -оптимален в следующей задаче оптимального управления *без концевых ограничений*:

$$\omega[V; \sigma] := V(t_1, x(t_1); t_0, x(t_0)) \rightarrow \min; \quad \sigma \in \Sigma_f, \quad (1.12)$$

т.е. выполняется неравенство

$$\inf_{\sigma \in \Sigma_f} \omega(V; \sigma) \geq \omega(V; \bar{\sigma}) - \varepsilon.$$

Для функций $V \in \mathcal{V}_0(\bar{\sigma})$ (в точности активных) процесс $\bar{\sigma}$ оптимален в задаче (1.12).

В. Пусть $\{V^j\} \subset \mathcal{V}$ — последовательность, на которой достигается инфимум в (1.11), и V^j суперпозиционно абсолютно непрерывны (например, локально липшицевы). Тогда выполняется предельное соотношение

$$\frac{d}{dt} V^j(t, \bar{x}(t); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)) \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad L_1(\bar{\Delta}),$$

⁴Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $O(\bar{q})$ точки $\bar{q}$, что неравенство $V(q) \geq V(\bar{q}) - \varepsilon$ выполняется $\forall V \in \mathcal{V}$ и $\forall q \in O(\bar{q})$.

непосредственно вытекающее из оценки

$$0 \leq \int_{\bar{\Delta}} \frac{d}{dt} V^j(t, \bar{x}(t); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)) dt = V^j(\bar{q}) - V^j(\bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)) = V^j(\bar{q}) \rightarrow 0.$$

При дифференцируемых и липшицевых $V \in \mathcal{V}$ свойства **Б**, **В** позволяют установить связь квазиградиентов функций $V \in \mathcal{V}_\varepsilon(\bar{\sigma})$ с решениями сопряженной системы, соответствующими $\bar{\sigma}$, которые оказываются компонентами экстремалей (точнее, субэкстремалей) управляемой системы [33, 141], т.е. части условий из возмущенного принципа максимума Понтрягина для субоптимальных процессов [129, 143].

Г. Нижняя огибающая разрешающего множества $\mathcal{V}$ — функция

$$V_*(t, x; t_0, x_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}} V(t, x; t_0, x_0)$$

— сильно возрастает и является разрешающей для задачи (P) (так как концевые задачи $(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V})))$ и $(EP(\mathcal{E}(V_*)))$ эквивалентны), причем

$$V_*(t, \bar{x}(t); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)) = 0 \text{ на } \bar{\Delta}.$$

Эта возможность перехода от разрешающего множества бипозиционных L -функций к одной разрешающей (т.е. к одноэлементному разрешающему множеству) вытекает из свойств **А**, **В**. Примечательно, что в классе традиционных L -функций такой переход, вообще говоря, невозможен [4]: нижней огибающей может соответствовать более широкое множество допустимых точек в концевой задаче $(EP(\mathcal{E}(V_*)))$ (т.е. соответствующая внешняя оценка множества $\mathcal{R}$ оказывается более грубой).

Поиск разрешающего множества L -функций может интерпретироваться как конструктивный способ нахождения одной разрешающей V_* , аналитические свойства которой ухудшаются в сравнении с функциями из разрешающего множества, и её непосредственное нахождение из неравенства (уравнения) Гамильтона-Якоби может оказаться весьма проблематичным. Отметим попутно, что если все функции $V \in \mathcal{V}$ являются гладкими по основным переменным (t, x) , то при довольно общих предположениях нижняя огибающая V_* оказывается локально полувогнутой по этим переменным [113, гл. 3]. Этот класс решений, введенный С.Н. Кружковым, ока-

зался естественным для теории уравнений и неравенств Гамильтона-Якоби (см. также [55, 92]).

Свойства **Б**, **Г** позволяют дать ответ на естественный вопрос: как по заданному множеству $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}$ и найденному множеству $Q_* = \{q_*\}$ глобальных решений концевой задачи ($EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V}))$) построить управления, траектории которых соединяют хотя бы некоторые точки из Q_* , или же убедиться, что таких управлений нет, т.е. $\mathcal{V}$ — не разрешающее множество. Этот вопрос не возникает, если достаточные условия оптимальности теоремы 1.3.2 используется как проверочное — при априори известном $\bar{\sigma}$, но он выходит на передний план, если каноническую теорию рассматривать как метод решения задачи. (Дополнительная неопределенность и сложность здесь возникают, поскольку в силу свойства **Б** каждая ε -активная V порождает своё синтезирующее управление и конструкция результирующего неочевидна.) В сущности, построение оптимальных процессов по $\mathcal{V}$ (точнее, по V_*) следует схеме, приведенной во введении.

1.5 Условия оптимальности с бипозиционными L -функциями в неклассической линейно-квадратичной задаче оптимального управления

Рассмотрим следующую линейно-квадратичную задачу оптимального управления (LQP):

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u(t) \in R^m,$$

$$J[x, u] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Omega(t, x(t), u(t)) dt + \omega(q_x) \rightarrow \min,$$

где Ω , ω — линейно-квадратичные функции вида

$$\Omega(t, x, u) = (x'P(t)x + 2u'Q(t)x + u'R(t)u + 2p'(t)x + 2r'(t)u),$$

$$\omega(q_x) = \frac{1}{2}q'_xDq_x + d'q_x, \quad q_x = (x(t_1), x(t_0)),$$

все матричные функции непрерывны на отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$, причем P , R , D симметричны и $R(t)$ положительно определена — $R(t) > 0 \quad \forall t \in \Delta$ ⁵.

От классической линейно-квадратичной задачи построения оптимального регулятора [62, 120] задача (LQP) отличается общей зависимостью формы ω от x_0, x_1 и присутствием линейных слагаемых в Ω , ω . Эти особенности делают не применимым метод динамического программирования в традиционном варианте и порождают новые свойства оптимальных решений. Например, в [145] рассматривалась автономная задача оптимального синтеза с формой ω , не зависящей от x_0 при $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$, $D \equiv 0$, и оптимальное позиционное управления в действительности оказалось программным (не зависящим от t_0, x_0), а функция Беллмана — линейной по x_0 (по текущему x). В рассматриваемой задаче со свободными x_0, x_1 сама постановка вопроса об оптимальном синтезе нуждается в уточнении.

Перепишем задачу (LQP) в форме Майера (далее речь будет идти именно о ней):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u(t) \in R^m, \quad (1.13)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2} \left(x'Px + 2u'Qx + u'Ru + 2p'x + 2r'u \right), \quad y(t_0) = 0, \quad (1.14)$$

$$J[\sigma] = \frac{1}{2} q'_x D q_x + d' q_x + y(t_1) \rightarrow \inf.$$

Здесь $\sigma = (x, y, u)$ — процесс системы (1.13), (1.14), а

$$q = \left(q_x = (x(t_1), x(t_0)), y(t_1) \right)$$

— концевой вектор, отвечающий σ .

В этой задаче отсутствуют какие-либо ограничения (за исключением несущественного начального условия для y), поэтому все процессы системы (1.13), (1.14) допустимы.

Покажем, как задачу (LQP) можно исследовать с применением одной *бипозиционной* линейно-квадратичной сильно возрастающей L -функции

⁵Для краткости будем опускать аргумент (t) у функций, характеризующих задачу (LQP) .

вида

$$\begin{aligned}
V(t, x, y; x_0) &= \frac{1}{2}(x \ x_0)S(t) \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} + \\
&+ w'_1(t)x + w'_0(t)x_0 + c(t) - v(x_0) + y, \\
S(t_1) &= D, \quad w_1(t_1) = d_1, \quad w_0(t_1) = d_0, \quad c(t_1) = 0, \\
v(x_0) &= \frac{1}{2}(x_0 \ x_0)S(t_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + w'_1(t_0)x_0 + w'_0(t_0)x_0 + c(t_0).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь $S(t) = (S_{ij}(t))$ — $2n \times 2n$ симметричная матричная функция с $n \times n$ блоками S_{ij} , $i, j = 1, 2$, n -мерные вектор-функции w_1 , w_0 и функция c непрерывно дифференцируемы, функция $v(x_0)$ включена для учета краевого условия наведения из определения 1.3.1 бипозиционных L -функций.

Для конкретизации функций S , w_1 , w_0 , c , подставим функцию V в неравенство Гамильтона-Якоби (2) для гладких сильно возрастающих L -функций. Для этого вычислим нижний гамильтониан h , откуда определится V -экстремальное управление

$$\begin{aligned}
u_*[t, x; x_0] &= u_*(t, x, V_x(t, x; x_0)) = \\
&= -R^{-1} \left((Q + B'S_{11})x + B'S_{12}x_0 + B'w_1 + r \right).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Неравенство Гамильтона-Якоби (2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x' \left(\dot{S}_{11} + P + S_{11}A + A'S_{11} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(Q + B'S_{11}) \right)x + \\
&+ x' \left(\dot{S}_{12} + A'S_{12} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}B'S_{12} \right)x_0 + \\
&+ \frac{1}{2}x'_0 \left(\dot{S}_{22} - (B'S_{12})'R^{-1}(B'S_{12}) \right)x_0 + \\
&+ x' \left(\dot{w}_1 + A'w_1 + p - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) \right) + \\
&+ x'_0 \left(\dot{w}_0 - (B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) \right) + \\
&+ \left(\dot{c} - \frac{1}{2}(B'w_1 + r)'R^{-1}(B'w_1 + r) \right) \geq 0, \\
&\forall (t, x, x_0) \in \Delta \times R^n \times R^n.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Будем выбирать искомые функции так, чтобы занулить каждое из шести слагаемых в левой части неравенства (1.17), т.е. потребуем, чтобы V удо-

влетворяла уравнению Гамильтона-Якоби (равенству в (1.17)). Придем к следующей системе дифференциальных уравнений на отрезке Δ :

$$\begin{aligned}\dot{S}_{11} + P + S_{11}A + A'S_{11} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(Q + B'S_{11}) &= 0, \\ \dot{S}_{12} + A'S_{12} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}B'S_{12} &= 0, \\ \dot{S}_{22} - (B'S_{12})'R^{-1}(B'S_{12}) &= 0, \\ \dot{w}_1 + A'w_1 + p - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) &= 0, \\ \dot{w}_0 - (B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) &= 0, \\ \dot{c} - \frac{1}{2}(B'w_1 + r)'R^{-1}(B'w_1 + r) &= 0\end{aligned}\quad (1.18)$$

с граничными условиями

$$S_{ij}(t_1) = D_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad w_1(t_1) = d_1, \quad w_0(t_1) = d_0, \quad c(t_1) = 0.$$

Отметим, что уравнение (1.18) является матричным уравнением Риккати, решение которого может не существовать на всем отрезке Δ , но мы предположим, что оно существует на Δ ; тогда остальные линейные уравнения имеют решения на Δ , а функция V удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби и начальному условию $V(t_0, x_0, y_0; x_0) = 0$. Следовательно, она является бипозиционной сильно возрастающей L -функцией.

Установим свойства функции V .

Предложение 1.5.1. а) Если процесс $\sigma = (x, y, u)$ порожден V -экстремальным управлением (1.16), т.е. удовлетворяет равенству

$$u(t) = u_*(t, x(t), V_x(t, x(t), x(t_0))), \quad (1.19)$$

то $V(t, x(t), y(t); x(t_0)) \equiv 0$ на Δ .

б) Если процесс σ не порожден V -экстремальным управлением, т.е. не удовлетворяет условию (1.19), то $V(t, x(t), y(t); x(t_0)) \geq 0$ на Δ и $V(t_1, x(t_1), y(t_1); x(t_0)) > 0$.

Доказательство. а) Утверждение следует из равенства

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t), y(t); x(t_0)) = 0,$$

справедливого в силу того, что функция V удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби, а V -экстремальное управление доставляет строгий глобальный минимум по u функции $H(t, x, V_x(t, x; x_0), u)$ во всех точках (t, x, x_0) .

б) Если процесс σ не порожден V -экстремальным управлением, то найдется интервал $(a, b) \subset \Delta$, на котором равенство (1.19) нарушается, а тогда $\frac{d}{dt}V(t, x(t), y(t); x(t_0)) > 0$ на (a, b) . $\square$

Из предложения 1.5.1 и вида функции V (см. граничные условия в (1.15) и определение функции $v(x_0)$) следует, что для любого процесса σ выполняется неравенство

$$J[\sigma] = l(q) = V(t_1, x(t_1), y(t_1); x(t_0)) + v(x(t_0)) \geq v(x(t_0)) \geq \inf_{R^n} v(x_0).$$

Отсюда вытекает, что если функция v достигает своего минимума в некоторой точке $\bar{x}_0 \in R^n$, а процесс $\bar{\sigma}$ порожден V -экстремальным управлением (1.16) и удовлетворяет начальному условию $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, то

$$J[\bar{\sigma}] = \min v(x_0) = v(\bar{x}_0),$$

т.е. $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс. Таким образом, вопрос отыскания оптимальных процессов в задаче (LQP) сводится к нахождению точек минимума функции

$$v(x_0) = \frac{1}{2}x_0' \left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0) \right) x_0 + (w_1(t_0) + w_0(t_0))' x_0 + c(t_0).$$

Лемма 1.5.1. а) Функция $v(x_0)$ имеет единственную точку минимума

$$\bar{x}_0 = - \left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0) \right)^{-1} (w_1(t_0) + w_0(t_0)) \quad (1.20)$$

тогда и только тогда, когда квадратичная форма $x_0' (\sum_{i,j} S_{ij}(t_0)) x_0$ положительно определена.

б) Функция $v(x_0)$ имеет множество точек минимума

$$\left\{ \bar{x}_0 \mid \sum_{i,j} S_{ij} \bar{x}_0 = 0 \right\} \quad (1.21)$$

тогда и только тогда, когда квадратичная форма $x'_0(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0))x_0$ положительно полуопределена и

$$(w_1(t_0) + w_0(t_0))'x_0 = 0 \quad \forall x_0 : \quad x'_0\left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0)\right)x_0 = 0. \quad (1.22)$$

Из рассуждений, приведенных выше, и леммы 1.5.1 вытекают следующие достаточные условия оптимальности в задаче (LQP) .

Теорема 1.5.1. Пусть выполнены следующие условия:

а) существует гладкая симметричная матричная функция $S_{11}(t)$, удовлетворяющая на Δ матричному уравнению Риккати (1.18) с граничным условием $S_{11}(t_1) = D_{11}$;

б) квадратичная форма $x'_0(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0))x_0$ положительно определена.

Тогда существует единственный оптимальный процесс $\bar{\sigma}$, порожденный V -экстремальным управлением (1.16) и начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, где вектор $\bar{x}_0$ определен формулой (1.20), а значение задачи (LQP) удовлетворяет равенству

$$\min(LQP) = -\frac{1}{2}(w_1(t_0) + w_0(t_0))'\left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0)\right)^{-1}(w_1(t_0) + w_0(t_0)) + c(t_0).$$

Теорема 1.5.2. Пусть выполнены следующие условия:

а) существует гладкая симметричная матричная функция $S_{11}(t)$, удовлетворяющая на Δ матричному уравнению Риккати (1.18) с граничным условием $S_{11}(t_1) = D_{11}$;

б) квадратичная форма $x'_0(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0))x_0$ положительно полуопределена и выполнено условие (1.22).

Тогда существует множество оптимальных процессов $\bar{\sigma}$, порожденных V -экстремальным управлением (1.16) и начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, где вектор $\bar{x}_0$ определяется формулой (1.21), а значение задачи (LQP) удовлетворяет равенству

$$\min(LQP) = c(t_0).$$

Приведенные достаточные условия оптимальности теорем 1.5.1, 1.5.2 могут показаться жесткими, однако дальнейший анализ показывает, что

в предположении полной управляемости системы (1.13) они становятся и необходимыми. Для обоснования этого факта используются результаты из [62, 120, 145].

1.6 Производящие функции и нестандартная двойственность

Расширение множества функций типа Ляпунова до бипозиционных не является единственно возможным из потенциально эффективных и заслуживающих исследования. В работах [47, 50] В.А. Дыхта предложил использовать так называемые *производящие функции* типа $S(t, x, \psi)$, зависящие от траекторий сопряженной системы⁶, как для развития канонического подхода, так и построения обобщенных лагранжианов задачи с последующим переходом к соответствующей задаче сравнения (аналога двойственной).

Применительно к стандартной задаче (P) модифицированный лагранжиан с производящей гладкой функцией S определяется (по аналогии с кротовским и Каратеодори [114]) равенством

$$K[S, x(\cdot), \psi(\cdot), u(\cdot)] = l(q) - S(t, x(t), \psi(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{\Delta} \dot{S}(t, x(t), \psi(t)) dt,$$

а задача сравнения формируется следующим образом:

$$K[S, \gamma] \rightarrow \inf; \quad \gamma \in \Gamma. \quad (1.23)$$

Здесь $\dot{S}$ означает полную производную по времени в силу канонической системы с функцией Понтрягина

$$\dot{x} = H_{\psi}, \quad \dot{\psi} = -H_x, \quad (1.24)$$

γ — тройку функций $(x(t), \psi(t), u(t) \mid t \in \Delta)$, связанных на отрезке Δ системой (1.24) и ограничением $u(t) \in U$, Γ — множество всех таких троек с соответствующими краевыми условиями.

⁶Термин «производящие» заимствован из классической механики [5, 20], в которой такие функции применялись для интегрирования методом Якоби канонических (гамильтоновых) систем и уравнений Гамильтона-Якоби. В [47, 50] они назывались потенциалами.

В идеале — при выполнении условия максимума

$$u(t) \in \operatorname{Argmax}_{u \in U} H(t, x(t), \psi(t), u), \quad t \in \Delta$$

— переход к задаче (1.23) соответствовал бы поиску решения задачи (P) среди экстремалей Понтрягина, но его достижение проблематично в силу известных трудностей (они тесно связаны с реализацией метода характеристик для негладкого управления Гамильтона-Якоби-Беллмана). Поэтому при выбранной функции S в задаче сравнения используется S -экстремальное *бипозиционное управление* $u_*(t, x, \psi)$, которое находится из условия

$$L(S; t, x, u) := \dot{S} \rightarrow \min; \quad u \in U.$$

Что касается принципиального вопроса — выбора S , — то пока накопленный опыт позволяет выделить следующие варианты⁷:

- а) билинейный — $S(t, x, \psi) = \psi \cdot x$, при котором функционал K оказывается стандартным лагранжианом [1, 55], но с варьируемой $\psi(\cdot)$;
- б) линейно-квадратичный по (x, ψ) ;
- в) выбор S из условия независимости $L = \dot{S}$ от x или от ψ ;
- г) суперпозицию с групповыми инвариантами системы (1.24) (например, в случае так называемых L -систем [101], или линейных по управлению систем с условиями Фробениуса — как в условиях применимости нелинейного преобразования Гоха).

Ниже мы иллюстрируем метод производящих функций на примере автора из [50] (в пункте 2.6.3 будет рассмотрена в общем плане двухэтапная задача оптимального управления в билинейной системе, а в пункте 3.5.2 — задача дискретного оптимального управления).

Пример 1.6. $\dot{x} = (x - 1)u$, $u \in [0, 1]$, $x(0) = 0$, $J = x^3(1) \rightarrow \min$.

⁷Помимо работы [47] используется пленарный доклад В.А. Дыхты «Нестандартная двойственность в оптимальном управлении», сделанный на XV Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения», пос. Листвянка, оз. Байкал, 23–29 июня 2011 г.

Условия принципа максимума Понтрягина таковы: $H = \psi(x-1)u$,

$$\dot{\psi} = -\psi u, \quad \psi(1) = -3x^2(1), \quad \psi(x-1)u \rightarrow \max; \quad u \in [0, 1] \quad (1.25)$$

(последнее эквивалентно условию $H_u(x, \psi)u \rightarrow \max; \quad u \in [0, 1]$).

Во-первых, заметим, что $\dot{H}_u \equiv 0$, то есть $S^1(x, \psi) = \psi(1-x)$ — первый интеграл канонической системы, линейный по ψ (это признак принадлежности уравнения динамики к L -системам [101]). Он удовлетворяет условию сильного возрастания

$$\dot{S} = ((x-1)S_x - \psi S_\psi)u \geq 0 \quad \forall u \in [0, 1].$$

Однако это неравенство имеет еще два решения: $S^2(x) = -x$, $S^3(\psi) = \psi$.

Далее, естественное использование S^1 для упрощения принципа максимума Понтрягина, описанное в [101], предписывает заменить условие максимума из (1.25) на следующее: $cu \rightarrow \max; \quad u \in [0, 1]$, т.е. $u \in \text{sign } c$, где константа c зависит от искомой траектории (x, ψ) через равенство $S^1 = c$. Возникает необходимость перебора вариантов значений c при выполнении условий

$$3x^2(1)(1-x(1)) = c, \quad x(1) \leq 0$$

(неравенство дает функция S^2). Отсюда $c \geq 0$ и возможны два случая:

а) $c = 0$; тогда $x(1) = 0$, откуда $\psi^* \equiv 0$, $x^* \equiv 0$, $u^* \equiv 0$ — особая биэкстремаль задачи;

б) $c > 0$; тогда $\bar{u} \equiv 1$, $\bar{x}(t) = 1 - e^t$ — неособая экстремаль.

Поскольку задача невыпуклая, то это все, что дает принцип максимума. Так как оптимальное управление в задаче существует, то очевидно, что $\bar{u}$ — решение задачи. Однако интересно, что дают формальные методы без привлечения теоремы существования.

Покажем, что особое управление u^* не оптимально (заметим, что все локальные условия оптимальности оказываются не эффективными в силу глубокого вырождения этой экстремали). Воспользуемся конструкцией улучшения управления из [36, 38]: так как S^2 слабо (и сильно) возрастает, то для любой траектории $x(\cdot)$ с $u \not\equiv 0$ выполняется неравенство $x(1) - J(u^*) = x(1) < 0$ и, следовательно, $x^3(1) - J(u^*) < 0$, что и требовалось.

Установим теперь оптимальность $\bar{u} \equiv 1$, пользуясь K -достаточными условиями. Потенциал S^1 порождает (из равенства $S_x^1 = -\psi = c/(x-1)$) функцию

$$S(t, x) = -\ln((1-x)\xi(t)),$$

где $\xi(t) > 0$ — произвольная гладкая функция. Для нее уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\bar{h}[S] = -\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} - 1 = 0,$$

если выбрать $\xi(t) = \xi(0)e^{-t}$, $\xi(0) > 0$. При этой ξ функция S сильно возрастает. Положим $\Phi = \{S\}$ и рассмотрим соответствующую конечную задачу $(EP(\Phi))$ из K -достаточных условий:

$$x(1) \rightarrow \min; \quad x(1) \geq 1 - e.$$

Очевидно, что $\bar{x}(1) = 1 - e$ — её решение; это означает оптимальность управления $\bar{u}$.

1.7 Примеры

Сначала вернемся к примеру 1.4 из п. 1.2.2.

Пример 1.7. $\dot{x} = 0, \dot{y} = xu, |u| \leq 1, y(0) = 0, x^2(0) + y^2(1) \leq 1, J[\sigma] = y(1) \rightarrow \min$. Посмотрим, что дают в этом примере необходимые условия оптимальности канонической теории.

Напомним, что расширенный нижний гамильтониан управляемой системы имеет вид

$$\bar{h}(t, x, y, p) = p_t - |p_y x|, \quad p = (p_t, p_x, p_y).$$

Очевидно, что

$$\bar{h}(t, x, y, p) = p_t - |p_y x| \leq p_t - p_y x,$$

и, следовательно, все решения линейного уравнения

$$V_t - V_y x = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times R^2,$$

слабо убывают в обратном времени. Данное уравнение имеет два независимых инварианта $\eta_1 = x$, $\eta_2 = tx + y$, с помощью которых построим функцию

$$V(t, x, y; x_0) = -(xt + y)^2 - (x - x_0)^2,$$

удовлетворяющую краевому условию наведения.

Соответствующая V концевая задача $(EP(\mathcal{E}_-(V)))$ сводится к следующей:

$$y_1 \rightarrow \min, \quad y_0 = 0, \quad x_0^2 + y_1^2 \leq 1, \quad y_1 = -x_1, \quad x_1 = x_0.$$

Её решением является вектор $q^* = (x_0^* = \sqrt{2}/2, y_0^* = 0, x_1^* = \sqrt{2}/2, y_1^* = -\sqrt{2}/2)$, откуда можно сделать вывод, что

$$\min(P) \leq \min(EP(\mathcal{E}_-(V))) = -\sqrt{2}/2.$$

Следовательно, не оптимальны все процессы $\sigma \in \Sigma$ со значением целевого функционала больше $-\sqrt{2}/2$. Как мы знаем (см. пример 1.4), эта оценка является точной, так как $\min(P) = -\sqrt{2}/2$, а q^* — концевой вектор одного из оптимальных процессов задачи. Заметим, что V -экстремальное управление $u^V(t, y; x_0) = \text{sign} \{2x_0(x_0t + y)\}$ порождает соответствующее программное управление $u^* \equiv -1$.

Отметим, что из оценки оператора Гамильтона-Якоби

$$\bar{h}(t, x, y, p) = p_t - |p_y x| \leq p_t + p_y x$$

можно найти функцию

$$V'(t, x, y; x_0) = -(xt - y)^2 - (x - x_0)^2 \in \mathcal{V}_{w\uparrow}^-,$$

применение которой также приводит к точной оценке значения задачи (P) , а решение соответствующей концевой задачи и V' -экстремальное управление — ко второму из оптимальных процессов.

Пример 1.8. Рассмотрим следующую линейно-квадратичную задачу оптимального управления со свободными концами траекторий:

$$\dot{x} = u, \quad J = \int_0^T u^2(t) dt + \omega(x(0), x(T)) \rightarrow \inf, \quad \omega(x_0, x_T) = x_0^2 + 4x_0x_T + x_T^2$$

сначала без ограничений на управление (классический вариант). Заметим, что концевая форма ω здесь знакопеременная, так что нулевой процесс не обязательно оптимален. Перепишем задачу в форме Майера:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = u^2, \quad y(0) = 0, \\ J[\sigma] = l(q) = y(T) + \omega(x(0), x(T)) \rightarrow \inf.$$

Будем искать разрешающую функцию в виде

$$V(t, x, y; x_0) = (x, x_0)S(t) \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} - v(x_0) + y, \quad S(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

где 2×2 симметричная матричная функция $S(t) = (S_{ij}(t))$ непрерывно дифференцируема и функция $v(x_0)$ непрерывна.

Во-первых, V -экстремальное бипозиционное управление (1.16) определяется равенством

$$u_*[t, x; x_0] = -\frac{V_x}{2} = -S_{11}(t)x - S_{12}(t)x_0, \quad (1.26)$$

а дифференциальная система типа Риккати из параграфа 1.5 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{S}_{11} &= S_{11}^2, & S_{11}(T) &= 1, \\ \dot{S}_{12} &= S_{11}S_{12}, & S_{12}(T) &= 2, \\ \dot{S}_{22} &= S_{12}^2, & S_{22}(T) &= 1. \end{aligned}$$

Её решение приводит к бипозиционной L -функции

$$V(t, x, y; x_0) = \frac{1}{T+1-t}x^2 + \frac{4}{T+1-t}xx_0 + \frac{4}{T+1-t}x_0^2 - \frac{9}{T+1}x_0^2 + y.$$

Ясно, что эта функция не сводится к традиционной.

Применение теорем 1.5.1 и 1.5.2 приводит к следующим выводам:

1. Если $T < 2$, то $\min(EP(\mathcal{E}_+(V))) = 0$ и глобально оптимальным является единственный процесс $\bar{\sigma} = 0$.
2. Если $T = 2$, то $\min(EP(\mathcal{E}_+(V))) = 0$ и существует бесконечное множество оптимальных процессов $\tilde{\sigma}(x_0)$: $\tilde{u}(t, x_0) \equiv -x_0$, $\tilde{x}(t, x_0) = x_0(1-t)$, $\tilde{y}(t, x_0) = x_0^2 t$, $x_0 \in R$, полученных с помощью V -экстремального управления (1.26).

3. При $T > 2$ $\inf(EP(\mathcal{E}_+(V))) = -\infty$, и оптимального процесса не существует. Для этого достаточно рассмотреть минимизирующую последовательность процессов $\{\sigma^k\}$: $u^k(t) = k$, $x^k(t) = kt - kT/2$, $y^k(t) = k^2t$, для которой $J[\sigma^k] \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Очевидно, что нулевой экстремали соответствует сопряженная точка $T = 2$ [21, 52, 56, 138, 142], на которую (по аналогии со случаем фиксированного x_0) указывает неограниченность значения исходной задачи при $T > 2$. Мы получили этот вывод автоматически в процессе решения задачи, без специальных критериев проверки условия Якоби отсутствия сопряженных точек для *фиксированной экстремали*. (Впрочем, для задач со свободным x_0 такие критерии нам не известны.)

Модифицируем пример, введя ограничение на управление $|u(t)| \leq 1$.

Ясно, что при $T < 2$ процесс $\bar{\sigma} = 0$ останется глобально оптимальным, а при $T = 2$ оптимальными будут процессы $\tilde{\sigma}(x_0)$ с $x_0 \in [-1, 1]$ (остальные процессы серии $\tilde{\sigma}(x_0)$ не допустимы).

Пусть теперь $T > 2$. Отметим, что теперь

$$h(t, x, \psi) = \begin{cases} \psi_x + \psi_y, & \psi_x + 2\psi_y < 0, \\ -\psi_x + \psi_y, & \psi_x - 2\psi_y > 0, \\ -\frac{\psi_x^2}{4\psi_y}, & \left| \frac{\psi_x}{2\psi_y} \right| \leq 1 \text{ и } \psi_y \neq 0, \\ 0, & \psi_x = 0 \text{ и } \psi_y = 0, \end{cases}$$

а минимизирующее H управление имеет вид

$$u(t, x, \psi) = \begin{cases} 1, & \psi_x + 2\psi_y < 0, \\ -1, & \psi_x - 2\psi_y > 0, \\ -\frac{\psi_x}{2\psi_y}, & \left| \frac{\psi_x}{2\psi_y} \right| \leq 1 \text{ и } \psi_y \neq 0, \\ \text{любое } |u| \leq 1, & \psi_x = 0 \text{ и } \psi_y = 0. \end{cases}$$

Во-первых, возьмем четыре линейные сильно возрастающие L -функции

$$\begin{aligned} V^1(t, x; x_0) &= t - x + x_0, & V^2(t, x; x_0) &= t + x - x_0, \\ V^3(y) &= y, & V^4(t, y) &= t - y, \end{aligned}$$

дающие точное априорное описание множества достижимых точек каждого из уравнений управляемой системы. Далее, возьмем семейство (по ψ) сильно возрастающих L -функций, линейных по фазам:

$$V^\psi(t, x, y; x_0) = \psi(x - x_0) + \frac{\psi^2}{4}t + y, \quad |\psi| \leq 2.$$

Поскольку все L -функции линейны, то применяются достаточные условия, близкие к принципу максимума Понтрягина. Отметим, что конструкция функций V^ψ использует прием нормировки L -функций (см. введение, а также [38, 136]).

Чтобы не иметь в концевой задаче бесконечного числа ограничений, от семейства L -функций $\{V^\psi \mid |\psi| \leq 2\}$ перейдем к его нижней огибающей — к функции

$$V^5(t, x, y; x_0) = V_*(t, x, y; x_0) = \begin{cases} -\frac{(x - x_0)^2}{t} + y, & |x - x_0| < t, \\ -2|x - x_0| + t + y, & |x - x_0| \geq t. \end{cases}$$

Множество функций V^i , $i = \overline{1, 5}$, обозначим через $\mathcal{V}$ и рассмотрим соответствующую концевую задачу ($EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V}))$):

$$\begin{aligned} l(q) &= y_1 + x_0^2 + 4x_0x_1 + x_1^2 \rightarrow \inf; \\ \frac{(x_1 - x_0)^2}{T} - y_1 &\leq 0, \quad |x_1 - x_0| \leq T, \quad y_1 \in [0, T]. \end{aligned}$$

Эта задача имеет два решения, через которые с помощью $\mathcal{V}$ -экстремального бипозиционного управления

$$u_*[t, x; x_0] = \begin{cases} -1, & x - x_0 \leq -t, \\ \frac{x - x_0}{t}, & |x - x_0| < t, \\ 1, & x - x_0 \geq t, \end{cases}$$

определяются глобально оптимальные процессы

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= (x^1(t) = t - T/2, \ y^1(t) = t, \ u^1(t) \equiv 1), \\ \sigma^2 &= (x^2(t) = -t + T/2, \ y^2(t) = t, \ u^2(t) \equiv -1). \end{aligned}$$

Заметим, что функции V^ψ представимы в виде разности $\varphi(t, x, y) - \varphi(t_0, x_0, y_0)$, т.е. порождены традиционными φ , однако, их нижняя огибающая V_* этим свойством не обладает.

При исследовании случая $T > 2$ можно использовать и другое семейство L -функций (вместо V^ψ):

$$\tilde{V}^\psi(t, x, y; x_0) = \psi(x - x_0) + t(|\psi| - 1) + y, \quad |\psi| \geq 2,$$

дополненное априорными оценками.

Глава 2

Канонические условия оптимальности в задачах управления дискретно- непрерывными системами

В этой главе канонические условия оптимальности с бипозиционными L -функциями обобщаются на задачи управления дискретно-непрерывными системами и устанавливается их связь с гибридной версией принципа максимума Понтрягина.

Результаты главы опубликованы в работах [45, 48, 76–78, 82–85, 89].

2.1 Постановка задачи

Будем рассматривать следующую задачу (P_h) оптимального управления дискретно-непрерывной (гибридной) системой с общим конечным ограничением на траектории подсистем:

$$\begin{aligned}\dot{x}^\kappa(t) &= f^\kappa(t, x^\kappa(t), u^\kappa(t)), \quad u^\kappa(t) \in U^\kappa, \\ t &\in \Delta^\kappa = [a^\kappa, b^\kappa], \quad \kappa = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$q \in Q,\tag{2.2}$$

$$J = l(q) \rightarrow \inf.$$

Здесь моменты времени $a^\kappa \leq b^\kappa$, $\kappa = 1, \dots, N$ не фиксированы, отрезки времени Δ^κ расположены произвольно на числовой прямой R , размерности x^κ , u^κ равны n^κ , m^κ соответственно, $q = \{q^1, \dots, q^N\}$ —

концевой мультивектор, составленный из концевых векторов подсистем $q^\kappa = (a^\kappa, x_a^\kappa, b^\kappa, x_b^\kappa)$, $x_a^\kappa = x^\kappa(a^\kappa)$, $x_b^\kappa = x^\kappa(b^\kappa)$, множество Q замкнуто, U^κ произвольны, скалярная функция l и вектор-функции f^κ непрерывны.

Определение 2.1.1. Процессом κ -ой управляемой подсистемы из (2.1) назовем любую пару функций $\sigma^\kappa = (x^\kappa(t), u^\kappa(t) \mid t \in \Delta^\kappa)$, состоящую из измеримого ограниченного управления $u^\kappa(\cdot)$ и абсолютно непрерывной траектории $x^\kappa(\cdot)$, определенных на отрезке времени Δ^κ (зависящем от σ^κ) и удовлетворяющих почти всюду на нем системе (2.1). Множество всех процессов κ -ой подсистемы обозначим через Σ_f^κ .

Определение 2.1.2. Набор процессов подсистем

$$\sigma = \{\sigma^\kappa \in \Sigma_f^\kappa, \kappa = 1, \dots, N\}$$

назовем мультипроцессом гибридной системы (2.1), а наборы функций $x(\cdot) = \{x^1(\cdot), \dots, x^N(\cdot)\}$ и $u(\cdot) = \{u^1(\cdot), \dots, u^N(\cdot)\}$ — мультитраекторией и мультиуправлением, или траекторией и управлением гибридной системы соответственно.

Определение 2.1.3. Мультипроцесс σ назовем допустимым в задаче (P_h) , если для него выполнено общее концевое ограничение (2.2). Совокупность допустимых мультипроцессов задачи (P_h) обозначим через Σ .

Фиксированный мультипроцесс

$$\bar{\sigma} = \{\bar{\sigma}^\kappa = (\bar{x}^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t) \mid t \in \bar{\Delta}^\kappa = [\bar{a}^\kappa, \bar{b}^\kappa]) , \kappa = 1, \dots, N\} \in \Sigma$$

будет исследоваться как на глобальный, так и на сильный минимум. Сильный минимум определим следующим образом.

Определение 2.1.4. Мультипроцесс $\bar{\sigma}$ доставляет сильный минимум в задаче (P_h) , если для каждого κ найдется такое открытое множество $G^\kappa \subset R \times R^{n^\kappa}$, содержащее график траектории $\bar{x}^\kappa(\cdot)$, что мультипроцесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P_h) , дополненной ограничениями

$$(t, x^\kappa(t)) \in G^\kappa \quad \forall t \in \Delta^\kappa, \quad \kappa = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Условия (2.3) задают сужение $(P_h(G))$ задачи (P_h) на множество $G := G^1 \times \dots \times G^N$. Сужение допустимого множества Σ на G обозначим через $\Sigma(G)$.

Как и в классической задаче (P) , подобное сужение задачи может использоваться также для достижения бóльшей гибкости рассматриваемого подхода. Во-первых, если G отождествить с расширенным фазовым пространством гибридной системы, то задача $(P_h(G))$ переходит в задачу (P_h) , а сильный минимум — в глобальный для этой задачи. Во-вторых, некоторые из предположений, которые требует метод, могут не выполняться глобально, но реализовываться локально. Введение подходящего множества G обеспечивает применимость излагаемого подхода. Наконец, множество G может выступать в качестве области определения задачи (P_h) , например, на которой выполняются необходимые аналитические свойства входных данных.

Определение 2.1.5. Мультитраекторию $x(\cdot)$, соответствующую мультипроцессу $\sigma \in \Sigma$, назовем *допустимой* по множеству G , если выполнено условие (2.3).

Ясно, что мультитраектория $\bar{x}(\cdot)$ процесса $\bar{\sigma}$ допустима по G .

Общее конечное ограничение (2.2), связывающее подсистемы из (2.1), формально выглядит статическим, но является очень емким и может отражать дискретную динамику гибридной системы. Например, в него вкладываются ограничения вида

$$x^{\kappa+1}(a^{\kappa+1}) \in F(a^\kappa, x^\kappa(a^\kappa), x^\kappa(b^\kappa)), \quad \kappa = 1, \dots, N,$$

представляющее собой дискретную систему (включение может быть заменено уравнением с управлением $v^\kappa \in V^\kappa$), а также различные правила переключения подсистем. Поэтому было бы более точным называть ограничение (2.2) *дискретно-концевым*.

Упомянутое правило переключения подсистем из (2.1) может не исключать реализацию мультипроцессов по части подсистем. Например, если имеется потенциальная возможность вылова трех популяций ($N = 3$), то эколого-экономические ограничения и функционал могут заставить при-

знать рациональной (оптимальной или априорно разумной) стратегию вылова лишь одной из популяций, так что две системы оказываются исключенными из данного мультипроцесса. Таким образом, реальная модель может допускать оперирование мультипроцессами различного числа этапов (действия подсистем), мультитраектории которых находятся в разных фазовых пространствах. Принятое нами определение мультипроцессов «полной длины» объясняется следующими соображениями.

Во-первых, мультипроцессы «неполной длины» могут быть формально включены в принятое определение условиями $a^\kappa = b^\kappa$ (нулевой длительности пассивных подсистем). В этом случае вопрос о назначении соответствующих значений $x^\kappa(a^\kappa) = x^\kappa(b^\kappa)$, $u^\kappa(a^\kappa) = u^\kappa(b^\kappa)$ зависит от специфики задачи; то же касается соответствующей модификации понятия сильного минимума.

Во-вторых, методы и результаты данной главы связаны с анализом непрерывной динамики дискретно-непрерывной задачи. При это число и порядок действия «активных» подсистем фиксируется по исследуемому процессу $\bar{\sigma}$, т.е. фиксируется часть дискретных переменных задачи. Этого требуют классические методы вариационного анализа, во всяком случае, локальные — близость мультитраекторий при отказе от фиксации действия подсистем обеспечить невозможно. Оптимизация непрерывной динамики должна дополняться оптимизацией дискретной; в K -достаточных условиях оптимальности она будет сосредоточена в концевой задаче метода, которую лучше назвать *дискретно-концевой*.

Заслуживает внимание, что данная постановка охватывает ситуацию, когда подсистемы функционируют в «различных временах» (например, быстром и медленном), т.е. имеют разные независимые аргументы (t, s, τ и т.д.) вместо универсального (t). Эта возможность, подмеченная в [40], не учитывается явно постановкой задачи, чтобы избежать громоздкости, но без труда прослеживается по доказательствам и позволяет охватить некоторые классы задач импульсного управления [39].

2.2 Необходимые и достаточные условия оптимальности с бипозиционными L -функциями

Приведем общие (прединфинитезимальные) условия оптимальности канонической теории применительно к задаче (P_h) .

Обозначим через $\mathcal{R}^\kappa(G^\kappa)$ множество пар точек (a^κ, x_a^κ) , (b^κ, x_b^κ) из G^κ , соединимых траекториями κ -ой подсистемы из (2.1), допустимыми по G^κ . Назовем $\mathcal{R}^\kappa(G^\kappa)$ *множеством соединимых точек κ -ой подсистемы на G^κ* . Положим $\mathcal{R}(G) = \prod \mathcal{R}^\kappa(G^\kappa)$ и назовем $\mathcal{R}(G)$ *множеством соединимых точек гибридной системы на G* . Очевидно, что справедливо равенство

$$\inf (P_h) = \inf l(\mathcal{R}(G) \cap Q),$$

где справа стоит значение следующей конечномерной задачи:

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in \mathcal{R}(G) \cap Q.$$

Ясно, что если существуют множества $\mathcal{E}_-, \mathcal{E}_+ \subset R^{2(n^\kappa+1)}$ такие, что

$$\mathcal{E}_-^\kappa \subseteq \mathcal{R}^\kappa(G^\kappa) \subseteq \mathcal{E}_+^\kappa, \quad \kappa = 1, \dots, N,$$

то

$$\mathcal{E}_- \subseteq \mathcal{R}(G) \subseteq \mathcal{E}_+,$$

где $\mathcal{E}_\pm = \prod \mathcal{E}_\pm^\kappa$.

Оперируя бипозиционными функциями типа Ляпунова, с помощью теоремы 1.3.1 можно получить внешние и внутренние оценки множества соединимых точек гибридной системы и соответствующие условия оптимальности.

Определение 2.2.1. Набор функций $V = \{V^1, \dots, V^N\}$ назовем *бипозиционной сильно возрастающей L -функцией гибридной системы (2.1) на множестве G* (или *составной бипозиционной сильно возрастающей L -функцией*), если для каждого $\kappa = 1, \dots, N$ функция $V^\kappa \in \mathcal{V}_{s\uparrow}^\kappa(G^\kappa)$, т.е. является бипозиционной сильно возрастающей L -функцией κ -ой подсистемы на G^κ . Через $\mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G)$ обозначим множество всех таких функций.

Аналогичным образом, определим множество всех бипозиционных слабо возрастающих в обратном времени L -функций гибридной системы (2.1) на множестве G , которое обозначим через $\mathcal{V}_{w\uparrow}^{h-}(G)$.

Пусть $\mathcal{V}_+ \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G)$ и $\mathcal{V}_- \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^{h-}(G)$. Введем множества

$$\mathcal{E}_+(\mathcal{V}_+) = \left\{ q = \{q^1, \dots, q^N\} \in G \times G \mid \forall V \in \mathcal{V}_+ \quad V^\kappa(q^\kappa) \geq 0 \quad \forall \kappa \right\},$$

$$\mathcal{E}_-(\mathcal{V}_-) = \left\{ q = \{q^1, \dots, q^N\} \in G \times G \mid \exists V \in \mathcal{V}_- : V^\kappa(q^\kappa) \geq 0 \quad \forall \kappa \right\}.$$

Тогда из результатов главы 1 получаем оценочные включения

$$\mathcal{E}_-(\mathcal{V}_-) \subseteq \mathcal{R}(G) \subseteq \mathcal{E}_+(\mathcal{V}_+).$$

Из этих оценок вытекают соответствующие условия оптимальности канонического типа.

Для любых множеств $\mathcal{V}_+ \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G)$ и $\mathcal{V}_- \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^{h-}(G)$ рассмотрим конечномерные *дискретно-концевые* задачи

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in \mathcal{E}_+(\mathcal{V}_+) \cap Q, \quad (EP(\mathcal{V}_+))$$

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in \mathcal{E}_-(\mathcal{V}_-) \cap Q. \quad (EP(\mathcal{V}_-))$$

Теорема 2.2.1. Пусть для мультипроцесса $\bar{\sigma}$ существует такое множество $\mathcal{V}_+ \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G)$, что

$$J[\bar{\sigma}] = l(\bar{q}) = \min(EP(\mathcal{V}_+)).$$

Тогда $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный мультипроцесс в задаче $(P_h(G))$, достигающий сильный минимум в задаче (P_h) .

Любое множество функций $\mathcal{V}_+$, позволяющее установить оптимальность мультипроцесса $\bar{\sigma}$ в задаче $(P_h(G))$, назовем *локально разрешающим*, а при G , совпадающем со всем пространством — *глобально разрешающим* для задачи (P_h) .

Теорема 2.2.2. Пусть мультипроцесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче $(P_h(G))$. Тогда для любого множества $\mathcal{V}_- \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^{h-}(G)$

$$J[\bar{\sigma}] \leq \inf(EP(\mathcal{V}_-)).$$

В частности, если точка $\bar{q}$ допустима в задаче $(EP(\mathcal{V}_-))$, то

$$J[\bar{\sigma}] = l(\bar{q}) = \min(EP(\mathcal{V}_-)).$$

Отметим, что нетрудно привести модификации доказанных теорем для минимизирующей последовательности мультипроцессов.

Естественно возникает вопрос о существовании разрешающего множества L -функций. Хотя для задачи (P_h) ответ на данный момент неизвестен, можно ожидать, что при некоторых предположениях (выпуклость годографа каждой подсистемы, условия роста, обеспечивающие нелокальную продолжимость их траекторий) он окажется положительным. В пользу этого оптимистического прогноза говорят соответствующие результаты для классической задачи оптимального управления с подвижным правым концом траекторий [36, 99, 100, 117, 151].

Приведенные условия оптимальности для гибридных задач обладают аналогами свойств K -условий для стандартной задачи (P) (см. параграф 1.4). Не останавливаясь на них, перейдем к изучению связи достаточных условий оптимальности с гибридным принципом максимума.

2.3 Достаточные условия в форме принципа максимума Понтрягина

Как и в случае классической задачи оптимального управления [3, 4, 33], этот результат получается из теоремы 2.2.1, если потребовать, чтобы разрешающее семейство $\mathcal{V}_+ \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G)$ состояло только из линейных (по x^κ) составных L -функций, которые строятся с помощью коэкстремалей, т.е. решений сопряженных дифференциальных систем, соответствующих исследуемому мультипроцессу $\bar{\sigma}$ и обеспечивающих условия максимума функции Понтрягина (вообще говоря, без каких-либо условий трансверсальности).

В дополнение к предположениям параграфа 2.1 потребуем, чтобы скалярная функция l и вектор-функции f^κ имели непрерывные частные производные по q^κ, x^κ, t .

Введем функцию Понтрягина для κ -ой подсистемы гибридной системы

$$H^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa, u^\kappa) = \psi_x^\kappa \cdot f^\kappa(t, x^\kappa, u^\kappa)$$

и верхний гамильтониан

$$\mathcal{H}^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa) = \max\{H^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa, u^\kappa) \mid u^\kappa \in U^\kappa\}.$$

Дадим ряд определений.

Процесс $\bar{\sigma}^\kappa \in \Sigma_f^\kappa(G)$ назовем *экстремалью κ -ой системы* на отрезке $\bar{\Delta}^\kappa$, если для него существует нетривиальная коэкстремаль $\psi^\kappa(t) = (\psi_x^\kappa(t), \psi_t^\kappa(t)) \mid t \in \bar{\Delta}^\kappa$ — решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x^\kappa = -H_x^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa, \bar{u}^\kappa(t)), \\ \dot{\psi}_t^\kappa = -H_t^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa, \bar{u}^\kappa(t)), \end{cases} \quad (2.4)$$

обеспечивающее выполнение условия максимума

$$\begin{aligned} H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)) + \psi_t^\kappa(t) &= 0 \quad \text{п.в. на } \bar{\Delta}^\kappa, \\ H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), u^\kappa) + \psi_t^\kappa(t) &\leq 0 \quad \text{на } \bar{\Delta}^\kappa \times U^\kappa. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тройку $\gamma^\kappa = (\psi^\kappa(\cdot), \bar{\sigma}^\kappa)$ назовем в этом случае *биэкстремалью κ -ой системы*.

Набор $\gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^N\}$, составленный из биэкстремалей подсистем, назовем *биэкстремалью гибридной системы*; соответствующий γ набор $\psi(\cdot) = \{\psi^1(\cdot), \dots, \psi^N(\cdot)\}$ назовем *коэкстремалью* мультипроцесса $\bar{\sigma}$.

Пусть $G = G^1 \times \dots \times G^N$ — некоторое множество, где все G^κ связны (но не обязательно открыты). Назовем G *достаточным множеством* (для $\bar{\sigma}$), если из условия, что $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный мультипроцесс в суженной задаче $(P_h(G))$, следует, что $\bar{\sigma}$ доставляет по крайней мере сильный минимум в задаче (P_h) . Будем говорить, что биэкстремаль $\gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^N\}$ *допускает продолжение*, если найдется такое достаточное множество G , что каждую биэкстремаль подсистемы γ^κ можно продолжить на промежуток времени $I^\kappa = \text{pr}_t G^\kappa$ так, чтобы выполнялись условия (2.4), (2.5) с заменой в них $\bar{\Delta}^\kappa$ на I^κ . Тогда соответствующую коэкстремаль $\psi(\cdot)$ мультипроцесса $\bar{\sigma}$ также будем называть *продолженной*.

Заметим, что условия биэкстремальности γ связаны только с управляемой системой и не зависят от концевой блока задачи (P_h) — функционала и ограничения (2.2). Рассмотрение продолженных компонент биэкстремали γ на интервал I^κ связано с нефиксированностью моментов времени

a^κ, b^κ ; если для некоторого κ момент a^κ (b^κ) фиксирован, то в качестве I^κ следует брать полуотрезок вида $[a^\kappa, \bar{b}^\kappa + \varepsilon)$ (полуинтервал $(\bar{a}^\kappa - \varepsilon, b^\kappa]$).

Пусть $\Psi(\bar{\sigma})$ — множество продолженных коэкстремалей, соответствующих $\bar{\sigma}$ (тоже продолженной экстремали гибридной системы). Допустим, что $\Psi(\bar{\sigma}) \neq \emptyset$.

Пусть $(G^\kappa)^t$ — сечение множества G^κ при фиксированном t . Определим для $\bar{\sigma}$, $\psi(\cdot) \in \Psi(\bar{\sigma})$ и достаточного множества G следующие *расширенные (или усиленные) условия максимума*:

Условие $MH(\psi, G)$. $\forall \kappa = 1, \dots, N$ п. в. на I^κ

$$\begin{aligned} H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)) + \dot{\psi}_x^\kappa(t) \cdot \bar{x}^\kappa(t) = \\ = \max \left\{ H^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa(t), u^\kappa) + \dot{\psi}_x^\kappa(t) \cdot x^\kappa \mid x^\kappa \in (G^\kappa)^t, u^\kappa \in U^\kappa \right\}. \end{aligned}$$

Условие $M\mathcal{H}(\psi, G)$. $\forall \kappa = 1, \dots, N$ п. в. на I^κ

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t)) + \dot{\psi}_x^\kappa(t) \cdot \bar{x}^\kappa(t) = \\ = \max \left\{ \mathcal{H}^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa(t)) + \dot{\psi}_x^\kappa(t) \cdot x^\kappa \mid x^\kappa \in (G^\kappa)^t \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $\Psi_+(\bar{\sigma}, G)$ — множество всех коэкстремалей, обеспечивающих выполнение любого из условий $MH(\psi, G)$ или $M\mathcal{H}(\psi, G)$. Если это множество не пусто, то, как легко проверяется, любая $\psi(\cdot) \in \Psi_+(\bar{\sigma}, G)$ порождает сильно возрастающую на G L -функцию гибридной системы

$$V = V[\psi] = \{V^1(t, x^1; a^1, x_a^1), \dots, V^N(t, x^N; a^N, x_a^N)\}[\psi],$$

компоненты которой определены равенством

$$V^\kappa(t, x^\kappa; a^\kappa, x_a^\kappa) = \psi_x^\kappa(t) \cdot (\bar{x}^\kappa(t) - x^\kappa) - \psi_x^\kappa(a^\kappa) \cdot (\bar{x}^\kappa(a^\kappa) - x_a^\kappa), \kappa = 1, \dots, N.$$

Множество коэкстремалей $\Psi_+(\bar{\sigma}, G)$ назовем *порождающим для $\bar{\sigma}$ на G* .

Из сказанного и теоремы 2.2.1 вытекают достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Теорема 2.3.1. Пусть для мультипроцесса $\bar{\sigma}$ существует такое порождающее множество коэкстремалей $\Psi \subset \Psi_+(\bar{\sigma}, G)$, что конечной муль-

тивектор $\bar{q}$ является глобальным решением конечномерной задачи

$$\begin{cases} l(q) \rightarrow \min; & q \in Q, \\ V^\kappa[\psi](q^\kappa) \geq 0 & \forall \psi \in \Psi, \\ q^\kappa \in G^\kappa \times G^\kappa, & \kappa = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Тогда $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный мультипроцесс в задаче $(P_h(G))$, достигающий сильный минимум в задаче (P_h) .

Теорема (2.3.1) обобщает на задачу управления гибридной системой ой достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для классической задачи (P) [124]. Они выгодно отличаются от других известных обращений принципа максимума (в том числе недавних [69]) оперированием множеством наборов Лагранжа для экстремали, охватом некоторых аномальных задач [6], невыпуклых концевых ограничений и функционала, а также — и это существенно — заменой условий вогнутости функции $x \rightarrow \mathcal{H}(t, x, \psi(t))$ более слабыми условиями MH или $M\mathcal{H}^1$. При указанном условии вогнутости и единственном нормальном наборе множителей Лагранжа для экстремали задачи (P) известные обращения принципа максимума легко получить из теоремы В.Ф. Кротова [60] с линейной функцией, а при неединственности наборов Лагранжа наиболее общий ответ дан в [33, 123]. Что касается задач управления дискретно-непрерывными системами, то кроме достаточности принципа максимума для выпуклых задач с промежуточными ограничениями [9] мы затрудняемся что-либо отметить.

Другого типа достаточные условия в форме принципа максимума получены в [94, 112, 130] для классической задачи оптимального управления с закрепленным левым и свободным правым концом траекторий. Эти условия требуют для проверки знания функции Беллмана (коэкстремаль должна «проходить» по супердифференциалу этой функции), что несколько чрезмерно для решения задачи в классе программных управлений.

¹В этом обсуждении имеются ввиду только условия глобального минимума, или сильного при их локализации. Особняком стоит любопытное обращение принципа максимума, полученное А.В. Арутюновым [7]. Локальность понимается в смысле метрики $d(u, v) = \text{mes} \{t \mid u(t) \neq v(t)\}$ на пространстве управлений; она исключает равномерное варьирование управления на подинтервалах и, соответственно, необходимость включения некоторого аналога условия Якоби в систему условий оптимальности. Такого рода ситуации мы не исследуем.

2.4 Макроэкономическая модель оптимизации перехода к новой технологии

Рассмотрим модификацию модели оптимального распределения ресурсов между инвестициями в накопление факторов производства (ресурсов) из [4, 53]. В данной модели предусмотрена смена технологии после достижения заданных объемов факторов первого переходного этапа — переход к другим факторам производства и новой производственной функции. В удобных обозначениях модель имеет следующее описание:

$$\dot{x} = f(x)u, \quad u(t) \in U = \left\{ u \in R_+^n \mid \sum_i u_i = 1 \right\}, \quad t \in \Delta^1 = [t_0, t_1], \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = g(y)v, \quad v(t) \in V = \left\{ v \in R_+^m \mid \sum_i v_i = 1 \right\}, \quad t \in \Delta^2 = [t_1, t_2], \quad (2.7)$$

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = x_0 > 0, \quad t_2 = T \text{ фиксированы, } t_1 \text{ варьируется,} \quad (2.8)$$

$$x(t_1) = s \geq x_0, \quad y(t_1) = p(x(t_1)) = p(s) =: r, \quad t_1 \in [t_0, t_2] = [0, T], \quad (2.9)$$

$$J[\sigma] = -c \cdot y(t_2) \rightarrow \min. \quad (2.10)$$

Здесь $x \in R_+^n$, $y \in R_+^m$ — векторы факторов этапов, $f : R_+^n \rightarrow R_+$ и $g : R_+^m \rightarrow R_+$ — строго вогнутые, гладкие функции прибыли с положительными градиентами ($f_x > 0$, $g_y > 0$ при $x > 0$ и $y > 0$), u , v — векторы инвестиций (управления), s — вектор уровней факторов первого этапа, определяющий смену технологий, $p(x) > 0$ — функция пересчета факторов, $c > 0$ — вектор цен результирующих ресурсов.

Для анализа на оптимальность экстремального процесса $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}^1, \bar{\sigma}^2)$ применим теорему 2.3.1 с использованием одной порождающей коэкстремали. При этом оставим в стороне случай $\bar{t}_1 = 0$ (априори выполнено условие смены технологий — $x_0 = s$), в котором дело фактически сводится к решению классической задачи. Отметим лишь, что тестируемые достаточные условия в ней срабатывают и совпадают с условиями принципа максимума Понтрягина.

Оказывается, что аналогично обстоит дело и в основном случае $\bar{t}_1 \in (0, T]$, что можно установить с помощью биекстремалей подсистем (2.6),

(2.7)

$$\gamma^1 = (\psi_x(t), \psi_t, \bar{\sigma}^1 \mid t \in \bar{\Delta}^1), \quad \gamma^2 = (\psi_y(t), \psi_t, \bar{\sigma}^2 \mid t \in \bar{\Delta}^2),$$

вдоль которых выполняются условия

$$\begin{aligned} m_U(\psi_x(t)) &:= \max\{\psi_x(t) \cdot u \mid u \in U\} > 0 \quad \text{на } \bar{\Delta}^1, \\ m_V(\psi_y(t)) &:= \max\{\psi_y(t) \cdot v \mid v \in V\} > 0 \quad \text{на } \bar{\Delta}^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

и

$$\psi_y(T) = c. \quad (2.12)$$

Конкретизируем условия биекстремальности (2.4), (2.5) для подсистемы (2.6):

$$\dot{\psi}_x = -f_x(\bar{x}(t))m_U(\psi_x(t)), \quad \psi_t \equiv \text{const}, \quad (2.13)$$

$$f(\bar{x}(t))(\psi_x(t) \cdot \bar{u}(t)) = f(\bar{x}(t))m_U(\psi_x(t)) \equiv -\psi_t \quad \forall t \in \bar{\Delta}^1. \quad (2.14)$$

Для второй подсистемы условия биекстремальности совпадают с (2.13), (2.14) с точностью до обозначений.

Установим следующие вспомогательные факты.

(а) *Биекстремаль $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$ со свойствами (2.11), (2.12) существует.*

Этот факт вытекает из принципа максимума Понтрягина и мы не будем на этом подробно останавливаться.

(б) *Коекстремали $\psi_x(t)$, $\psi_y(t)$ строго убывают на $\bar{\Delta}^1$, $\bar{\Delta}^2$.*

Этот факт следует из сопряженных систем (см. (2.13)) с учетом свойств (2.11) и условий $f_x > 0$, $g_y > 0$.

(в) $\psi_y(t) > 0$ на $\bar{\Delta}^2$ и $\exists i \in \{1, \dots, n\} : \psi_{xi}(t) > 0 \quad \forall t \in \bar{\Delta}^1$.

Первое утверждение следует из строгого убывания функции ψ_y и свойства (2.12). Второе вытекает из утверждения (б) с учетом (2.11).

(г) *Биекстремаль $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$ удовлетворяет каждому из расширенных условий максимума при подходящем выборе достаточного множества G .*

Так как функции Понтрягина H^1 , H^2 непрерывны по u , v и множества U и V компактны, то, очевидно, оба расширенных условия максимума эквивалентны.

Рассмотрим, например, верхний гамильтониан первой подсистемы (2.6):

$$\mathcal{H}^1(x, \psi) = \max_{u \in U} f(x)(\psi_x \cdot u) = f(x)m_U(\psi_x),$$

так как $f(x) > 0$ при $x > 0$. Поэтому функция

$$x \rightarrow [f(x)m_U(\psi_x(t)) + \dot{\psi}_x(t) \cdot x] \quad (t \in \bar{\Delta}^1)$$

имеет глобальный максимум (в силу вогнутости f) на $R_{++}^n = \{x > 0\}$ только если $m_U(\psi_x(t)) \geq 0$ на $\bar{\Delta}^1$. Аналогично устанавливает утверждение для второй подсистемы. Тем самым установлено условие $M\mathcal{H}(\psi, \bar{G})$, где множество $\bar{G} = (\bar{\Delta}^1 \times R_{++}^n) \times (\bar{\Delta}^2 \times R_{++}^m)$ не является достаточным.

Теперь надлежит продолжить биекстремаль $\gamma = \{\gamma^1, \gamma^2\}$ на естественное достаточное множество $G_\varepsilon = (I_\varepsilon^1 \times R_{++}^n) \times (I_\varepsilon^2 \times R_{++}^m)$, где $I_\varepsilon^1 = [0, \bar{t}_1 + \varepsilon)$, $I_\varepsilon^2 = (\bar{t}_1 - \varepsilon, T]$ и $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Существование такого продолжения нетрудно доказать, используя полунепрерывность сверху многозначных отображений

$$U_*(\psi_x) = \{u \in U \mid \psi_x \cdot u = m_U(\psi_x)\}, \quad V_*(\psi_y) = \{v \in V \mid \psi_y \cdot v = m_V(\psi_y)\}$$

с компактными, выпуклыми образами, локальную теорему существования для дифференциальных включений [96], а также лемму А.Ф. Филиппова. Однако, как мы увидим дальше, такое продолжение в этом примере не потребуется.

Рассмотрим следующую задачу двухточечного быстрогодействия в системе (2.6):

$$t_1 \rightarrow \min; \quad x(0) = x_0, \quad x(t_1) = s, \quad t_1 \leq T. \quad (2.15)$$

(д) Подпроцесс $\bar{\sigma}^1$ доставляет глобальный минимум в задаче (2.15).

Для экстремали $\bar{\sigma}^1$ (необязательно нормальной) из принципа максимума Понтрягина следует неравенство $m_U(\psi_x(t)) > 0 \mid t \in \bar{\Delta}^1$, и, следовательно, имеют место свойства (б)-(г). Используя коэкстремаль $\psi_x(t)$ в качестве порождающей, применим к задаче (2.15) теорему 2.3.1. Соответствующая конечномерная задача такова:

$$t_1 \rightarrow \min; \quad \psi_x(t_1) \cdot (\bar{x}(t_1) - s) \geq 0, \quad t_1 - T \leq 0. \quad (2.16)$$

В ней точка $\bar{t}_1$ допустима, но в её левой полуокрестности нет допустимых точек. Это вытекает из утверждений (б), (в) и условия максимума (2.14): $\forall t_1 \in [0, \bar{t}_1)$ выполнено $\bar{x}(t_1) \leq s$ и существуют индексы $i \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $\bar{x}_i(t_1) < s_i$, причем для каждого из таких индексов $\psi_{xi}(t_1) > 0$. Следовательно, второе неравенство в (2.16) не выполняется при $t_1 < \bar{t}_1$ и процесс $\bar{\sigma}^1$ глобально оптимален в задаче (2.15).

Обратимся непосредственно к оптимальности мультипроцесса $\bar{\sigma}$ в модели (2.6)–(2.10). Рассмотрим дискретно-концевую задачу теоремы 2.3.1:

$$\begin{aligned} -c \cdot y &\rightarrow \min_{t_1, y}; \\ \psi_x(t_1) \cdot (\bar{x}(t_1) - s) &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$c \cdot (\bar{y}(T) - y) + \psi_y(t_1) \cdot (\bar{y}(t_1) - r) \geq 0. \quad (2.18)$$

Здесь учтены все фиксированные компоненты конечного вектора q , а $y := y_T$.

Из доказательства свойства (д) мы знаем, что неравенству (2.17) не могут удовлетворять точки $t_1 < \bar{t}_1$. Значит, надо рассмотреть случай $t_1 > \bar{t}_1$. Но тогда из неравенства (2.18) следует оценка

$$c \cdot y \leq c \cdot \bar{y}(T) + \psi_y(t_1) \cdot (\bar{y}(t_1) - r) < c \cdot \bar{y}(T) = J(\bar{\sigma}),$$

поскольку $\psi_y(t_1) > 0$, $r - \bar{y}(t_1) \leq 0$ и существуют индексы j , для которых $r_j - \bar{y}_j(t_1) < 0$.

Следовательно, $(\bar{t}_1, \bar{y}(T))$ — точка глобального минимума в концевой задаче, а экстремальный мультипроцесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в модели (2.6)–(2.10).

2.5 Связь общих достаточных условий оптимальности с биэкстремальными системы и принципом максимума Понтрягина

Следуя параграфу 1.4, можно и для рассматриваемой задачи определить понятия почти глобального минимума на мультипроцессе $\bar{\sigma}$ и вырожденности задачи (P_h) в точке $\bar{\sigma}$. Если задача (P_h) вырождена в $\bar{\sigma}$, то тривиальная $V \equiv 0$ является локально разрешающей (для почти глобального

минимума), а принцип максимума выполняется особым образом — с нулевой коэкстремалью $\psi^\kappa(t) \equiv 0$ на $\bar{\Delta}^\kappa$ для всех κ .

Содержательной является ситуация невырожденности задачи в точке $\bar{\sigma}$. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что все неравенства $V^\kappa \geq 0$ в концевой задаче достаточных условий активны в точке $\bar{\sigma}$, т.е. $V^\kappa(\bar{q}^\kappa) = 0$ для всех $\kappa = 1, \dots, N$. Действительно, если для некоторого κ_0 $V^{\kappa_0}(\bar{q}^{\kappa_0}) > 0$, то имеет место *вырожденность задачи в точке $\bar{\sigma}$ по подсистеме с индексом κ_0* (формальное определение этого понятия опускаем ввиду очевидности). Иначе говоря, подсистема κ_0 не ограничивает возможные значения q^{κ_0} в окрестности точки $\bar{q}^{\kappa_0}$ и функцию V^{κ_0} можно считать нулевой. Это означает, что фактически все рассмотрения, связанные с такими «пассивными» подсистемами можно опустить и перейти к случаю активности всех неравенств $V^\kappa \geq 0$ в точке $\bar{q}$.

Пусть, как и ранее, функции l , f^κ непрерывно дифференцируемы по (q^κ, x^κ, t) . Предположим, что для мультипроцесса $\bar{\sigma}$ выполнены достаточные условия с разрешающим множеством $\mathcal{V}_+$, все компоненты элементов которого дважды гладкие, т.е. все функции $V^\kappa(t, x; q_0^\kappa) \in C^2$ на $G^\kappa \times G^\kappa$, и каждая из них порождает активное ограничение в точке $\bar{q}^\kappa$: $V^\kappa(\bar{q}^\kappa) = 0$ ².

1) Сначала установим, что каждая функция $V \in \mathcal{V}_+$ порождает коэкстремаль гибридной системы.

Введем функции

$$(\psi_x^\kappa(t), \psi_t^\kappa(t)) = -\left(V_x^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t); \bar{q}_0^\kappa), V_t^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t); \bar{q}_0^\kappa)\right), \quad (2.19)$$

определенные на $\bar{\Delta}^\kappa = [\bar{a}^\kappa, \bar{b}^\kappa]$.

Из равенства $V^\kappa(\bar{q}^\kappa) = 0$ вытекает, что полная производная в силу системы функции $V^\kappa(\cdot, \cdot; \bar{q}_0^\kappa)$ равна нулю почти всюду на $\bar{\Delta}^\kappa$:

$$\dot{V}(t, \bar{x}^\kappa(t); \bar{q}_0^\kappa) = V_t^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t); \bar{q}_0^\kappa) + H^\kappa\left(t, \bar{x}^\kappa(t), V_x^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t); \bar{q}_0^\kappa), \bar{u}^\kappa(t)\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\psi_t^\kappa(t) + H^\kappa\left(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)\right) = 0 \quad \text{п.в. на } \bar{\Delta}^\kappa. \quad (2.20)$$

²Здесь и далее приняты упрощающие обозначения для начальной позиции κ -ой подсистемы — $q_0^\kappa := (a^\kappa, x_a^\kappa)$ и $\bar{q}_0^\kappa := (\bar{a}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{a}^\kappa))$.

Из неравенства Гамильтона-Якоби (2) для гладкой V^κ имеем очевидное неравенство

$$\psi_t^\kappa(t) + H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), u^\kappa) \leq 0 \quad \text{на} \quad \bar{\Delta}^\kappa \times U^\kappa. \quad (2.21)$$

Полученные выражения (2.20) и (2.21) содержат в себе условия максимума функции Понтрягина по управлениям $u^\kappa \in U^\kappa$.

Далее, вновь используя неравенство Гамильтона-Якоби (2), получаем оценку

$$\begin{aligned} & -V_t^\kappa(t, x^\kappa; \bar{q}_0^\kappa) + H^\kappa(t, x^\kappa, -V_x^\kappa(t, x^\kappa; \bar{q}_0^\kappa), \bar{u}^\kappa(t)) \leq \\ & \leq -V_t^\kappa(t, x^\kappa; \bar{q}_0^\kappa) + \sup_{u \in U^\kappa} H^\kappa(t, x^\kappa, -V_x^\kappa(t, x^\kappa; \bar{q}_0^\kappa), u) \leq 0 \quad \text{на} \quad G^\kappa, \end{aligned}$$

сравнение которой с равенством (2.20) показывает, что $\bar{x}^\kappa(t)$ максимизирует на $\bar{\Delta}^\kappa$ функцию, стоящую в левой части последнего неравенства. Так как множество G^κ открыто, то приравнявая нулю производную этой функции по x^κ вдоль $\bar{x}^\kappa(t)$, получаем сопряженное уравнение для $\psi_x^\kappa(t)$:

$$\dot{\psi}_x^\kappa(t) = -H_{x^\kappa}^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)) \quad \text{на} \quad \bar{\Delta}^\kappa. \quad (2.22)$$

Дифференцированием по t левой части (2.20) получаем уравнение для $\psi_t^\kappa(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_t^\kappa(t) &= -\frac{d}{dt} H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)) = \\ &= -H_t^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)) \quad \text{на} \quad \bar{\Delta}^\kappa \end{aligned} \quad (2.23)$$

(совпадение полной производной с частной, как известно [63], вытекает из условий максимума).

Соотношения (2.20)–(2.23) представляют собой условия биэкстремальности (см. параграф 2.3). Таким образом, антиградиент любой функции $V \in \mathcal{V}_+$ вдоль оптимального $\bar{\sigma}$ определяет коэкстремаль гибридной системы, что характеризует кандидаты в разрешающее множество для канонических достаточных условий.

2) Перед установлением связи K -достаточных условий с гибридным принципом максимума [9, 26, 118, 119, 122, 132, 139, 147, 148], заметим, что каждая составная $V = \{V^\kappa, \kappa = 1, \dots, N\} \in \mathcal{V}_+$ обладает аналогом свойства (Б) из параграфа 1.4 и, в частности, имеет место следующее свойство:

для каждого κ процесс $\bar{\sigma}^\kappa$ κ -ой подсистемы из (2.1) доставляет глобальный минимум в задаче без концевых ограничений

$$\omega[V^\kappa; \sigma^\kappa] := V^\kappa(b^\kappa, x^\kappa(b^\kappa); a^\kappa, x^\kappa(a^\kappa)) \rightarrow \min; \quad \sigma^\kappa \in \Sigma_f^\kappa.$$

Применяя принцип максимума Понтрягина к этой задаче получим, что существует функция $p^\kappa(\cdot) = (p_x^\kappa(\cdot), p_t^\kappa(\cdot))$, определенная на $\bar{\Delta}^\kappa$, и такая, что выполнены условия биэкстремальности

$$\begin{aligned} \dot{p}_y^\kappa &= -H_y^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), p_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)), \quad y = x, t, \\ H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), p_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)) + p_t^\kappa(t) &= 0 \quad \text{п.в. на } \bar{\Delta}^\kappa, \\ H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), p_x^\kappa(t), u^\kappa) + p_t^\kappa(t) &\leq 0 \quad \text{на } \bar{\Delta}^\kappa \times U^\kappa \end{aligned}$$

и условия трансверсальности

$$\begin{aligned} p_x^\kappa(\bar{a}^\kappa) &= \frac{\partial}{\partial x^\kappa(a^\kappa)} V^\kappa(\bar{b}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{b}^\kappa); \bar{a}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{a}^\kappa)), \\ p_x^\kappa(\bar{b}^\kappa) &= -\frac{\partial}{\partial x^\kappa(b^\kappa)} V^\kappa(\bar{b}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{b}^\kappa); \bar{a}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{a}^\kappa)), \\ p_t^\kappa(\bar{a}^\kappa) &= \frac{\partial}{\partial a^\kappa} V^\kappa(\bar{b}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{b}^\kappa); \bar{a}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{a}^\kappa)), \\ p_t^\kappa(\bar{b}^\kappa) &= -\frac{\partial}{\partial b^\kappa} V^\kappa(\bar{b}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{b}^\kappa); \bar{a}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{a}^\kappa)). \end{aligned}$$

Из предыдущего анализа связи градиентов функций из $\mathcal{V}_+$ с условиями биэкстремальности с применением условий трансверсальности получаем, что

$$(p_x^\kappa(t), p_t^\kappa(t)) = -\left(V_x^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t); \bar{q}_0^\kappa), V_t^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t); \bar{q}_0^\kappa)\right).$$

В частности,

$$(p_x^\kappa(\bar{a}^\kappa), p_t^\kappa(\bar{a}^\kappa)) = -\left(V_x^\kappa(\bar{q}_0^\kappa; \bar{q}_0^\kappa), V_t^\kappa(\bar{q}_0^\kappa; \bar{q}_0^\kappa)\right),$$

и, с учетом начальных условий для $p^\kappa(\cdot)$, получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\kappa(a^\kappa)} V^\kappa(\bar{b}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{b}^\kappa); \bar{q}_0^\kappa) &= -\frac{\partial}{\partial x^\kappa(b^\kappa)} V^\kappa(\bar{q}_0^\kappa; \bar{q}_0^\kappa), \\ \frac{\partial}{\partial a^\kappa} V^\kappa(\bar{b}^\kappa, \bar{x}^\kappa(\bar{b}^\kappa); \bar{q}_0^\kappa) &= -\frac{\partial}{\partial b^\kappa} V^\kappa(\bar{q}_0^\kappa; \bar{q}_0^\kappa). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Эти равенства понадобятся нам при анализе связи K -достаточных условий с принципом максимума, к которой мы сейчас переходим.

3) Предположим, что общее концевое ограничение (2.2) задано в форме неравенств и равенств

$$\varkappa(q) \leq 0, \quad k(q) = 0,$$

где все функции предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Выпишем необходимые условия оптимальности концевого мультивектора $\bar{q}$ в дискретно-концевой задаче $(EP(\mathcal{V}_+))$, предполагая, что разрешающее множество $\mathcal{V}_+$ состоит из M составных L -функций, т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_+ &= \{V[m], m = 1, \dots, M\}, \\ V[m] &= (V^1[m](t, x^1; q_0^1), \dots, V^N[m](t, x^N; q_0^N)). \end{aligned}$$

Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(q, \gamma) = L(q, \lambda) - \sum_{\kappa=1}^N \left(c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa V^\kappa[m](q^\kappa) \right),$$

где

$$L(q, \lambda) = \alpha_0 l(q) + \alpha \cdot \varkappa(q) + \beta \cdot k(q)$$

— концевая функция Лагранжа рассматриваемой задачи управления. Здесь $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta)$ — набор множителей из гибридного принципа максимума задачи (P_h) , $\gamma = (\lambda, c = (c^1, \dots, c^N), \delta = \{\delta_m^\kappa\})$ — набор множителей Лагранжа дискретно-концевой задачи $(EP(\mathcal{V}_+))$. Множители $c = (c^1, \dots, c^N)$ вводятся по ограничениям $\min_m V^\kappa[m](q^\kappa) \geq 0$, эквивалентным множествам ограничений

$$V^\kappa[m](q^\kappa) \geq 0, \quad m = 1, \dots, M$$

(см. [73, теорема 5.1]).

Необходимые условия экстремума первого порядка для задачи $(EP(\mathcal{V}_+))$ имеют следующий вид. Пусть $\bar{q}$ — точка локального минимума в этой задаче; тогда существует набор множителей Лагранжа γ , такой, что выполняются следующие условия:

а) нетривиальности —

$$\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + |c| > 0, \quad \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa = 1, \quad \kappa = 1, \dots, N;$$

б) неотрицательности —

$$\alpha_0 \geq 0, \quad \alpha \in R_+^{d(\varkappa)}, \quad c \in R_+^N, \quad \delta_m^\kappa \geq 0;$$

в) дополняющей нежесткости — $\alpha \cdot \varkappa(\bar{q}) = 0$;

г) стационарности —

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\kappa(a^\kappa)} \mathcal{L}(\bar{q}, \gamma) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^\kappa(b^\kappa)} \mathcal{L}(\bar{q}, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial a^\kappa} \mathcal{L}(\bar{q}, \gamma) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial b^\kappa} \mathcal{L}(\bar{q}, \gamma) = 0, \quad \kappa = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Конкретизируем выписанные условия, зафиксировав произвольный индекс κ . Условия стационарности по концам траекторий κ -ой подсистемы принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\kappa(a^\kappa)} \mathcal{L}(\bar{q}, \gamma) &= L_{x^\kappa(a^\kappa)}(\bar{q}, \lambda) - c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa V_{x^\kappa(a^\kappa)}^\kappa[m](\bar{q}^\kappa) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^\kappa(b^\kappa)} \mathcal{L}(\bar{q}, \gamma) &= L_{x^\kappa(b^\kappa)}(\bar{q}, \lambda) - c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa V_{x^\kappa(b^\kappa)}^\kappa[m](\bar{q}^\kappa) = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Тогда условия трансверсальности по времени запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a^\kappa} \mathcal{L}(\bar{q}, \gamma) &= L_{a^\kappa}(\bar{q}, \lambda) - c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa V_{a^\kappa}^\kappa[m](\bar{q}^\kappa) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial b^\kappa} \mathcal{L}(\bar{q}, \gamma) &= L_{b^\kappa}(\bar{q}, \lambda) - c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa V_{b^\kappa}^\kappa[m](\bar{q}^\kappa) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Используя представление, аналогичное (2.19), и свойство (2.24), соотношения (2.25), (2.26) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{x^\kappa(a^\kappa)}(\bar{q}, \lambda) - c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa \psi_x^\kappa[m](\bar{a}^\kappa) &= 0, \\ L_{x^\kappa(b^\kappa)}(\bar{q}, \lambda) + c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa \psi_x^\kappa[m](\bar{b}^\kappa) &= 0, \\ L_{a^\kappa}(\bar{q}, \lambda) - c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa \psi_t^\kappa[m](\bar{a}^\kappa) &= 0, \\ L_{b^\kappa}(\bar{q}, \lambda) + c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa \psi_t^\kappa[m](\bar{b}^\kappa) &= 0. \end{aligned}$$

Положим

$$\psi_y^\kappa(t) = c^\kappa \sum_{m=1}^M \delta_m^\kappa \psi_y^\kappa[m](t), \quad y = x, t.$$

Тогда функция $\psi^\kappa(t) = (\psi_x^\kappa(t), \psi_t^\kappa(t))$ удовлетворяет сопряженной системе (2.22), (2.23) и условию максимума (2.20), (2.21) в силу их линейности и неотрицательности множителей $c^\kappa, \delta_m^\kappa$.

Обратимся к условиям нетривиальности множителей λ и γ . В принципе максимума для λ оно имеет вид $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0$, что гарантирует нетривиальность γ в условии а). Но важно обратное следование:

1) если все $c^\kappa = 0$, то из (2.26) следует, что $\bar{q}$ является стационарной точкой конечномерной задачи

$$l(q) \rightarrow \min; \quad \varkappa(q) \leq 0, \quad k(q) = 0$$

(без влияния дифференциальных связей); это, конечно, случай не общего положения, но теоретически возможный;

2) если некоторые из $c^\kappa = 0$, но компонента $\lambda = 0$ в наборе γ , то $\bar{q}$ является стационарной точкой задачи без ограничений

$$\min_m V^\kappa[m](q^\kappa) \geq 0.$$

Отметим в заключение, что, во-первых, указанная связь K -достаточных условий с принципом максимума имеет место, если ослабить условие «начальной нормировки» на функции V^κ из разрешающего множества, т.е. если рассматривать функции с неравенством

$$V^\kappa(t_0, x_0^\kappa; t_0, x_0^\kappa) \geq 0 \quad \forall (t_0, x_0^\kappa) \in R^{n^\kappa+1}$$

вместо соответствующего равенства. Во-вторых, предположение о дважды гладкости разрешающих функций является жестким: техника, развитая в работах [94, 112, 130], позволяет получить установленные факты для случая липшицевых разрешающих функций.

2.6 Теоретические приложения, обобщения и примеры

2.6.1 Задачи с разрывной зависимостью по времени

Задачи оптимального управления системами с разрывными правыми частями по времени даже в классической постановке на нефиксированном отрезке (t_0, t_1) оптимизируются) довольно сложны для вариационного анализа. В немногочисленных публикациях по теории принципа максимума для таких задач [6, 118, 119, 152] основные сложности концентрировались в поиске корректной формы условий трансверсальности по времени, вызванные разрывностью гамильтониана вдоль исследуемого процесса. Специфический характер имеет в этом случае и метод динамического программирования даже в задачах с фиксированным временем [155], а какие-либо условия локальной оптимальности высших порядков нам неизвестны.

Между тем, в случае кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой зависимости правой части системы по времени такие задачи допускают естественное сведение к гладким задачам в дискретно-непрерывных системах (типа (P_h)). Технологию такого сведения и анализа иллюстрируют следующие примеры.

Пример 2.1 (с локально оптимальными процессами, которые не являются экстремальными [6]). Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ x^2 u, & t \geq 0, \end{cases} & \dot{y} &= \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 2t - t^2 u, & t \geq 0, \end{cases} \\ x(-1) &= 1, \quad y(-1) = 0, \quad T > -1, \\ u(t) &\geq 1, \quad J[\sigma] = y(T) \rightarrow \inf. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что в этом примере не существует глобально оптимального процесса и $\inf J = -\infty$ из-за неограниченности сверху горизонта T и множества управлений U (достаточно рассмотреть последовательности

$$\{T_k, u_k\} \quad \text{при} \quad T_k \rightarrow \infty, \quad u_k = u_* \geq 1 \quad \forall k,$$

или при $T_k = T_* > 0 \ \forall k, \ u_k = k, \ k = 1, 2, \dots$). Однако здесь имеется процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u} \mid t \in [-1, \bar{T}] = [-1, 0])$, доставляющий ограниченно-сильный минимум [61, 141]. Это означает, что для любого $M > 0$ не существует последовательности $\{\sigma_k\}$, для которой $u_k \in [1, M] \ \forall k, \ T_k \rightarrow \bar{T}, \ (x_k, y_k) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ равномерно на общей области определения. Более того, таких процессов (инвариантных по функционалу) бесконечно много и они отличаются лишь выбором управления на отрезке $[-1, 0]$, который не играет никакой роли.

Действительно, возьмем любое $M > 1$ и рассмотрим M -задачу, которая получается сужением исходной на отрезок управлений $U_M = [1, M]$. Из-за разрыва по t правой части управляемой системы M -задачу можно интерпретировать как двухэтапную, что мы фактически и будем использовать без формальных переобозначений.

Следуя K -достаточным условиям, на первом отрезке $[-1, 0]$ находим два очевидных первых интеграла $\varphi^1 = x, \ \varphi^2 = y + t + 1$, а на втором находим решение соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби

$$\min_{u \in [1, M]} (\varphi_t + 2t\varphi_y - t^2 u \varphi_y) = 0,$$

не зависящее от x (поскольку функционал фактически интегральный и интегрант не зависит от x). Этим путем получаем сильно возрастающую

$$\varphi^3 = y - t^2 + \frac{t^3 M}{3}.$$

Теперь по набору $\Phi = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ естественным образом формируем концевую задачу $(EP(\Phi))$:

$$\begin{aligned} y(T) \rightarrow \min_{T, y(T)}, \quad & \text{если при } T \in (-1, 0] \quad x = 1, \quad y(T) = -T - 1, \\ & \text{а при } T > 0 \quad \Delta\varphi^3|_0^T = y(T) - T^2 + \frac{T^3 M}{3} + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда легко находим её решение $T_* = 0, \ y_*(T_*) = -1$ и все соответствующие процессы $\bar{\sigma}$ с $\bar{x} \equiv 1, \ \bar{y}(t) = -t - 1$ и любыми $\bar{u}(\cdot)$ со значениями в U_M , оптимальные в M -задаче. Тем самым нужный факт локальной оптимальности $\bar{\sigma}$ установлен (и даже с избытком).

Однако, как показано в [6, с. 106], в исходной задаче $\bar{\sigma}$ не удовлетворяет принципу максимума — нарушаются условия трансверсальности по времени³.

Пример 2.2. Рассмотрим классическую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad x(-1) = 1, \\ u(t) &\in U = [1, 2], \quad T \in [-1, 3], \\ J &= \int_{-1}^T F(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ u, & t \geq 0, \end{cases} \\ F(t, x, u) &= \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 2t - t^2u - x, & t \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

— функции, разрывные при $t = 0$.

Данный пример представляет очевидную модификацию предыдущего. Мы разберем его более формально.

Приведем целевой функционал задачи к терминальному виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ u, & t \geq 0, \end{cases} \quad \dot{y} = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 2t - t^2u - x, & t \geq 0, \end{cases} \\ u(t) &\in U = [1, 2], \quad T \in [-1, 3], \\ x(-1) &= 1, \quad y(-1) = 0, \\ J &= y(T) \rightarrow \inf. \end{aligned}$$

Для краткости обозначим эту задачу через (P) .

Будем исследовать на глобальную оптимальность процесс $\bar{\varsigma}$, траектория и управление которого имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0, \\ 2t + 1, & 0 \leq t \leq 3, \end{cases} \quad \bar{y}(t) = \begin{cases} -t - 1, & -1 \leq t < 0, \\ -2/3t^3 - t - 1, & 0 \leq t \leq 3, \end{cases} \\ \bar{u}(t) &= \begin{cases} u_0, & -1 \leq t < 0, \\ 2, & 0 \leq t \leq 3, \end{cases} \quad \bar{T} = 3, \quad J[\bar{\varsigma}] = -22, \end{aligned}$$

³В [6] утверждалась оптимальность $\bar{\sigma}$, но мы видели, что это не так.

где $u_0 \in [1, 2]$ — любое.

Для того чтобы свести задачу (P) к задаче управления гладкой гибридной системой, определим следующие три гладкие подсистемы:

$$\begin{aligned} S^1 : \quad & \dot{x}^1 = 0, \\ & \dot{y}^1 = -1, \\ & t \in \Delta^1 = [a^1, b^1]; \\ S^2 : \quad & \dot{x}^2 = u^2, \\ & \dot{y}^2 = 2t - t^2 u^2 - x^2, \\ & u^2(t) \in U = [1, 2], \\ & t \in \Delta^2 = [a^2, b^2]; \\ S^3 : \quad & \dot{z} = 0, \\ & t \in \Delta^3 = [a^1, b^2], \end{aligned}$$

для которых заданы следующие концевые ограничения и целевой функционал:

$$\begin{aligned} a^1 = -1 \leq b^1 \leq a^2 = 0 \leq b^2 \leq 3, \quad b^1 b^2 &= 0, \\ x^1(a^1) = 1, \quad y^1(a^1) = 0, \quad z(a^1) = z_0 \in \{0, 1\}, \\ (1 - z(a^1)) \left[\begin{pmatrix} x^1(b^1) \\ y^1(b^1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2(a^2) \\ y^2(a^2) \end{pmatrix} \right] &= 0; \\ I = z(b^2) y^1(b^1) + (1 - z(b^2)) y^2(b^2) &\rightarrow \inf. \end{aligned}$$

Эту задачу обозначим через (P_h) .

Установим её взаимосвязь с задачей (P) . Отображение множества допустимых процессов задачи (P) в допустимое множество задачи (P_h) определим следующим образом. Пусть $\tilde{\zeta} = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{u}(t), \tilde{T})$ — процесс, допустимый в задаче (P) . Тогда, если $\tilde{T} < 0$, то мультипроцесс

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = \{ & \tilde{\sigma}^1 = (\tilde{x}^1(t) = \tilde{x}(t), \tilde{y}^1(t) = \tilde{y}(t), \tilde{b}^1 = \tilde{T} \mid t \in [-1, \tilde{T}]), \\ & \tilde{\sigma}^2 = (\tilde{x}^2(t) = \tilde{x}(t), \tilde{y}^2(t) = \tilde{y}(t), \tilde{u}^2(t) = \tilde{u}(t), \tilde{b}^2 = 0 \mid t \in [0, 0]), \\ & \tilde{\sigma}^3 = (z(t) \equiv 1 \mid t \in [-1, 0]) \} \end{aligned}$$

с произвольными $\tilde{x}^2(t), \tilde{y}^2(t), \tilde{u}^2(t)$ допустим в задаче (P_h) . Если же $\tilde{T} \geq 0$, то процессу $\tilde{\zeta}$ соответствует также допустимый в задаче (P_h) мультипроцесс

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = \{ & \tilde{\sigma}^1 = (\tilde{x}^1(t) = \tilde{x}(t), \tilde{y}^1(t) = \tilde{y}(t), \tilde{b}^1 = 0 \mid t \in [-1, 0]), \\ & \tilde{\sigma}^2 = (\tilde{x}^2(t) = \tilde{x}(t), \tilde{y}^2(t) = \tilde{y}(t), \tilde{u}^2(t) = \tilde{u}(t), \tilde{b}^2 = \tilde{T} \mid t \in [0, \tilde{T}]), \\ & \tilde{\sigma}^3 = (z(t) \equiv 0 \mid t \in [-1, \tilde{T}]) \}. \end{aligned}$$

Подобным образом можно определить обратное отображение так, чтобы значения целевых функционалов задач на паре процесс-мультипроцесс сов-

падали. Можно показать, что если $\tilde{\zeta}$ глобально оптимален в задаче (P) , то $\tilde{\sigma}$ — глобально оптимальный мультипроцесс в задаче (P_h) , и наоборот.

Таким образом, для доказательства оптимальности процесса $\bar{\zeta}$ достаточно убедиться в оптимальности следующего мультипроцесса $\bar{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^1 &= \left(\begin{array}{l} \bar{x}^1(t) \equiv 1, \\ \bar{y}^1(t) = -t - 1, \\ \bar{\Delta}^1 = [-1, 0] \end{array} \right), \quad \bar{\sigma}^2 = \left(\begin{array}{l} \bar{x}^2(t) = 2t + 1, \\ \bar{y}^2(t) = -2/3t^3 - t - 1, \\ \bar{u}^2(t) \equiv 2, \\ \bar{\Delta}^2 = [0, 3] \end{array} \right), \\ \bar{\sigma}^3 &= \left(\begin{array}{l} \bar{z}(t) \equiv \bar{z}_0 = 0, \\ \bar{\Delta}^3 = [-1, 3] \end{array} \right), \quad I[\bar{\sigma}] = -22. \end{aligned}$$

Запишем для каждой подсистемы неравенство Гамильтона-Якоби:

$$\begin{aligned} \bar{h}^1[\varphi^1](t, x, y) &= \varphi_t^1 - \varphi_y^1 \geq 0, \quad t \in I^1, \quad x \in R, \quad y \in R, \\ \bar{h}^2[\varphi^2](t, x, y) &= \varphi_t^2 + \min_{u \in [1, 2]} \{ \varphi_x^2 u + \varphi_y^2 (2t - t^2 u - x) \} = \\ &= \begin{cases} \varphi_t^2 + \varphi_x^2 + (2t - t^2 - x) \varphi_y^2 \geq 0, & \varphi_x^2 - \varphi_y^2 t^2 \geq 0, \\ \varphi_t^2 + 2\varphi_x^2 + (2t - 2t^2 - x) \varphi_y^2 \geq 0, & \varphi_x^2 - \varphi_y^2 t^2 < 0, \end{cases} \\ &\quad t \in I^2, \quad x \in R, \quad y \in R, \\ \bar{h}^3[\varphi^3](t, z) &= \varphi_t^3 \geq 0, \quad t \in I^3, \quad z \in R, \end{aligned}$$

где $I^\kappa \supset \bar{\Delta}^\kappa$ — некоторые интервалы на R . Нетрудно убедиться, что следующие функции принадлежат классу сильно возрастающих L -функций: для первой системы —

$$\varphi^{11}(x^1) = x^1, \quad \varphi^{12}(t, y^1) = t + y^1;$$

для второй —

$$\begin{aligned} \varphi^{21}(t, x^2, y^2) &= (t - 3)(x^2 - 2t - 1) + y^2 + 2/3t^3 + t + 1, \\ \varphi^{22}(t, x^2) &= -x^2 + 2t + 1, \quad \varphi^{23}(t, x^2) = x^2 - t - 1; \end{aligned}$$

и для третьей —

$$\varphi^{31}(t, z) = z.$$

Все эти функции удовлетворяют соответствующим уравнениям Гамильтона-Якоби. Поскольку подсистемы S^1 и S^3 фактически являются неуправляемыми, для них в качестве сильно монотонных функций типа Ляпунова φ^{11} , φ^{12} и φ^{31} естественно рассматривать независимые первые интегралы этих подсистем. Во вспомогательной конечномерной задаче свойство монотонности (постоянства) таких функций можно записать в виде равенств. Для второй подсистемы S^2 функция φ^{21} получена с использованием условий экстремальности второго подпроцесса (см. параграф 2.3). Функции φ^{22} , φ^{23} позволяют описать очевидное множество достижимости уравнения $\dot{x}^2 = u^2 \in [1, 2]: x^2(t) \in 1 + [1, 2]t$.

Рассмотрим соответствующую дискретно-концевую задачу (EP) :

$$\begin{aligned} l(z_b, b^1, x_b^1, y_b^1, b^2, x_b^2, y_b^2) &= z_b y_b^1 + (1 - z_b) y_b^2 \rightarrow \inf; \\ a^1 = -1 \leq b^1 \leq a^2 = 0 \leq b^2 \leq 3, \quad b^1 b^2 &= 0, \\ x_a^1 = 1, \quad y_a^1 = 0, \quad z_a(z_a - 1) &= 0, \\ (1 - z_a) \left[\begin{pmatrix} x_b^1 \\ y_b^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_a^2 \\ y_a^2 \end{pmatrix} \right] &= 0, \\ \Delta \varphi^{11}(x_b^1; x_a^1) = 0, \quad \Delta \varphi^{12}(b^1, y_b^1; a^1, y_a^1) &= 0, \quad \Delta \varphi^{31}(z_b; z_a) = 0, \\ \Delta \varphi^{21}(b^2, x_b^2, y_b^2; a^2, x_a^2, y_a^2) \geq 0, \quad \Delta \varphi^{22}(b^2, x_b^2; a^2, x_a^2) &\geq 0, \\ \Delta \varphi^{23}(b^2, x_b^2; a^2, x_a^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Несложный, но разветвленный анализ задачи (EP) позволяет установить, что концевой мультивектор $\bar{q} = \bar{q}(\bar{\sigma})$ является точкой минимума (хотя и не строгого). Для этого можно рассмотреть два случая — $z_a = 0$ и $z_a = 1$ — и найденные в них точки сравнить по значению целевой функции. Так доказывается глобальная оптимальность мультипроцесса $\bar{\sigma}$ в задаче (P_h) . Значит процесс $\bar{\varsigma}$ глобально оптимален в исходной задаче (P) .

Отметим, что, как и следовало ожидать, для линейных подсистем разрешающими являются линейные (по фазовым переменным) L -функции, при этом для подсистемы S^2 пришлось использовать множество таких функций.

2.6.2 Исследование экстремалей с разрывным управлением

Исследование на оптимальность экстремалей с переключением управления в классических задачах также сопряжено со значительными сложностями: при традиционном локальном анализе (на понтрягинский и сильный экстремум [61]) вторая вариация лагранжиана задачи принимает нестандартный вид, содержащий «промежуточные» слагаемые, соответствующие варьированию моментов переключения, уравнение в вариациях из критического конуса рассматривается с разрывными решениями в моменты переключения и т.д. (см. [2] и наиболее полные из известных результаты Н.П. Осмоловского [71, 141] по неособым экстремалам и А.В. Дмитрука [121] по особым режимам без переключений; ряд достаточных условий локальной оптимальности получен в рамках подхода Кротова [24, 28, 56, 60, 136, 138], но они не смыкаются с необходимыми). Можно сказать, что для разрывных экстремалей, или экстремалей с комбинацией режимов различного типа существенно усложняются аналоги классических условий Лежандра и Якоби. В этой ситуации применение методов оптимизации гибридных систем может оказаться конструктивным дополнительным инструментом анализа.

По своей реализации этот подход во-многом аналогичен описанному в предыдущем пункте: классическая задача редуцируется к многоэтапной — по числу моментов смены типов исследуемого управления (или моментов его скачков), которые варьируются с сохранением непрерывности траекторий (промежуточные ограничения). Тонкий вопрос о том, какой тип минимума анализируется на исследуемой экстремали, зависит от метода решения редуцированной задачи.

Пример 2.3 (гармонической осциллятор с ограниченным управлением [8]). Рассмотрим следующую задачу:

$$J = \int_0^T (\dot{x}^2(t) - x^2(t)) dt \rightarrow \min; \quad x(0) = x(T) = 0, \quad |\dot{x}(t)| \leq A. \quad (2.27)$$

В отсутствии ограничения на производную $\dot{x}$ это хрестоматийный пример на иллюстрацию условия Якоби отсутствия сопряженных точек на

экстремали $\bar{x} = 0$, в котором не существует глобального решения при $T > \pi$ (точка $T = \pi$ является сопряженной с нулем на нулевой экстремали) [19, 55, 70]. Ситуация меняется при добавлении ограничения $|\dot{x}| \leq A$ — при $T > \pi$ в задаче имеются два глобальных решения $\bar{x}$, $\tilde{x}$, найденные в [8] с помощью принципа максимума Понтрягина:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} At, & 0 \leq t \leq \tau, \\ A\sqrt{1 + \tau^2} \cos(t - T/2), & \tau \leq t \leq T - \tau, \\ A(T - t), & T - \tau \leq t \leq T, \end{cases}$$

и $\tilde{x}(t) = -\bar{x}(t)$, где τ — единственный корень уравнения

$$T = 2(\tau + \arctg(1/\tau)).$$

Глобальная оптимальность этих процессов установлена сравнением по значению целевого функционала бесконечного числа понтрягинских экстремалей задачи (существование оптимального решения вытекает из теоремы о существовании решения вариационной задачи при ограничении на производную [8, с. 126]).

Покажем, что при $T > \pi$ глобальную оптимальность процессов $\bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}$ с траекториями $\bar{x}$, $\tilde{x}$ можно установить с помощью K -достаточных условий оптимальности, если использовать прием перехода от классической задачи к эквивалентной гибридной постановке.

Перепишем задачу (2.27) в стандартной форме задачи оптимального управления типа (P) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad \dot{y} = u^2 - x^2, \quad |u(t)| \leq A, \\ x(0) &= x(T) = 0, \quad y(0) = 0, \\ J[\sigma] &= y(T) \rightarrow \min, \end{aligned}$$

и выпишем компоненты оптимальных в ней процессов $\bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}$:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} At, & 0 \leq t \leq \tau, \\ A\sqrt{1 + \tau^2} \cos(t - T/2), & \tau \leq t \leq T - \tau, \\ A(T - t), & T - \tau \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -A\sqrt{1 + \tau^2} \sin(t - T/2), & \tau \leq t \leq T - \tau, \\ -A, & T - \tau \leq t \leq T, \end{cases}$$

$\tilde{x}(t) = -\bar{x}(t)$, $\tilde{u}(t) = -\bar{u}(t)$ (для избежания громоздкости описание несущественных фазовых компонент $\bar{y}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ опускаем). Нетрудно проверить, что

$$J[\bar{\sigma}] = J[\tilde{\sigma}] = -\frac{2A^2\tau^3}{3}.$$

Рассмотрим задачу типа (P_h) с тремя этапами — по числу типов режимов управления $\bar{u}$:

$$\dot{x}^\kappa = u^\kappa, \quad \dot{y}^\kappa = (u^\kappa)^2 - (x^\kappa)^2, \quad |u^\kappa(t)| \leq A, \quad (2.28)$$

$$t \in \Delta^\kappa = [\tau_{\kappa-1}, \tau_\kappa], \quad \kappa = 1, 2, 3,$$

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 : T = 2(\tau_1 + \arctg(1/\tau_1)), \quad \tau_2 = T - \tau_1, \quad \tau_3 = T,$$

$$x^1(0) = 0, \quad y^1(0) = 0,$$

$$x^{\kappa+1}(\tau_\kappa) = x^\kappa(\tau_\kappa), \quad y^{\kappa+1}(\tau_\kappa) = y^\kappa(\tau_\kappa), \quad \kappa = 1, 2,$$

$$x^3(T) = 0, \quad J = y^3(T) \rightarrow \min.$$

Эта гибридная задача получается из исходной разбиением отрезка времени $\Delta = [0, T]$ на три фиксированных отрезка $\Delta^\kappa = [\tau_{\kappa-1}, \tau_\kappa]$, на каждом из которых рассматривается исходная динамическая система, т.е. имеем три одинаковые подсистемы. Траектории подсистем (x^κ, y^κ) «склеиваются» по непрерывности в моменты τ_κ переключения подсистем. Очевидно, что между множествами процессов и решениями обеих задач существует взаимно однозначное отображение, т.е. задачи эквивалентны. В задаче типа (P_h) будем исследовать на оптимальность мультипроцессы $\bar{\sigma}_h = (\bar{\sigma}^1, \bar{\sigma}^2, \bar{\sigma}^3)$, $\tilde{\sigma}_h = (\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^3)$, где

$$\bar{\sigma}^\kappa = \bar{\sigma}|_{\Delta^\kappa}, \quad \tilde{\sigma}^\kappa = \tilde{\sigma}|_{\Delta^\kappa}.$$

Заметим, что все допустимые в задаче траектории лежат во множестве $W = W_1 \cap W_2$, где

$$W_1 = \{(t, x, y) \mid |x| \leq At\}, \quad W_2 = \{(t, x, y) \mid |x| \leq A(T - t)\}.$$

Рассмотрим первую подсистему на Δ^1 . Поскольку на данном отрезке времени управление гранично, то будем искать линейные L -функции вида $\varphi^\psi(t, x, y) = \psi x + y + c(t)$. Заметим, что

$$h(t, x, \psi) = \min_{|u| \leq A} \{\psi u + u^2 - x^2\} = \begin{cases} -\frac{\psi^2}{4} - x^2, & |\psi| \leq 2A, \\ -A|\psi| + A^2 - x^2, & |\psi| \geq 2A, \end{cases}$$

и минимум функции Понтрягина доставляет φ^ψ -экстремальное управление

$$u^{\varphi^\psi} = u_*[\psi] = \begin{cases} -\frac{\psi}{2}, & |\psi| \leq 2A, \\ -A \operatorname{sign} \psi, & |\psi| \geq 2A. \end{cases}$$

Пусть $|\psi| \leq 2A$. Тогда

$$\bar{h}[\varphi^\psi](t, x) = \dot{c} - \frac{\psi^2}{4} - x^2.$$

Чтобы конкретизировать функцию c , рассмотрим уравнение

$$\min_{x \in W^t} \bar{h}[\varphi^\psi](t, x) = \dot{c} - \frac{\psi^2}{4} - A^2 t^2 = 0$$

(здесь $W^t = \{x \mid |x| \leq At, |x| \leq A(T-t)\}$ — сечение по t множества W). Выберем

$$c(t) = \frac{\psi^2}{4}t + \frac{A^2}{3}t^3.$$

Ясно, что любая функция семейства (по ψ)

$$\varphi^\psi(t, x, y) = \psi x + y + \frac{\psi^2}{4}t + \frac{A^2}{3}t^3, \quad |\psi| \leq 2A \quad (2.29)$$

сильно возрастает на W относительно первой подсистемы. Заметим, что подобным образом можно построить другое множество сильно возрастающих функций

$$\varphi^\psi(t, x, y) = \psi x + y + A|\psi|t - A^2t + \frac{A^2}{3}t^3, \quad |\psi| \geq 2A.$$

Перейдем от семейства (2.29) линейных функций к нижней огибающей

$$V_*^1(t, x, y) = \min_{|\psi| \leq 2A} \varphi^\psi(t, x, y) = \begin{cases} -\frac{x^2}{t} + y + \frac{A^2}{3}t^3, & t \neq 0, \\ y, & t = 0 \end{cases}$$

(справедливость перехода к нижней огибающей от множества традиционных L -функций обеспечивается фиксированностью начальной позиции для траекторий первой подсистемы).

Аналогично находится бипозиционная сильно возрастающая L -функция для третьей подсистемы

$$V_*^3(t, x, y; t_0, x_0, y_0) = \begin{cases} -\frac{(x - x_0)^2}{t - t_0} + y - y_0 - \frac{A^2}{3}(T - t)^3 + \frac{A^2}{3}(T - t_0)^3, & t \neq t_0, \\ y - y_0, & t = t_0, \end{cases}$$

где (t_0, x_0, y_0) обозначает начальную позицию третьей подсистемы — $(\tau_2, x^3(\tau_2), y^3(\tau_2))$.

Рассмотрим теперь вторую подсистему на Δ^2 . Поскольку управления исследуемых процессов на этом отрезке внутренние, то будем искать квадратичную L -функцию $\varphi(t, x, y) = S(t)x^2 + y$. Для нее нижний гамильтониан

$$\bar{h}[\varphi] = \dot{S}x^2 + \min_{|u| \leq A} \{2Sxu + u^2 - x^2\} = \begin{cases} (\dot{S} - S^2 - 1)x^2, & |Sx| \leq A, \\ (\dot{S} - 1)x^2 - 2A|Sx| + A^2, & |Sx| \geq A, \end{cases}$$

а φ -экстремальное управление

$$u^\varphi = \begin{cases} -Sx, & |Sx| \leq A, \\ -A \operatorname{sign}(Sx), & |Sx| \geq A. \end{cases}$$

Предположим, что $|Sx| \leq A$. Тогда уравнение Гамильтона-Якоби для φ примет вид

$$\bar{h}[\varphi] = (\dot{S} - S^2 - 1)x^2 = 0 \quad \forall (t, x) \in W, \quad t \in \Delta^2.$$

Функцию S выберем из уравнения $\dot{S} - S^2 - 1 = 0$, т.е. $S(t) = \operatorname{tg}(t + c)$, где c — пока произвольная константа интегрирования. Для $S(t)$ и всех $x \in W^t$ должно выполняться условие $|S(t)x| \leq A \quad \forall t \in \Delta^2$. Очевидно, что

$$|S(t)x| = |S(t)||x| \leq |S(t)||At| \quad \text{и} \quad |S(t)x| \leq |S(t)||A(T - t)|$$

для всех $(t, x) \in W$, $t \in \Delta^2$, откуда на $S(t)$ получаем условие

$$|S(t)| \leq \min \left\{ \frac{1}{t}, \frac{1}{T-t} \right\} \quad \forall t \in \Delta^2 = [\tau, T - \tau].$$

Легко убедиться, что функция $S(t) = \operatorname{tg}(t - T/2)$ удовлетворяет этим условиям. Следовательно, квадратичная бипозиционная функция

$$V^2(t, x, y; t_0, x_0, y_0) = x^2 \operatorname{tg}(t - T/2) - x_0^2 \operatorname{tg}(t_0 - T/2) + y - y_0$$

$((t_0, x_0, y_0) := (\tau_1, x^2(\tau_1), y^2(\tau_1)))$ сильно возрастает относительно второй подсистемы на W .

Обозначим через $V = \{V_*^1, V^2, V_*^3\}$ сильно возрастающую составную функцию гибридной системы (2.28) и рассмотрим соответствующую дискретно-концевую задачу $(EP(V))$:

$$\begin{aligned} l(q) &= y_3 \rightarrow \min; \\ y_3 &\geq \frac{x_2^2}{T - \tau_2} - \frac{A^2}{3}(T - \tau_2)^3 + y_2, \\ y_2 &\geq -x_2^2 \operatorname{tg}(\tau_2 - T/2) + x_1^2 \operatorname{tg}(\tau_1 - T/2) + y_1, \\ y_1 &\geq \frac{x_1^2}{\tau_1} - \frac{A^2}{3}\tau_1^3, \end{aligned}$$

где $y_\kappa := y^\kappa(\tau_\kappa)$, $x_\kappa := x^\kappa(\tau_\kappa)$.

Легко видеть, что $\min(EP(V)) = -2A^2\tau^3/3$, чем устанавливается оптимальность мультипроцессов $\bar{\sigma}_h$, $\tilde{\sigma}_h$ и, следовательно, оптимальность процессов $\bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}$ в исходной задаче.

2.6.3 Использование производящих функций

Методы производящих функций из параграфа 1.6 применимы и для задач оптимизации гибридных систем. В качестве иллюстрации получим соотношения нестандартной двойственности и необходимое условие оптимальности — *копозиционный принцип минимума* — для следующей линейной

задачи оптимального управления $(\mathcal{L}_h)$:

$$\dot{x}^\kappa = A^\kappa(t, u^\kappa)x^\kappa + b^\kappa(t, u^\kappa), \quad u^\kappa(t) \in U^\kappa, \quad (2.30)$$

$$t \in \Delta^\kappa = [t_{\kappa-1}, t_\kappa], \quad \kappa = 1, 2,$$

$$x^1(t_0) = x_0, \quad x^2(t_1) = Cx^1(t_1) + d, \quad (2.31)$$

$$J[\sigma] = l'_1 x^1(t_1) + l'_2 x^2(t_2) \rightarrow \inf.$$

Здесь отрезки времени Δ^κ фиксированы, матричные функции A^κ , b^κ непрерывны, C , d , l_1 , l_2 — числовые матрица и векторы, множества U^κ компактны.

Рассмотрим задачу сравнения $(\mathcal{L}'_h)$:

$$\dot{\psi}^\kappa = -(A^\kappa(t, u^\kappa))'\psi^\kappa, \quad u^\kappa(t) \in U^\kappa, \quad (2.32)$$

$$t \in \Delta^\kappa = [t_{\kappa-1}, t_\kappa], \quad \kappa = 1, 2,$$

$$\psi^1(t_1) = l_1 + C'\psi^2(t_1), \quad \psi(t_2) = l_2, \quad (2.33)$$

$$K[\sigma'] = K^1[\sigma'^1] + K^2[\sigma'^2] \rightarrow \inf, \quad (2.34)$$

где

$$K^1[\sigma'^1] = x'_0 \psi^1(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} (\psi^1(t))' b^1(t, u^1(t)) dt,$$

$$K^2[\sigma'^2] = d' \psi^2(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (\psi^2(t))' b^2(t, u^2(t)) dt,$$

через σ' обозначен произвольный допустимый мультипроцесс задачи $(\mathcal{L}'_h)$, т.е. $\sigma' = (\sigma'^1, \sigma'^2)$, $\sigma'^\kappa = (\psi^\kappa, u^\kappa)$.

Задача сравнения $(\mathcal{L}'_h)$ получается из исходной, если рассмотреть пару производящих функций $S^\kappa(x^\kappa, \psi^\kappa) = (\psi^\kappa)'x^\kappa$. Для каждой из них выполняется равенство

$$S^\kappa(x^\kappa(t_\kappa), \psi^\kappa(t_\kappa)) - S^\kappa(x^\kappa(t_{\kappa-1}), \psi^\kappa(t_{\kappa-1})) = \int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} (\psi^\kappa(t))' b^\kappa(t, u^\kappa(t)) dt$$

вдоль пар процессов σ^κ , σ'^κ с одним и тем же управлением u^κ . Откуда с учетом концевых условий (2.31), (2.33) на траектории x^κ и котраектории ψ^κ следует

Лемма 2.6.1. *Задачи $(\mathcal{L}_h)$ и $(\mathcal{L}'_h)$ эквивалентны: их значения и минимизирующие последовательности совпадают.*

Пусть теперь $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}^1, \bar{\sigma}^2)$ — допустимый в задаче $(\mathcal{L}_h)$ процесс. Для каждого κ рассмотрим производящую функцию

$$\bar{S}^\kappa(t, x^\kappa, \psi^\kappa) = (\psi^\kappa)'(x^\kappa - \bar{x}^\kappa(t)).$$

Для каждой из них полная производная в силу подсистем из (2.30), (2.32)

$$\dot{\bar{S}}^\kappa(t, \psi^\kappa, u^\kappa) = H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi^\kappa, u^\kappa) - H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi^\kappa, \bar{u}^\kappa(t)),$$

откуда следует, что

$$\min_{U^\kappa} \dot{\bar{S}}^\kappa(t, \psi^\kappa, u^\kappa) \leq 0 \quad \forall (t, \psi^\kappa) \in \Delta^\kappa \times R^n,$$

т.е. каждая $\bar{S}^\kappa$ слабо убывают вдоль соответствующей пары подсистем (исходной и сопряженной). Поскольку вдоль любой пары траекторий $(x^\kappa(\cdot), \psi^\kappa(\cdot))$ с одним и тем же управлением $u^\kappa(\cdot)$

$$\begin{aligned} \bar{S}^\kappa(t_\kappa, x^\kappa(t_\kappa), \psi^\kappa(t_\kappa)) - \bar{S}^\kappa(t_{\kappa-1}, x^\kappa(t_{\kappa-1}), \psi^\kappa(t_{\kappa-1})) &= \\ &= \int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} \dot{\bar{S}}^\kappa(t, \psi^\kappa(t), u^\kappa(t)) dt, \end{aligned}$$

то, суммируя эти равенства при $\kappa = 1, 2$ с учетом граничных условий (2.33) и правила пересчета из (2.31), получим равенство

$$J[\sigma] - J[\bar{\sigma}] = K[\sigma'] - K[\bar{\sigma}'] = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{S}}^1(t, \psi^1(t), u^1(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{\bar{S}}^2(t, \psi^2(t), u^2(t)) dt$$

для любой пары допустимых мультипроцессов σ и σ' с одним и тем же управлением $u = (u^1, u^2)$.

Определим многозначные отображения

$$U_*^\kappa(t, \psi^\kappa) = \underset{U^\kappa}{\operatorname{Argmin}} H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi^\kappa, u^\kappa). \quad (2.35)$$

Заметим, они не зависят от фазовых переменных x^κ . Обозначим через $\mathcal{W}^\kappa$ множества селекторов $w^\kappa(t, \psi^\kappa)$ отображений (2.35), которые назовем *копозиционными стратегиями*. Через $\Psi^\kappa(w^\kappa)$ будем обозначать множество кривых Эйлера κ -ой сопряженной системы из (2.32), замкнутой стратегией w^κ , т.е. системы

$$\dot{\psi}^\kappa = -\left(A^\kappa(t, w^\kappa(t, \psi^\kappa))\right)' \psi^\kappa$$

(при соответствующих граничных условиях из (2.33)). Теперь распространим функционал сравнения (2.34) на множество $(\Psi^1 \times \mathcal{W}^1) \times (\Psi^2 \times \mathcal{W}^2)$ пар $\psi = (\psi^1, \psi^2)$, $w = (w^1, w^2)$ следующим образом.

Пусть для каждого κ $\Pi^\kappa(\psi^\kappa)$ — множество всех последовательностей $\{\rho_i^\kappa, \psi_{\rho_i}^\kappa, u_{\rho_i}^\kappa\}$ разбиений ρ_i отрезка Δ^κ с диаметром $|\rho_i| \rightarrow 0$, ломанных Эйлера $\psi_{\rho_i}^\kappa$ и кусочно постоянных управлений $u_{\rho_i}^\kappa$ со свойством сходимости $\psi_{\rho_i}^\kappa \rightarrow \psi^\kappa$ в $C(\Delta^\kappa)$. Тогда положим

$$K[\psi, w] = \sum_{\kappa=1}^2 \inf_{\Pi^\kappa(\psi^\kappa)} \lim_{i \rightarrow \infty} K^\kappa[\psi_{\rho_i}^\kappa, u_{\rho_i}^\kappa].$$

Копозиционный принцип минимума для задачи $(\mathcal{L}_h)$ формулируется следующим образом.

Теорема 2.6.1. *Для оптимальности мультипроцесса $\bar{\sigma}$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$J[\bar{\sigma}] = K[\bar{\sigma}'] \leq K[\psi, w] \quad \forall \psi^\kappa \in \Psi^\kappa(w^\kappa), \quad \forall w^\kappa \in \mathcal{W}^\kappa, \quad \kappa = 1, 2.$$

Глава 3

Монотонность, достижимость и оптимальность в задачах управления дискретными системами

В этой главе метод неравенств Гамильтона-Якоби и канонические условия оптимальности распространяются на задачи управления дискретными (конечно-разностными) и некоторыми дискретно-импульсными системами. Помимо самостоятельного интереса, результаты главы служат естественным дополнением к предыдущей, поскольку вспомогательные дискретно-концевые экстремальные задачи в канонических условиях оптимальности для гибридных систем могут относиться к рассматриваемым далее классам задач.

Основные результаты главы опубликованы в работах [47, 87, 88, 90, 91].

3.1 Сильно и слабо монотонные L -функции для дискретных систем

Рассмотрим дискретную управляемую динамическую систему (S_d) :

$$x(\kappa + 1) = f(\kappa, x(\kappa), u(\kappa)), \quad u(\kappa) \in U_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N-1},$$

где N — заданное натуральное число, функция f конечна на $Z_{N-1} \times R^n \times R^{m-1}$, множества $U_\kappa \subset R^m$ непусты, $\dim x(\kappa) = n$, $\dim u(\kappa) = m \quad \forall \kappa$.

¹Здесь и далее используется обозначение $Z_\kappa := \{0, 1, \dots, \kappa\}$.

Траекторией и управлением системы (S_d) будем называть любые конечные последовательности $\chi = \{x(\kappa)\}_{\kappa=0}^N$ и $v = \{u(\kappa)\}_{\kappa=0}^{N-1}$, удовлетворяющие системе (S_d) . Траектории и управления интерпретируются как составные векторы размерности N и $N - 1$ соответственно. Любую пару $\sigma = (\chi, v)$, состоящую из траектории χ и соответствующего ей управления v , назовем *процессом* системы (S_d) . Множество всех процессов обозначим через Σ .

В плане предварительного анализа отметим, что система (S_d) сводится к гибридной системе (S_h) специальной структуры

$$\dot{y}^\kappa = 0, \quad \dot{z}^\kappa = 0, \quad t \in [\kappa - 1, \kappa] =: \Delta^\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N}, \quad (3.1)$$

$$y^{\kappa+1}(\kappa + 1) = f(\kappa, y^\kappa(\kappa), z^\kappa(\kappa)), \quad z^\kappa(\kappa) \in U_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N-1} \quad (3.2)$$

при помощи известного преобразования, аналогичного [9, с. 160]:

$$y^\kappa(t) \equiv x(\kappa), \quad z^\kappa(t) \equiv u(\kappa), \quad t \in \Delta^\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N}.$$

Соответствие между процессами системы (S_d) и мультитраекториями

$$\eta = \left\{ (y^0(t), z^0(t) \mid t \in \Delta^0), \dots, (y^N(t), z^N(t) \mid t \in \Delta^N) \right\}$$

системы (S_h) взаимно однозначно. При этом множество соединимых точек системы (S_d)

$$\mathcal{T} = \left\{ (x_0, \dots, x_N) \mid \exists \sigma = (\chi, v) \in \Sigma : x(\kappa) = x_\kappa, \kappa = \overline{0, N} \right\}$$

(оно, очевидно, представляет собой множество всех траекторий χ системы (S_d)) совпадает с множеством конечных точек y -компонент траекторий η , т.е.

$$\mathcal{T} = Y = \left\{ (y^0(0), \dots, y^N(N)) \mid \eta - \text{мультитраектория системы } (S_h) \right\}.$$

Заметим, что динамическая цепочка (3.2) в системе (S_h) выступает в качестве конечного ограничения типа $q \in Q$ главы 2.

Посмотрим, что дают развитые методы монотонных L -функций для анализа соединимых точек системы (S_h) (а, следовательно, и (S_d)).

Для каждого $\kappa \in Z_N$ рассмотрим произвольную функцию $\varphi^\kappa(y) : R^n \rightarrow R$. Очевидно, что она постоянна вдоль всех траекторий κ -ой подсистемы из (3.1) (т.е. является её первым интегралом):

$$\varphi^\kappa(y^\kappa(\kappa)) - \varphi^\kappa(y^\kappa(\kappa - 1)) = 0,$$

откуда с учетом $y^\kappa(t) = \text{const}$ на $\Delta^\kappa = [\kappa - 1, \kappa]$, получаем равенства

$$\begin{aligned} & \varphi^{\kappa+1}(y^{\kappa+1}(\kappa + 1)) - \varphi^\kappa(y^\kappa(\kappa)) - \\ & - \left(\varphi^{\kappa+1}(y^{\kappa+1}(\kappa + 1)) - \varphi^\kappa(y^\kappa(\kappa)) \right) = 0 \quad \forall \kappa \in Z_{N-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть теперь $\varphi^\kappa(y)$ такая, что выполнены неравенства

$$\inf_{u \in U_\kappa} \varphi^{\kappa+1}(f(\kappa, y, u)) - \varphi^\kappa(y) \geq 0 \quad \forall y \in R^n, \quad \forall \kappa \in Z_{N-1}. \quad (3.4)$$

Тогда из равенства (3.3) и условия (3.4) следует, что для всех мультитраекторий η выполняются неравенства

$$\varphi^{\kappa+1}(y^{\kappa+1}(\kappa + 1)) - \varphi^\kappa(y^\kappa(\kappa)) \geq 0, \quad \kappa \in Z_{N-1},$$

и, в частности,

$$\varphi^N(y^N(N)) - \varphi^0(y^0(0)) \geq 0.$$

Из связи систем (S_d) и (S_h) легко видеть, что функция $\varphi(\kappa, x) = \varphi^\kappa(x)$ не убывает вдоль всех траекторий χ дискретной системы (т.е., по нашей терминологии, является сильно возрастающей L -функцией), а множество всех дискретных траекторий имеет следующую оценку сверху, порожденную функцией φ (при условии (3.4)):

$$\mathcal{T} \subset \left\{ (x_0, \dots, x_N) \mid \varphi(\kappa + 1, x_{\kappa+1}) - \varphi(\kappa, x_\kappa) \geq 0, \quad \kappa = \overline{0, N-1} \right\}.$$

Как и следовало ожидать, вывод окончательных оценок множества $\mathcal{T}$ приводит к необходимости конкретизации свойств монотонности для дискретных систем. Перейдем к ним.

Через $\chi|_s^M$, $v|_s^{M-1}$ и $\sigma_s^M = (\chi|_s^M, v|_s^{M-1})$ ($0 \leq s < M \leq N$) обозначим подпоследовательности χ , v и σ , называемые отрезками траектории, управления и процесса системы (S_d) . Введем множество $\mathcal{T}_s^M(\xi)$, состоящее из всех отрезков траекторий $\chi|_s^M$ системы (S_d) , удовлетворяющих начальному условию $x(s) = \xi$.

Определение 3.1.1. Функцию $\varphi(\kappa, x) : Z_N \times R^n \rightarrow R$ назовем

а) *сильно возрастающей* относительно системы (S_d) , если

$$\left(\forall (s, \xi) \in Z_{N-1} \times R^n \right) \left(\forall \chi|_s^N \in \mathcal{T}_s^N(\xi) \right) \\ \varphi(\kappa + 1, x(\kappa + 1)) \geq \varphi(\kappa, x(\kappa)), \quad \kappa = \overline{s, N-1};$$

б) *слабо убывающей* относительно системы (S_d) , если

$$\left(\forall (s, \xi) \in Z_{N-1} \times R^n \right) \left(\exists \chi|_s^N \in \mathcal{T}_s^N(\xi) \right) : \\ \varphi(\kappa + 1, x(\kappa + 1)) \leq \varphi(\kappa, x(\kappa)), \quad \kappa = \overline{s, N-1}.$$

Множества всех функций φ , удовлетворяющих условиям а) и б), обозначим через $L_{s\uparrow}^d$ и $L_{w\downarrow}^d$ соответственно.

Дадим критерии проверки сильной и слабой монотонности функций φ ².

Лемма 3.1.1. $\varphi \in L_{s\uparrow}^d$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\inf_{u \in U_\kappa} \varphi(\kappa + 1, f(\kappa, x, u)) - \varphi(\kappa, x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n, \quad \forall \kappa \in Z_{N-1}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Достаточность очевидна, необходимость докажем от противного. Пусть для некоторых $(s, \xi) \in Z_{N-1} \times R^n$

$$\inf_{u \in U_s} \varphi(s + 1, f(s, \xi, u)) - \varphi(s, \xi) < 0.$$

Тогда существует $u_* \in U_s$: $\varphi(s + 1, f(s, \xi, u_*)) - \varphi(s, \xi) < 0$ и из точки ξ можно выпустить отрезок траектории $\chi|_s^N \in \mathcal{T}_s^N(\xi)$ такой, что $x(s + 1) = f(s, \xi, u_*)$ и $\varphi(s + 1, x(s + 1)) < \varphi(s, x(s))$, существование которого противоречит включению $\varphi \in L_{s\uparrow}^d$. $\square$

Лемма 3.1.2. Для включения $\varphi \in L_{w\downarrow}^d$ необходимо выполнения неравенства

$$\inf_{u \in U_\kappa} \varphi(\kappa + 1, f(\kappa, x, u)) - \varphi(\kappa, x) \leq 0 \quad \forall x \in R^n, \quad \forall \kappa \in Z_{N-1}. \quad (3.6)$$

²Вероятно, эти критерии известны, но не в контексте акцента на свойствах сильной и слабо монотонности. Они приводятся для замкнутости изложения.

Если суперпозиция $\varphi(\kappa + 1, f(\kappa, x, u))$ непрерывна по $u \in U_\kappa$ при $x \in R^n$, $\kappa \in Z_{N-1}$, и все множества U_κ компактны, то неравенство (3.6) также достаточно для включения $\varphi \in L_{w\downarrow}^d$.

Доказательство. Необходимость, очевидно, вытекает из определения 3.1.1, докажем достаточность. Выберем произвольные $(s, \xi) \in Z_{N-1} \times R^n$. Из сделанных предположений следует, что при каждом $\kappa \in \{s, \dots, N-1\}$ и $x \in R^n$ инфимум в (3.6) достигается на некотором $u = u_*(\kappa, x) \in U_\kappa$. Выпустим из (s, ξ) отрезок траектории $\chi|_s^N$ с управлением $v|_s^{N-1}$, в котором каждый вектор $u(\kappa) = u_*(\kappa, x(\kappa))$. Тогда, очевидно, что функция φ не возрастает вдоль $\chi|_s^N$, и в силу произвольности выбора (s, ξ) , слабо убывает, т.е. выполняется включение $\varphi \in L_{w\downarrow}^d$. $\square$

Неравенства (3.5) и (3.6) — это дискретные аналоги неравенств Гамильтона-Якоби для непрерывных управляемых динамических систем, решения которых обладают аналогичными свойствами сильной и слабой монотонности. Решения уравнения Гамильтона-Якоби (уравнения Беллмана), соответствующего равенствам в (3.5), (3.6), сильно возрастают и слабо убывают одновременно и в определенном смысле являются «идеальными», однако их нахождение сложнее поиска решений неравенств.

Заметим, что приведенные критерии монотонности компактно записываются через *полную разность* функции $\varphi(\kappa, x)$ в силу системы (S_d)

$$\Delta\varphi_\kappa := \varphi(\kappa + 1, f(\kappa, x, u)) - \varphi(\kappa, x)$$

в форме неравенств для функций $\min_{u \in U_\kappa} \Delta\varphi_\kappa$.

3.2 Внешние оценки множества соединимых точек и достаточные условия оптимальности

Рассмотрим следующую задачу дискретного оптимального управления (P_d) с общим конечным ограничением на траекторию и целевой функцией,

зависящей от концов траектории:

$$\begin{aligned} x(\kappa + 1) &= f(\kappa, x(\kappa), u(\kappa)), \quad u(\kappa) \in U_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \\ q &:= (x(0), x(N)) \in Q, \\ J[\sigma] &= l(q) \rightarrow \min. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Сохраним предположения предыдущего параграфа на входные данные задачи, и кроме того будем считать множество $Q \subset R^{2n}$ замкнутым, а функцию $l : R^{2n} \rightarrow R$ — непрерывной.

Процесс $\sigma = \sigma_0^N$ назовем допустимым в задаче (P_d) , если для него выполняется включение (3.7). Для простоты задачу (P_d) будем рассматривать на минимум (а не на инфимум) и через $\bar{\sigma} = (\bar{\chi}, \bar{v})$ обозначать исследуемый на глобальную оптимальность допустимый процесс с конечным вектором $\bar{q} = (\bar{x}(0), \bar{x}(N))$.

Введем множество

$$\mathcal{R} = \{(x_0, x_N) \in R^{2n} \mid \exists \chi \in \mathcal{T}_0^N(x_0) : x(N) = x_N\},$$

которое назовем *множеством соединимых точек* системы (S_d) .

Очевидно, что теоретически задача (P_d) эквивалентна задаче

$$l(x_0, x_N) \rightarrow \min; \quad (x_0, x_N) \in \mathcal{R} \cap Q. \tag{3.8}$$

Они имеют совпадающие значения и минимизирующие концы траекторий, но множество $\mathcal{R}$ определяется сложным, неявным образом. Поэтому далее используются его оценки.

Для $\varphi \in L_{s\uparrow}^d$ и множества $\Phi \subset L_{s\uparrow}^d$ определим следующие множества:

$$E(\varphi) = \{(x_0, x_N) \mid \varphi(N, x_N) - \varphi(0, x_0) \geq 0\}, \quad E(\Phi) = \bigcap_{\varphi \in \Phi} E(\varphi).$$

Лемма 3.2.1. Пусть $\Phi \subset L_{s\uparrow}^d$. Тогда $\mathcal{R} \subset E(\Phi)$.

Из леммы 3.2.1 и взаимосвязи задач (P_d) и (3.8) следуют канонические достаточные условия глобальной оптимальности в задаче (P_d) с множеством сильно монотонных L -функций. Для их формулировки введем следующую конечную задачу $(EP(\Phi))$:

$$l(x_0, x_N) \rightarrow \inf; \quad (x_0, x_N) \in E(\Phi) \cap Q.$$

Теорема 3.2.1. Пусть для процесса $\bar{\sigma}$ найдется такое множество $\Phi \subset L_{s\uparrow}^d$, что $J[\bar{\sigma}] = \min(EP(\Phi))$, т.е. $\bar{q}$ — точка глобального минимума в задаче $(EP(\Phi))$. Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P_d) .

Множество Φ , удовлетворяющее вместе с $\bar{\sigma}$ теореме 3.2.1, назовем *разрешающим* для задачи (P_d) (и любого оптимального процесса этой задачи).

Условия леммы и теоремы можно ослабить, если на каждом шаге известна априорная внешняя оценка X_κ множества достижимости системы (S_d) с частичным учетом множества Q , т.е. внешняя оценка множества

$$\mathcal{R}_\kappa[Q] = \left\{ x_\kappa \in R^n \mid \exists \chi \mid_0^\kappa \in \mathcal{T}_0^\kappa(x_0) : x_0 \in Q_0, x(\kappa) = x_\kappa \right\},$$

где $Q_0 = \text{pr}_{x_0} Q$. В этом случае множество $\mathcal{X} = X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_N$ сильно инвариантно относительно системы (S_d) , и выполнение свойств сильной и слабой монотонности L -функций достаточно требовать лишь вдоль траекторий, проходящих по $\mathcal{X}$, а в конечную задачу $(EP(\Phi))$ добавить ограничения $x_\kappa \in X_\kappa \ \forall \kappa \in Z_N$. Такие L -функции назовем монотонными (сильно или слабо) на множестве $\mathcal{X}$; для них выполнение неравенств (3.5) и (3.6) требуется лишь при $x \in X_\kappa, \kappa = \overline{0, N-1}$.

3.3 Анализ достаточных условий оптимальности и примеры

Разрешающие множества L -функций в задачах оптимизации дискретных систем обладают большинством свойств аналогичных множеств в классических непрерывных задачах оптимального управления (см. параграф 1.4 и работы [37, 48]). Укажем некоторые из них.

1) Как и в первых работах по каноническим условиям оптимальности в непрерывных системах [33], естественно считать, что искомое разрешающее множество L -функций образует семейство $\Phi = \{\varphi^\alpha(\kappa, x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, зависящее от некоторого параметра, возможно, бесконечномерного. В частности, для рассматриваемой задачи (P_d) с не аддитивной зависимостью конечного ограничения и целевого функционала от $x(0), x(N)$ полезны *бипозицион-*

ные L -функции, в которых роль α играют $x_0 = x(0)$ или $x_N = x(N)$ (см. параграф 1.3.3).

2) Легко убедиться, что нижняя огибающая любого множества функций из $L_{s\uparrow}^d$ также сильно возрастает. Однако использование этого свойства для замены в теореме 3.2.1 множества Φ на единственную сильно возрастающую функцию $\varphi_*(\kappa, x) = \inf_{\Phi} \varphi(\kappa, x)$ может приводить к потере качества аппроксимации множества $\mathcal{R}$ и, как следствие, свойства разрешаемости (помимо ухудшения свойств гладкости).

Пример 3.1. Рассмотрим элементарную систему $x(1) = x(0) + u(0)$, $u(0) \in [-1, 1]$. Очевидно, что $\mathcal{R} = \{(x_0, x_1) \mid |x_1 - x_0| \leq 1\}$, и его точное описание дается двумя сильно возрастающими L -функциями $\varphi^{1,2} = \kappa \pm x$, $\kappa = 0, 1$. Однако внешняя оценка множества $\mathcal{R}$, определяемая функцией $\varphi_* = \min\{\varphi^1, \varphi^2\} = k - |x|$, оказывается существенно грубее. $\square$

Отметим, что в классе бипозиционных L -функций переход к нижней огибающей не влияет на свойство разрешимости.

3) Задачу (P_d) назовем *локально вырожденной в точке $\bar{\sigma}$* , если вектор $\bar{q}$ является локальным решением следующей задачи: $l(q) \rightarrow \min; q \in Q$ (без всякого учета динамики).

В наиболее важном случае, когда задача (P_d) локально не вырождена в точке $\bar{\sigma}$, а разрешающему множеству Φ соответствует множество функций $\{\varphi(N, x_N) - \varphi(0, x_0) \mid \varphi \in \Phi\}$, равномерно полунепрерывное снизу в точке $\bar{q}$, для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Phi_\varepsilon(\bar{\sigma}) := \{\varphi \in \Phi \mid \varphi(N, \bar{x}(N)) - \varphi(0, \bar{x}(0)) \leq \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

Иначе говоря, множество ε -активных ограничений типа неравенства с функциями $\varphi \in \Phi$ в концевой задаче $(EP(\Phi))$ не пусто. В частности, в типичной для приложений ситуации множество $\Phi_0(\bar{\sigma}) \neq \emptyset$, т.е. $\varphi = \text{const}$ вдоль $\bar{\chi}$ при $\varphi \in \Phi_0(\bar{\sigma})$.

4) В предположениях из 3) для любой $\varphi \in \Phi_\varepsilon(\bar{\sigma})$ процесс $\bar{\sigma}$ ε -оптимален в задаче минимизации критерия

$$\omega(\varphi; \sigma) := \varphi(N, x(N)) - \varphi(0, x(0))$$

в дискретной системе (S_d) (без каких-либо ограничений на траекторию).

Свойства 3), 4) содержат важную информацию о возможных кандидатах в элементы разрешающего множества L -функций. В частности, она тесно связана с понятием биэкстремали системы (S_d) (см. ниже параграф 3.4).

5) Установим любопытную связь достаточных условий оптимальности теоремы 3.2.1 с условиями В.Ф. Кротова [60, 136].

Для этого предположим, что искомое разрешающее множество конечно: $\Phi = \{\varphi^1, \dots, \varphi^\nu\}$. Тогда неполный нормальный лагранжиан задачи $(EP(\Phi))$, включающий лишь ограничения, связанные с $\varphi \in \Phi$, имеет вид

$$\mathcal{L}^\Phi(x_0, x_N, \lambda) = l(x_0, x_N) - \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i (\varphi^i(N, x_N) - \varphi^i(0, x_0)),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$. Определим следующее условие

SC(Φ). *Найдется такой множитель $\lambda \in R_+^\nu$, что функция Лагранжа $\mathcal{L}^\Phi(x_0, x_N, \lambda)$ достигает глобального минимума при ограничении $(x_0, x_N) \in Q$ в точке $(\bar{x}_0, \bar{x}_N) = \bar{q}$, причем*

$$\min_{(x_0, x_N) \in Q} \mathcal{L}^\Phi(x_0, x_N, \lambda) = l(\bar{q}).$$

Ясно, что $SC(\Phi)$ — это простейшее достаточное условие оптимальности точки $(\bar{x}_0, \bar{x}_N) = \bar{q}$ в задаче $(EP(\Phi))$, гарантирующее выполнение условий теоремы 3.2.1 с множеством Φ .

Теорема 3.3.1. *а) Если выполнено условие $SC(\Phi)$, то*

$$\bar{\varphi}(\kappa, x) = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \varphi^i(\kappa, x)$$

является функцией Кротова задачи (P_d) .

б) Если $\bar{\varphi} \in L_{s\uparrow}^d$ — функция Кротова задачи (P_d) , то выполнено условие $SC(\{\bar{\varphi}\})$ с одноэлементным множеством $\bar{\Phi} = \{\bar{\varphi}\}$ и скалярным множителем $\lambda = \bar{\lambda} = 1$.

Доказательство. а) Очевидно, что $\bar{\varphi} \in L_{s\uparrow}^d$ и условие $SC(\Phi)$ преобразуется в условие $SC(\{\bar{\varphi}\})$ с одноэлементным множеством $\bar{\Phi} = \{\bar{\varphi}\}$ и числовым

множителем $\lambda = \bar{\lambda} = 1$. Преобразованное условие гарантирует оптимальность вектора $(\bar{x}_0, \bar{x}_N) = \bar{q}$ в соответствующей задаче $(EP(\bar{\Phi}))$ и является переформулировкой достаточных условий Кротова с использованием приема нормировки [22, 136]. Это пояснение доказывает и утверждение б). $\square$

Из теоремы 3.3.1 следует, что достаточные условия Кротова представляют собой метод решения концевой задачи $(EP(\Phi))$ из канонических условий оптимальности теоремы 3.2.1 с помощью принципа Лагранжа снятия части ограничений. Выполнение условий Кротова влечет существование разрешающей функции, совпадающей с кротовской, однако, можно привести примеры, в которых условия Кротова не выполняются с функциями из разрешающего множества канонических достаточных условий. Поэтому теорема 3.2.1 обобщает теорему Кротова. Аналогично обстоит дело, если использовать модифицированную версию условий Кротова с множеством сильно монотонных L -функций по схеме главы 1.

Пример 3.2. $J = x(0)x(1) \rightarrow \min$; $x(1) = x(0) + 0 \cdot u(0)$, $|u(0)| \leq 1$. Легко проверить, что в этом примере оптимальны все процессы $\bar{\sigma}$ с $\bar{x}(0) = \bar{x}(1) = 0$, однако, условия Кротова не могут быть выполнены ни с одной, по крайней мере, дважды дифференцируемой функцией. В то же время, канонические условия оптимальности выполняются с парой линейных L -функций $\varphi^{1,2} = \pm x$, или с одной из двух бипозиционных — $\varphi^3 = -|x - x_0|$ или $\varphi^4 = -(x - x_0)^2$.

б) Метод динамического программирования Беллмана непосредственно не применим к задаче (P_d) с общей целевой функцией, нелинейно зависящей от концов траекторий, и смешанным концевым ограничением. Однако если целевая функция аддитивна, т.е. имеет вид

$$J[\sigma] = \sum_{\kappa=0}^{N-1} f_0(\kappa, x(\kappa), u(\kappa)), \quad (3.9)$$

а фазовые ограничения разделены (такую задачу обозначим через (P'_d)), то после преобразования целевой функции (3.9) к терминальной легко убедиться, что функция Беллмана $B(\kappa, x)$ для задачи (P'_d) является разрешающей в смысле K -достаточных условий. С другой стороны, можно показать, что если множество Φ — разрешающее для $\bar{\sigma}$ в смысле K -условий, а

задача (P'_d) локально не вырождена в точке $\bar{\sigma}$, то нормированная нижняя огибающая семейства Φ —

$$\bar{\varphi}(\kappa, x) = \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(\kappa, x) - \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(N, \bar{x}(N)) + l(\bar{x}(N))$$

— совпадает с функцией Беллмана $B(\kappa, x)$ вдоль оптимальной траектории $\bar{\chi}$.

Отметим, что связь условий Кротова с методом Беллмана установлена, например, в [22].

7) Важным является обращение достаточных условий оптимальности теоремы 3.2.1 в необходимые. В случае аддитивной целевой функции вида (3.9) и отдельных фазовых ограничений обращение теоремы 3.2.1 вытекает из необходимости существования функции Кротова в дискретных задачах оптимального управления (фактически через метод динамического программирования [9, 136]).

8) Для нахождения L -функций могут применяться все известные методы построения функций Кротова и Беллмана [24, 55, 136], в частности, поиск в классе линейно-квадратичных по x функций.

Пример 3.3. В [143, Т. 2, с. 249] рассмотрена следующая линейно-квадратичная задача, в которой дискретный принцип максимума не справедлив:

$$\begin{aligned} x(\kappa + 1) &= g(\kappa, u(\kappa)), \quad x(0) = 0, \\ y(\kappa + 1) &= ax^2(\kappa) + by(\kappa) - \frac{a}{b}g^2(\kappa, u(\kappa)), \quad y(0) = 0, \\ u(\kappa) &\in U, \quad \kappa = 0, 1, 2, \quad J[\sigma] = y(3) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Здесь $g(\kappa, \cdot)$ — непрерывная при всех κ функция, множество U компактно, скалярные параметры a, b строго положительны.

Поскольку $J[\sigma] = -\frac{a}{b}g^2(2, u(2))$, то оптимальными являются все процессы $\bar{\sigma}$ с $\bar{u}(2) \in \arg \max_{u \in U} g^2(2, u)$.

Будем искать разрешающую функцию квадратичной: $\varphi = S(\kappa)x^2 + p(\kappa)y$. Неравенство (3.5) принимает вид

$$\min_{u \in U} \left\{ S(\kappa + 1)g^2(\kappa + 1, u) + p(\kappa + 1) \left(ax^2 + by - \frac{a}{b}g^2(\kappa + 1, u) \right) - S(\kappa)x^2 - p(\kappa)y \right\} \geq 0.$$

Требуя выполнения этого условия в форме равенства, положим

$$S(\kappa + 1) = \frac{a}{b}p(\kappa + 1), \quad S(\kappa) = ap(\kappa + 1), \quad p(\kappa) = bp(\kappa + 1),$$

откуда получим цепочки $S(\kappa) = bS(\kappa + 1)$, $p(\kappa) = bp(\kappa + 1)$ и условие $S(\kappa) = \frac{a}{b}p(\kappa)$. Кроме того, выбрав $p(3) = b$ и $S(3) = a$, придем к функции

$$\varphi(\kappa, x, y) = ab^{3-\kappa}x^2 + b^{4-\kappa}y,$$

которая сильно возрастает и дает следующую оценку: $y_3 \geq -\frac{a}{b}x_3^2$. Отсюда, с учетом априорной оценки $x_3 \in g(2, U)$, устанавливается оптимальность процессов $\bar{\sigma}$.

Отметим, что при $b > 1$ функция φ не удовлетворяет условиям Кротова даже с явным учетом свойства монотонности ($\Delta\varphi \geq 0$) и указанной априорной оценки.

Пример 3.4 ([12]). Рассмотрим следующую линейно-квадратичную задачу:

$$\begin{aligned} x(\kappa + 1) &= u(\kappa), \quad x(0) = 0, \\ y(\kappa + 1) &= y(\kappa) + 2x^2(\kappa) - u^2(\kappa), \quad y(0) = 0, \\ |u(\kappa)| &\leq 1, \quad \kappa = 0, 1, \quad J[\sigma] = y(2) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Поскольку $J[\sigma] = u^2(0) - u^2(1)$, то глобально оптимальны два процесса $\sigma^{1,2}$ с $u^{1,2}(0) = 0$, $u^{1,2}(1) = \pm 1$, однако, ни один из них не удовлетворяет дискретному принципу максимума из-за невыпуклости вектограммы.

Будем искать квадратичную разрешающую функцию вида

$$\varphi(\kappa, x, y) = S(\kappa)x^2 + p(\kappa)y.$$

Для нее неравенство Гамильтона-Якоби (3.5) принимает следующий вид:

$$\min_{|u| \leq 1} \{S(\kappa + 1) - p(\kappa + 1)\}u^2 + \{p(\kappa + 1) - p(\kappa)\}y + \{2p(\kappa + 1) - S(\kappa)\}x^2 \geq 0.$$

Положив $S(\kappa + 1) = S(\kappa)$, $S(\kappa) = p(\kappa)$, $p(\kappa + 1) = p(\kappa) = 1$, получим функцию

$$\varphi(\kappa, x, y) = x^2 + y \in L_{s\uparrow}^d,$$

которая, отметим, удовлетворяет именно *неравенству* Гамильтона-Якоби, а не соответствующему уравнению.

Анализ концевой задачи

$$y \rightarrow \min; \quad y \geq -x^2$$

с учетом оценки $x \in [-1, 1]$ приводит к заключению об оптимальности обоих процессов $\bar{\sigma}$. $\square$

Выбор L -функций в классе линейных по x приводит к достаточным условиям оптимальности в форме дискретного принципа максимума, к формулировке которых мы и переходим.

3.4 Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума

Рассмотрим задачу (P_d) , дополнительно предполагая, что функция f непрерывно дифференцируема по x . Нашей целью будет вывод достаточных условий оптимальности, аналогичных полученным в параграфе 2.3 для задач оптимизации гибридных систем.

Пусть $H(\kappa, x, p, u) = p \cdot f(\kappa, x, u)$ — функция Понтрягина, $\bar{\sigma} = (\bar{\chi}, \bar{v})$ — некоторый процесс системы (S_d) . Определим для него следующие *условия экстремальности*: существует последовательность $\psi = \{p(\kappa)\}_{\kappa=0}^N$, такая, что при всех $\kappa = \overline{0, N-1}$

$$p(\kappa) = H_x(\kappa, \bar{x}(\kappa), p(\kappa+1), \bar{u}(\kappa)), \quad (3.10)$$

$$H(\kappa, \bar{x}(\kappa), p(\kappa+1), \bar{u}(\kappa)) = \max_{u \in U_\kappa} H(\kappa, \bar{x}(\kappa), p(\kappa+1), u). \quad (3.11)$$

Процесс $\bar{\sigma}$, удовлетворяющий этим условиям, назовем *экстремалью* системы (S_d) , любую тройку $\gamma = (\bar{\chi}, \bar{v}, \psi)$, удовлетворяющую соотношениям (3.10), (3.11), — *биэкстремалью* системы (S_d) , а соответствующую последовательность ψ — *коэкстремалью*. Множество всех коэкстремалей для $\bar{\sigma}$ обозначим через $\Psi(\bar{\sigma})$.

Отметим, что как правило нас интересуют *нетривиальные экстремали* с $\psi \not\equiv 0$; экстремали Понтрягина задачи (P_d) с $\psi \equiv 0$ возникают в специальных случаях не общего положения.

Легко видеть, что условия экстремальности процесса $\bar{\sigma}$ совпадают с частью условий дискретного принципа максимума, который, как известно [9, 12, 18, 27, 55, 72, 143], справедлив лишь в предположениях типа выпуклости вектограммы $f(\kappa, x, U_\kappa)$. Ясно, что если $\bar{\sigma}$ удовлетворяет дискретному принципу максимума с котраекторией $\bar{\psi}$, то $\bar{\psi} \in \Psi(\bar{\sigma})$.

Обозначим через $\Psi_+(\bar{\sigma})$ множество всех коэкстремалей для $\bar{\sigma}$, удовлетворяющих следующему *расширенному условию максимума*:

$$\begin{aligned} H(\kappa, \bar{x}(\kappa), p(\kappa+1), \bar{u}(\kappa)) - p(\kappa) \cdot \bar{x}(\kappa) = \\ = \max_{u \in U_\kappa, x \in R^n} \{H(\kappa, x, p(\kappa+1), u) - p(\kappa) \cdot x\}, \quad \kappa = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

Пусть $\Psi_+(\bar{\sigma}) \neq \emptyset$. С помощью любой коэкстремали $\psi \in \Psi_+(\bar{\sigma})$ построим функцию $\varphi^\psi(\kappa, x) = p(\kappa) \cdot (\bar{x}(\kappa) - x)$. Нетрудно проверить, что она сильно возрастает, т.е. $\varphi^\psi \in L_{s\uparrow}^d$.

Возьмем произвольное множество коэкстремалей $\Psi \subset \Psi_+(\bar{\sigma})$ и, предполагая, что таковые существуют, рассмотрим задачу $(EP(\Psi))$:

$$\begin{aligned} l(x_0, x_N) \rightarrow \inf; \quad (x_0, x_N) \in Q, \\ p(N) \cdot (\bar{x}(N) - x_N) - p(0) \cdot (\bar{x}(0) - x_0) \geq 0 \quad \forall \psi \in \Psi. \end{aligned}$$

Теорема 3.4.1. Пусть для допустимого процесса $\bar{\sigma}$ найдется такое множество коэкстремалей $\Psi \subset \Psi_+(\bar{\sigma})$, что $J[\bar{\sigma}] = \min(EP(\Psi))$. Тогда $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс в задаче (P_d) .

Это достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума вполне аналогично непрерывным задачам (см. [3] и параграф 2.3) и обладает теми же качественными характеристиками. Отметим, что замена расширенного условия максимума на вогнутость функции $(x, u) \rightarrow H(\kappa, x, p(\kappa+1), u)$ (или вогнутости по x гамильтониана) дает более грубые достаточные условия.

Заметим, что в задачах управления дискретными системами естественно рассматривать и слабые экстремали, определяемые через локальный принцип максимума (т.е. через более универсальное необходимое условие оптимальности, нежели глобальный принцип максимума). Для них по аналогичной, но локализованной схеме можно получить достаточные условия локальной оптимальности в форме локального принципа максимума.

Пример 3.5 (точное описание множества соединимых точек линейной системы). Рассмотрим систему

$$x(\kappa + 1) = A(\kappa)x(\kappa) + b(\kappa, u(\kappa)), \quad u(\kappa) \in U_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \quad (3.12)$$

где матричная функция $A(\kappa)$ произвольна, вектор-функция $b(\kappa, u)$ непрерывна по u при всех $\kappa \in Z_{N-1}$, множества U_κ компактны и $b(\kappa, U_\kappa)$ выпуклы $\forall \kappa \in Z_{N-1}$.

Покажем, что множество соединимых точек

$$\mathcal{R} = \{(x_0, x_N) \in R^{2n} \mid \exists \chi \in \mathcal{T}_0^N(x_0) : x(N) = x_N\}$$

системы (3.12) точно описывается с помощью множества линейных по x сильно возрастающих L -функций, построенных по коэкстремалиям системы (прототип этого результата для непрерывной линейной системы получен в [141, теорема 15.2]). Таким образом, в любой задаче оптимального управления системой (3.12) с целевой функцией вида $J[\sigma] = l(x(0), x(N))$ и смешанными конечными ограничениями $(x(0), x(N)) \in Q$ K -достаточные условия оптимальности оказываются и необходимыми.

Обозначим через $\psi^\eta = \{p^\eta(\kappa)\}_{\kappa=0}^N$ последовательность, удовлетворяющую сопряженной системе с граничным условием:

$$p(\kappa) = A'(\kappa)p(\kappa + 1), \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \quad p(N) = \eta, \quad (3.13)$$

где $\eta \in R^n$ — параметр.

Для любого η положим $\mu^\eta(\kappa) = \max_{u \in U_\kappa} (p^\eta(\kappa + 1))' b(\kappa, u)$ и рассмотрим функцию

$$\varphi^\eta(\kappa, x) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\kappa-1} \mu^\eta(s) - (p^\eta(\kappa))' x, & \kappa = \overline{1, N}, \\ -(p^\eta(0))' x, & \kappa = 0. \end{cases}$$

Для нее полная разность в силу системы (3.12)

$$\Delta_\kappa \varphi = \mu^\eta(\kappa) - (p^\eta(\kappa + 1))' b(\kappa, u) \geq 0 \quad \forall u \in U_\kappa, \quad \forall \kappa \in Z_{N-1},$$

следовательно, $\varphi^\eta \in L_{s\uparrow}^d \quad \forall \eta \in R^n$.

Пусть $\Phi = \{\varphi^\eta(k, x) \mid \eta \in R^n\}$ и

$$E(\Phi) = \{(x_0, x_N) \mid \varphi(N, x_N) - \varphi(0, x_0) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \Phi\}.$$

Тогда, очевидно, имеем оценку сверху для множества соединимых точек системы (3.12):

$$E(\Phi) \supset \mathcal{R}.$$

Модифицируя доказательство теоремы 15.2 из [141], докажем, что в действительности эта оценка точная. Возьмем произвольную точку $(x_0^*, x_N^*) \in E(\Phi)$, т.е.

$$\eta' x_N^* \leq \sum_{\kappa=0}^{N-1} \mu^\eta(\kappa) + (p^\eta(0))' x_0^* \quad \forall \eta. \quad (3.14)$$

Обозначим через $\mathcal{R}(x_0^*) = \{x_N \mid \exists \chi \in \mathcal{T}_0^N(x_0^*) : x(N) = x_N\}$ множество достижимости системы (3.12) из точки x_0^* . Известно [72], что оно выпукло и компактно.

Зафиксируем произвольный вектор $\eta \in R^n$. Пусть $l(\eta) = \max\{\eta' x \mid x \in \mathcal{R}(x_0^*)\}$ и максимум доставляет точка ξ , т.е. $\eta' \xi = l(\eta)$. Из определения множества достижимости вытекает, что существует процесс $\sigma^\eta = (\chi^\eta, v^\eta)$ с $x^\eta(0) = x_0^\eta$, $x^\eta(N) = \xi$, доставляющий глобальный максимум в задаче оптимального управления системой (3.12) с целевой функцией $J^\eta[\sigma] = \eta' x(N)$ и начальным условием $x(0) = x_0^*$. В силу линейности системы (3.12) в этой задаче справедлив дискретный принцип максимума [72], откуда вытекает, что последовательность $\psi^\eta = \{p^\eta(\kappa)\}$ удовлетворяет вместе с v^η условию максимума

$$(p^\eta(\kappa + 1))' b(\kappa, u^\eta(\kappa)) = \max_{u \in U_\kappa} (p^\eta(\kappa + 1))' b(\kappa, u) = \mu^\eta(\kappa) \quad \forall \kappa \in Z_{N-1}.$$

Отсюда, последовательно подставляя рекуррентные соотношения из (3.12), (3.13), получаем следующую цепочку равенств вдоль биэкстремали (σ^η, ψ^η) (во избежание громоздкости индекс η опускаем):

$$\begin{aligned} J[\sigma] &= l(\eta) = p'(N) \left(A(N-1)x(N-1) + b(N-1, u(N-1)) \right) = \\ &= p'(N-1)x(N-1) + \mu(N-1) = \dots = \sum_{\kappa=0}^{N-1} \mu(\kappa) + p'(0)x_0^*. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Сравнение (3.14) с (3.15) приводит к неравенству

$$\eta' x_N^* \leq l(\eta) \quad \forall x_N^* \in E^{x_0^*}(\Phi) = \{x_N^* \mid (x_0^*, x_N^*) \in E(\Phi)\},$$

откуда, в силу произвольности выбора η , по теореме отделимости получаем, что $E^{x_0^*}(\Phi) \subset \mathcal{R}(x_0^*)$. Следовательно, $E(\Phi) \subset \mathcal{R}$.

3.5 Необходимые условия оптимальности со слабо монотонными и производящими функциями

3.5.1 Применение слабо монотонных L -функций

Рассмотрим задачу (P_{d0}) с фиксированным левым и свободным правым концами траекторий и терминальной целевой функцией:

$$x(\kappa + 1) = f(\kappa, x(\kappa), u(\kappa)), \quad u(\kappa) \in U_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N-1},$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J[\sigma] = l(x(N)) \rightarrow \inf.$$

Пусть $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0^N = (\bar{\chi}, \bar{v})$ — некоторый допустимый в задаче (P_{d0}) процесс.

Обозначим через $L_+ \subset L_{w\downarrow}^d$ подмножество из слабо убывающих L -функций, удовлетворяющих граничному условию

$$\varphi(N, x) \geq l(x) \quad \text{на } R^n. \quad (3.16)$$

Лемма 3.5.1. *Для любого множества $\Phi \subset L_+$ имеет место оценка*

$$\inf(P_{d0}) \leq \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(0, x_0). \quad (3.17)$$

Доказательство. Предположим противное: пусть выполнено неравенство $\inf(P_{d0}) > \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(0, x_0)$. Тогда существует функция $\varphi_* \in \Phi$, такая что $\inf(P_{d0}) > \varphi_*(0, x_0)$. В силу слабого убывания функции φ_* найдется траектория $\chi_* \in \mathcal{T}_0^N(x_0)$, вдоль которой φ не возрастает и, следовательно,

$$\inf(P_{d0}) > \varphi_*(0, x_0) \geq \varphi(N, x_*(N)) \geq J[\sigma_*]$$

в силу неравенства (3.16), где σ_* — процесс с траекторией χ_* . Ясно, что σ_* допустим, и из полученного неравенства получаем противоречие. $\square$

Из доказательства получаем

Следствие 3.5.1. Для любой функции $\varphi \in L_+$ найдется траектория $\chi_* \in \mathcal{T}_0^N(x_0)$ и процесс $\sigma_* = (\chi_*, v_*)$, для которых

$$J[\sigma_*] \leq \varphi(0, x_0).$$

Далее нам будет удобно обозначать указанные в следствии « φ -монотонные» траекторию и процесс через $\chi_*(\varphi)$ и $\sigma_*(\varphi)$.

Теорема 3.5.1. Для глобальной оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ необходимо, чтобы при любом выборе множества функций $\Phi \subset L_+$ выполнялись неравенства

$$J[\bar{\sigma}] \leq \inf_{\varphi \in \Phi} J[\sigma_*(\varphi)], \quad (3.18)$$

$$J[\bar{\sigma}] \leq \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(0, x_0). \quad (3.19)$$

Заметим, что оценка (3.19) грубее (3.18), так как правая часть в (3.18) минорирует правую часть в (3.19) (см. пример 3.6 далее).

Утверждение теоремы с неравенством (3.19) мы называем *позиционным принципом минимума*, поскольку для его проверки естественно использовать φ -экстремальные позиционные управления (см. ниже).

Обсудим конструктивное использование полученных результатов.

Во-первых, из граничного условия (3.16) следует, что при компактных множествах U_κ и выбранной φ процесс $\sigma_*(\varphi)$ следует строить с помощью φ -экстремального позиционного управления

$$w(\varphi; \kappa, x) \in \underset{u \in U_\kappa}{\operatorname{Argmin}} \varphi(\kappa, f(\kappa, x, u)), \quad \kappa = \overline{0, N-1}. \quad (3.20)$$

Но для получения « φ -монотонной» траектории достаточно просто обеспечить неравенство $\Delta\varphi_\kappa \leq 0$.

Во-вторых, при заданном процессе $\bar{\sigma}$ множество Φ можно конструировать с помощью соответствующих коэкстремалей $\bar{\psi} = \psi(\bar{\sigma})$ (из линейных φ) и матричных импульсов типа Габасова или Риккати [9, 136] (из линейно-квадратичных φ). Этот традиционный путь работы с необходимыми условиями одновременно дает способ улучшения не оптимального процесса $\bar{\sigma}$ с помощью φ -экстремальных управлений на базе позиционного принципа минимума.

Наконец, можно и без априорного знания о некотором процессе $\bar{\sigma}$ фиксировать класс функций определенной структуры с параметрами, которые далее выбираются из условия оптимизации используемых оценок функционала. К этому пути можно отнести и переход к *производящим L -функциям* $S(\kappa, x, p)$ по схеме, описанной в параграфе 1.6. Применительно к задачам оптимизации дискретных систем с управляемой структурой (линейных по фазовым переменным) этот подход реализован в следующем пункте. Он тоже естественным образом реконструируется в метод улучшения дискретных процессов.

Пример 3.6 (с нелинейным функционалом и особой экстремалью).

$$\begin{aligned} x(\kappa + 1) &= x(\kappa) + u(\kappa), \quad |u(\kappa)| \leq 1, \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \\ x(0) &= 0, \quad J[\sigma] = x^3(N) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Выберем $\Phi = \{\varphi\}$, где $\varphi(\kappa, x) = \varphi(x) = x^3$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_\kappa &= (x + u)^3 - x^3, \\ \min_{|u| \leq 1} \Delta\varphi_\kappa &= (x - 1)^3 - x^3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \in L_{w\downarrow}^d \end{aligned}$$

и φ -экстремальное управление (3.20) постоянно: $u_*(\kappa) \equiv -1$ и, следовательно, $x_*(\kappa) = -\kappa$, $\kappa = \overline{0, N}$, $J[\sigma_*] = -N^3$. Очевидно, что $\min(P_{d0}) = J[\sigma_*]$, т.е. σ_* — оптимальный процесс. Заметим, что оценка (3.17) (или (3.19)) дает $\min(P_{d0}) \leq \varphi(x_0) = 0$, что много грубее использованной оценки, вытекающей из (3.18). Теорема 3.5.1 устанавливает неоптимальность особой экстремали $\bar{\sigma} = 0$, так как неравенство (3.18) противоречиво: $J[\bar{\sigma}] = 0 \leq -N^3$. Коэкстремаль $\bar{\psi} = \psi(\bar{\sigma}) = 0$ и матричные импульсы здесь бесполезны для построения подходящей φ из-за глубокого вырождения $\bar{\sigma}$ (условий 2-го порядка «не хватает»).

Пример 3.7 (с использованием коэкстремали для улучшения экстремального процесса в билинейной системе).

$$\begin{aligned} x_1(\kappa + 1) &= x_1(\kappa) + (\kappa - 1)u(\kappa), \quad x_1(0) = 0, \\ x_2(\kappa + 1) &= x_2(\kappa) + (u(\kappa) - 1)x_1(\kappa), \quad x_2(0) = 0, \\ |u(\kappa)| &\leq 1, \quad \kappa = 0, 1, \quad J[\sigma] = x_2(2) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Процесс $\bar{\sigma}$ с управлением $\bar{u}(\kappa) \equiv 1$ имеет фазовую траекторию $\bar{\chi} = \{\bar{x}_1(0) = 0, \bar{x}_1(1) = -1, \bar{x}_1(2) = -1; \bar{x}_2(\kappa) \equiv 0\}$ и траекторию $\bar{\psi} = \{\bar{p}_1(\kappa) \equiv 0; \bar{p}_2(\kappa) \equiv -1\}$ сопряженной системы

$$\begin{aligned} p_1(\kappa) &= p_1(\kappa + 1) + (u(\kappa) - 1)p_2(\kappa + 1), & p_1(2) &= 0, \\ p_2(\kappa) &= p_2(\kappa + 1), & p_2(2) &= -1. \end{aligned}$$

Он удовлетворяет принципу максимума, т.е. является экстремальным.

По $\bar{\psi}$ и $\bar{\sigma}$ построим линейную функцию

$$\varphi(\kappa, x) = \bar{p} \cdot (\bar{x}(\kappa) - x) = x_2,$$

для которой

$$\Delta\varphi_\kappa = (u - 1)x_1, \quad \min_{|u| \leq 1} \Delta\varphi_\kappa = -|x_1| - x_1 \leq 0,$$

т.е. φ слабо убывает и удовлетворяет граничному условию (3.16). Для φ -экстремального управления имеем неоднозначное условие $u \in -\text{sign } x_1$, из которого выберем селектор

$$u_*(x_1) = \begin{cases} -1, & x_1 \geq 0, \\ 1, & x_1 < 0. \end{cases}$$

По нему находим траекторию

$$\chi_* = \{x_{1*}(0) = 0, x_{1*}(1) = 1, x_{1*}(2) = 1; x_{2*}(0) = x_{2*}(1) = 0, x_{2*}(2) = -2\}$$

и программное управление

$$v_* = \{u_*(x_{1*}(\kappa)), \kappa = 0, 1\} = \{u_*(0) = u_*(1) = -1\}.$$

Для полученного таким образом процесса $\sigma_* = (\chi_*, v_*)$ имеем

$$J[\sigma_*] = -2 < 0 = J[\bar{\sigma}],$$

т.е. позиционный принцип минимума позволяет установить неоптимальность экстремали $\bar{\sigma}$.

3.5.2 Производящие функции в задаче оптимизации, линейной по состоянию

Рассмотрим следующую задачу $(\mathcal{L}_d)$:

$$x(\kappa + 1) = A(\kappa, u(\kappa))x(\kappa) + b(\kappa, u(\kappa)), \quad x(0) = x_0, \quad (3.21)$$

$$u(\kappa) \in U_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N-1},$$

$$J[\sigma] = l'x(N) \rightarrow \inf,$$

где матрицы $A(\kappa, u)$, $b(\kappa, u)$ непрерывны по u , а множества U_κ компактны. Пусть D — множество допустимых процессов $\sigma = (\chi, v)$ в этой задаче.

Наряду с этой задачей рассмотрим задачу сравнения $(\mathcal{L}'_d)$ с траекториями сопряженной системы:

$$p(\kappa) = A'(\kappa, u(\kappa))p(\kappa + 1), \quad p(N) = l, \quad (3.22)$$

$$u(\kappa) \in U_\kappa, \quad \kappa = \overline{N-1, 0},$$

$$K[\sigma'] = p'(0)x_0 + \sum_{\kappa=0}^{N-1} p'(\kappa + 1)b(\kappa, u(\kappa)) \rightarrow \inf.$$

Здесь через $\sigma' = (\psi = \{p(\kappa)\}, v = \{u(\kappa)\})$ обозначены процессы из допустимого множества D' задачи $(\mathcal{L}'_d)$.

Справедлива

Лемма 3.5.2. *Задачи $(\mathcal{L}_d)$ и $(\mathcal{L}'_d)$ эквивалентны: их значения и минимизирующие последовательности управлений совпадают.*

Доказательство опирается на использование билинейной производящей функции $S(x, p) = p'x$. Для нее полная разность в силу уравнений (3.21), (3.22)

$$\Delta S_\kappa = p'(\kappa + 1)b(\kappa, u(\kappa)).$$

Отсюда, поскольку

$$\sum_{\kappa=0}^{N-1} \Delta S_\kappa = S|_N - S|_0, \quad (3.23)$$

получаем равенство

$$p'(N)x(N) = p'(0)x_0 + \sum_{\kappa=0}^{N-1} p'(\kappa+1)b(\kappa, u(\kappa)),$$

которое, с учетом краевого условия из (3.22), дает

$$J[\sigma] = K[\sigma']$$

для всех пар процессов σ, σ' с совпадающими управлениями $v = \{u(\kappa)\}$. Это равенство доказывает лемму. $\square$

Нетрудно проверить, что в данном случае формально функционал K совпадает с лагранжианом задачи $(\mathcal{L}_d)$ при априорном выборе двойственных переменных из сопряженной системы (3.22) (тогда $K = J + \sum_{\kappa=0}^{N-1} \Delta S_\kappa$), но траектория ψ здесь оптимизируется. При этом переход к задаче сравнения формально согласуется с теорией двойственности для линейных и выпуклых задач оптимизации дискретных систем [72, 95]; чтобы убедиться в этом достаточно сменить знак у сопряженных переменных.

Заметим, что для задачи $(\mathcal{L}_d)$ принцип максимума является необходимым условием оптимальности [72, теорема 4.4.1] даже без предположения выпуклости вектограммы системы (3.21). Поэтому любопытной представляется

Лемма 3.5.3. *Между экстремальями Понтрягина задач $(\mathcal{L}_d)$ и $(\mathcal{L}'_d)$ существует взаимно однозначное соответствие, которое описывается условиями:*

если $\sigma(\chi, v)$ — экстремаль в $(\mathcal{L}_d)$ с коэкстремалью $\{q(\kappa)\}$, то $\sigma' = (\psi = \{-q(\kappa)\}, v)$ — экстремаль в $(\mathcal{L}'_d)$ с коэкстремалью χ и наоборот — экстремаль $\sigma' = (\psi, v)$ в $(\mathcal{L}'_d)$ с коэкстремалью $\{y(\kappa)\}$ определяет экстремаль $\sigma = (\chi = \{y(\kappa)\}, v)$ в $(\mathcal{L}_d)$ с коэкстремалью $(-\psi) = \{-p(\kappa)\}$.

Доказательство устанавливается прямой проверкой.

Примечательным здесь является обратное утверждение — фазовая траектория экстремали выступает в качестве двойственной в задаче сравнения.

Заметим, что и к задаче $(\mathcal{L}_d)$, и к задаче сравнения $(\mathcal{L}'_d)$ применим позиционный принцип минимума из предыдущего пункта, причем для последней надо рассматривать L -функции, слабо монотонные в обратном времени (относительно сопряженной системы (3.22)). Однако далее мы воспользуемся билинейной производящей функцией, слабо монотонной вдоль траекторий канонической системы (3.21), (3.22) из принципа максимума.

Пусть $\bar{\sigma} = (\bar{\chi}, \bar{v}) \in D$ — любой процесс, а $H(\kappa, x, p, u) = p'(A(\kappa, u)x + b(\kappa, u))$ — функция Понтрягина. Перейдем от функции $S(x, p)$ к

$$\bar{S}(\kappa, x, p) = p'(x - \bar{x}(\kappa)).$$

Тогда полная разность

$$\Delta \bar{S}_\kappa = H(\kappa, \bar{x}(\kappa), p(\kappa + 1), u(\kappa)) - H(\kappa, \bar{x}(\kappa), p(\kappa + 1), \bar{u}(\kappa))$$

и, следовательно,

$$\min_{U_\kappa} \Delta \bar{S}_\kappa \leq 0 \quad \forall (\kappa, x(\kappa), p(\kappa + 1)) \in Z_{N-1} \times R^n \times R^n {}^3.$$

Поэтому $\bar{S}$ слабо монотонно убывает относительно пары систем (3.21), (3.22), и равенство (3.23) приводит к точной формуле приращения функционала

$$\begin{aligned} J[\sigma] - J[\bar{\sigma}] &= K[\psi, v] - K[\bar{\psi}, \bar{v}] = \\ &= \sum_{\kappa=0}^{N-1} H(\kappa, \bar{x}(\kappa), p(\kappa + 1), u(\kappa)) - H(\kappa, \bar{x}(\kappa), p(\kappa + 1), \bar{u}(\kappa)), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где ψ — котраектория произвольного процесса σ , $\bar{\psi} = \psi(\bar{\sigma})$, а траектория χ не входит в правую часть, что играет важнейшую роль.

Ясно, что задача сравнения равносильна минимизации функционала (3.24) на D' , и $\bar{S}$ -экстремальное копозиционное управление находится из включения

$$w(\kappa, p_{\kappa+1}) \in U_*^{\bar{S}}(\kappa, p_{\kappa+1}) = \underset{U_\kappa}{\operatorname{Argmin}} p'_{\kappa+1}(A(\kappa, u)\bar{x}(\kappa) + b(\kappa, u)), \quad (3.25)$$

$$\kappa = \overline{N - 1, 0}.$$

³Из выкладок, кстати, следует, что для задачи $(\mathcal{L}_d)$ нельзя рассчитывать на сильную монотонность линейных по x L -функций, а значит и на соответствующие достаточные условия с ними.

В отличие от непрерывных задач никаких проблем с разрывностью $w(\kappa, \cdot)$ не возникает: при любом выборе такого селектора соответствующие котраектория $\psi_* = \{p_*(\kappa)\}$ и программное управление $v_* = \{u_*(\kappa) = w(\kappa, p(\kappa + 1))\}$ находятся пошагово в соответствии со схемой (звезду у p опускаем):

$$\begin{aligned} p(N) \rightarrow w(N-1, p(N)) = u_*(N-1) \rightarrow p(N-1) \rightarrow \\ \rightarrow w(N-2, p(N-1)) = u_*(N-2) \rightarrow \\ \rightarrow p(N-2) \rightarrow \dots \rightarrow w(0, p(1)) = u_*(0) \end{aligned}$$

и далее по v_* находится $\chi_* = \{x_*(\kappa)\}$.

Очевидный аналог теоремы 3.5.1 (но с билинейной производящей функцией $\bar{S}$) — *копозиционный (двойственный) принцип минимума* — формулируется следующим образом.

Теорема 3.5.2. *Для оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ необходимо, чтобы при любом выборе селектора $w(\kappa, p_{\kappa+1})$ из условия (3.25) выполнялось неравенство*

$$J[\bar{\sigma}] \leq K[\psi_*, v_*] = J[\chi_*, v_*]. \quad (3.26)$$

Отметим, что управление v_* не обязано быть оптимальным (и даже экстремальным) в рассматриваемой паре задач; однако оно может «браковать» не оптимальные экстремали.

Пример 3.8. Вернемся к примеру 3.7, но теперь будем устанавливать неоптимальность процесса $\bar{\sigma}$ с помощью композиционного принципа минимума.

Напомним, что

$$\bar{v} = \{\bar{u}(\kappa) = 1, \kappa = 0, 1\},$$

$$\bar{\chi} = \{\bar{x}_1(0) = 0, \bar{x}_1(1) = -1, \bar{x}_1(2) = -1; \bar{x}_2(\kappa) = 0, \kappa = 0, 1, 2\},$$

сопряженная система имеет вид

$$\begin{aligned} p_1(\kappa) &= p_1(\kappa + 1) + (u(\kappa) - 1)p_2(\kappa + 1), \\ p_2(\kappa) &= p_2(\kappa + 1), \end{aligned}$$

а граничные условия на ψ теперь таковы: $p_1(2) = 0$, $p_2(2) = 1$. Тогда

$$U_*^{\bar{S}}(\kappa, p) = \underset{|u| \leq 1}{\text{Argmin}} \{p'_1(\bar{x}_1(\kappa) + (\kappa - 1)u) + p'_2(\bar{x}_2(\kappa) + (u - 1)\bar{x}_1(\kappa))\}.$$

Для $\kappa = 1$ из (3.25) получаем, что

$$U_*^{\bar{S}}(1, p(2)) = \{1\},$$

и, полагая $u_*(1) = 1$, находим $p_{1*}(1) = 0$, $p_{2*}(1) = 1$. Далее, для $\kappa = 0$ находим, что $U_*^{\bar{S}}(0, p_*(1)) = \{u_0 \mid |u_0| \leq 1\}$. Выбирая любое $u_*(0) = u_0$, получаем процесс $\sigma_*(u_0)$ с траекторией

$$\chi_*(u_0) = \{x_{1*}(0) = 0, x_{1*}(1) = -u_0, x_{1*}(2) = -u_0; x_{2*}(\kappa) = 0, \kappa = 0, 1, 2\},$$

на котором $J[\sigma_*(u_0)] = 0 = J[\bar{\sigma}]$. Таким образом, установить неоптимальность процесса $\bar{\sigma}$ не удалось, но $\bar{S}$ -экстремальное управление приводит к семейству процессов $\sigma_*(u_0)$, причем, как легко проверить, процессы с $u_0 < 0$ не являются экстремальными. Оказывается, что применение теоремы 3.5.2 к любому из таких неэкстремальных процессов (т.е. итерация копозиционного принципа минимума) позволяет построить новый процесс $\tilde{\sigma}$ с лучшим показателем качества и, следовательно, установить неоптимальность всех процессов $\sigma_*(u_0)$ с $|u_0| \leq 1$ (в том числе, $\bar{\sigma}$).

Действительно, из (3.25) для любого процесса $\sigma_*(u_0)$ с $|u_0| \leq 1$, для $\kappa = 1$ получим, что

$$U_*^{\bar{S}}(1, p(2)) = \{-1\},$$

и $\tilde{u}(1) = -1$; следовательно, $\tilde{p}_1(1) = -2$, $\tilde{p}_2(1) = 1$. Далее, множество

$$U_*^{\bar{S}}(0, \tilde{p}(1)) = \{-1\}$$

тоже одноточечно, и единственное копозиционное управление $\tilde{w}^{\bar{S}}(\kappa, \tilde{p}(\kappa + 1)) \equiv -1$ порождает процесс $\tilde{\sigma}$ с управлением $\tilde{u}(\kappa) \equiv -1$ и значением целевой функции

$$J[\tilde{\sigma}] = -2 < 0 = J[\sigma_*(u_0)] = J[\bar{\sigma}].$$

Отметим, что в данном примере экстремальными также являются процессы $\sigma(u_1)$ с управлениями $u(0) = 0$, $u(1) = u_1$, где $u_1 \in [-1, 1]$ —

любое, и значением целевой функции $J[\sigma(u_1)] = 0 \quad \forall |u_1| \leq 1$. Для них

$$U_*^{\bar{S}}(\kappa, p(\kappa + 1)) = \begin{cases} \{u_1 \in [-1, 1]\}, & \kappa = 1, \\ \{-1\}, & \kappa = 0, u_1 < 1, \\ \{u_0 \in [-1, 1]\}, & \kappa = 0, u_1 = 1. \end{cases}$$

Выбирая любое $\hat{u}(1) < 1$ и $\hat{u}(0) = -1$, получим процесс $\hat{\sigma}$ с $J[\hat{\sigma}] = \hat{u}(1) - 1 < 0$. Если же положить $\hat{u}(1) = 1$ и $\hat{u}(0)$ — любым из $[-1, 1]$, то получим процесс $\sigma_*(\hat{u}(0))$, неоптимальность которого установлена выше.

Таким образом, как показывает пример, на базе теоремы 3.5.2 можно строить итерационную процедуру улучшения не оптимальных процессов, позволяющую находить контрпроцессы даже для не оптимальных экстремалей Понтрягина. Нужно отметить, что в этой процедуре позиционные принципы минимума могут комбинироваться.

3.6 Оптимизация дискретно-импульсных систем

1. Дискретно-импульсная система. Рассмотрим нелинейную динамическую систему с чисто импульсным управлением [67, 68], которую часто называют системой с «толчками» [96]:

$$\dot{x} = f(t, x) + \sum_{s_\kappa \leq t} g(s_\kappa, x(s_\kappa -), u_\kappa) \delta(t - s_\kappa). \quad (3.27)$$

Здесь s_κ — возрастающая последовательность нефиксированных моментов времени, $\delta(t - s)$ — дельта-функция Дирака в точке s , $\{u_\kappa\} \subset U \subset R^m$ — последовательность управлений. При $\sum |u_\kappa| < +\infty$ система (3.27) соответствует использованию в качестве управления дискретной векторной меры

$$\nu(dt) = \sum_{\kappa} u_\kappa \delta(t - s_\kappa), \quad (3.28)$$

и её неформальный смысл состоит в непрерывной динамике

$$\dot{x} = f(t, x)$$

на полуинтервалах $(s_\kappa, s_{\kappa+1}]$ и в условиях скачка

$$x(s_\kappa +) = x(s_\kappa -) + g(s_\kappa, x(s_\kappa -), u_\kappa)$$

в моменты действия импульсов (так что траектории оказываются кусочно-липшицевыми, непрерывными справа на $(t_0, T]$, если начальное условие задано в форме $x(t_0-) = x_0$).

Известно [68], что если функции f, g гладкие, удовлетворяют условиям не более чем линейного роста по x , а g_x ограничена и липшицева, то решение уравнения (3.27) при управлении (3.28) существует и единственно на любом отрезке $[t_0, T]$. Но устойчивость (робастность) этих решений относительно локального варьирования меры $\nu(dt)$ в слабой* топологии эквивалентна выполнению следующего *условия согласования* (коммутативности импульсов) для функции $g: \forall (t, x, u_1, u_2)$

$$g(t, x, u_1 + u_2) = g(t, x, u_1) + g(t, x + g(t, x, u_1), u_2). \quad (3.29)$$

Это условие (которое мы далее считаем выполненным) эквивалентно условию Фробениуса для матрицы

$$G(t, x) = g_u(t, x, u)|_{u=0} \quad (3.30)$$

(коммутаторы по x столбцов G равны нулю). Это условие, как известно [40, 51, 68], обеспечивает корректность перехода к импульсным управлениям-мерам Лебега-Стилтьеса в системе

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)v, \quad v \in L_\infty,$$

однако мы не будем касаться этого расширения.

2. Постановка задачи оптимизации. Рассмотрим следующую задачу (P_N) оптимального управления дискретно-импульсной системой (3.27), (3.28):

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq s_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N}, \quad (3.31)$$

$$x(s_\kappa+) = x(s_\kappa-) + g(s_\kappa, x(s_\kappa-), u_\kappa), \quad u_\kappa \in U, \quad \kappa = \overline{0, N}, \quad (3.32)$$

$$q := (s_0, x(s_0-), \dots, s_N, x(s_N-)) \in Q, \quad (3.33)$$

$$J[\sigma] = l(q) \rightarrow \inf.$$

Здесь через

$$\sigma = \left(x(t) \mid t \in \Delta = [s_0, s_N], \{u_\kappa, t_\kappa \mid \kappa = \overline{0, N}\} \right)$$

обозначены процессы системы (3.31), (3.32), функции f , g считаются гладкими, причем g удовлетворяет условию согласования (3.29), U — замкнутое выпуклое множество в R^m , содержащее точку $u = 0$, Q — замкнутое в $R^{(n+1)N}$, функция l непрерывна.

Как обычно, через Σ_f и Σ обозначим множества всех процессов системы (3.31), (3.32) и множество допустимых процессов задачи (P_N) соответственно.

Обсудим постановку задачи (P_N) .

Хотя она явно не содержит импульсных управлений, из сказанного выше следует, что она соответствует задаче оптимизации в системе (3.27) с дискретными мерами вида (3.28) при конечном числе скачков. При этом фиксация числа скачков (N) не является серьезным ограничением, если $0 \in U$. Действительно, любой процесс в системе (3.27) с числом скачков $N' < N$ вкладывается во множество процессов дискретно-непрерывной системы (3.31), (3.32) путем произвольного выбора дополнительного числа $(N - N')$ моментов времени s_κ с управлением $u_\kappa = 0$. Эти фиктивные моменты импульсов не вызывают разрывов соответствующей траектории, но обеспечивают указанное вложение. С другой стороны, введение фиктивных импульсов не исключается и для потенциально исследуемого на оптимальность процесса $\bar{\sigma}$, так что анализ задачи (P_N) соответствует *любо*му конечному числу импульсов.

Конечно, с позиции теорем существования оптимального процесса сужение класса мер до дискретных чревато, и задача может потребовать соответствующего расширения (например, методом разрывной замены времени). Однако для многих прикладных задач характерна именно дискретно-импульсная постановка, так что мы не будем расширять задачу, имея ввиду возможность её переформулировки на инфимум — поиска субоптимальных процессов или минимизирующих последовательностей. Это тем более естественно, если система (3.27), (3.28) получается в результате расширения обычной управляемой системы с кратковременными воздействиями неограниченной амплитуды, поскольку тогда U — конус в R^m .

Наконец, заметим, что при $f \equiv 0$ задача (P_N) охватывает (после формальных переобозначений) задачу оптимизации дискретной системы

с нефиксированными моментами квантования, правда, при условии согласования (3.29). Последнее свойство будет использовано и в предлагаемом методе решения задачи — аналоге нелинейного преобразования Гоха [40].

3. Преобразование задачи. Нам будет удобно ввести следующие функции

$$\xi(t, x, u) = g(t, x, u) + x, \quad \eta(t, x, u) = \xi(t, x, -u). \quad (3.34)$$

Тогда эти функции являются решением следующей пары сопряженных систем в частных производных

$$\xi_u = G(t, \xi), \quad \xi|_{u=0} = x,$$

$$\eta_u(t, x, u) + \eta_x(t, x, u)G(t, x) = 0, \quad \eta|_{u=0} = x,$$

которые оказываются вполне интегрируемыми в силу условий согласования (3.29) и Фробениуса (3.30) для матрицы G . Более того, функции ξ, η взаимно обратны по последнему аргументу при фиксированных t, x .

В силу (3.34) условия скачка (3.32) принимает вид

$$x(s_\kappa+) = \xi(s_\kappa, x(s_\kappa-), u_\kappa), \quad u_\kappa \in U, \quad \kappa = \overline{0, N}. \quad (3.35)$$

Рассмотрим теперь следующее преобразование

$$\Theta : \sigma \in \Sigma_f \rightarrow e := (y(t), w(t) \mid t \in \Delta, \{u_\kappa, t_\kappa \mid \kappa = \overline{0, N}\}),$$

$$w(t) = \sum_{s_i \leq t} u_\kappa, \quad t \in (s_0, s_1], \quad w(s_0-) = 0, \quad (3.36)$$

$$y(t) = \eta(t, x(t), w(t)), \quad t \in \Delta. \quad (3.37)$$

Тогда, очевидно, что

$$\dot{w}(t) = 0, \quad t \neq s_\kappa, \quad w(s_\kappa+) = w(s_\kappa-) + u_\kappa, \quad w(s_0-) = 0, \quad (3.38)$$

и $w(\cdot)$ является кусочно-постоянной, непрерывной справа на $(s_0, s_1]$ производящей функцией меры (2) (т.е. $\nu(dt) = dw(t)$), а новая фаза y , как легко убедиться, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{y} = \left(\eta_t(t, x, w) + \eta_x(t, x, w)f(t, x) \right) \Big|_{x=\xi(t, y, w)} =: F(t, y, w)$$

на отрезке Δ , причем решения $y(\cdot)$ оказываются липшицевыми (без разрывов) на Δ . Это свойство $y(\cdot)$ устанавливается с помощью полугруппового свойства функции $\xi - \forall(t, x, u_1, u_2)$

$$\xi(t, x, u_1 + u_2) = \xi(t, \xi(t, x, u_1), u_2)$$

и формулы обращения для (3.37):

$$x(t) = \xi(t, y(t), w(t)), \quad t \in \Delta. \quad (3.39)$$

Отсюда, с учетом равенств (3.34), (3.37), получаем

$$\begin{aligned} y(s_\kappa +) &= \eta(s_\kappa, x(s_\kappa +), w(s_\kappa +)) = \eta(s_\kappa, x(s_\kappa +), w(s_\kappa -) + u_\kappa) = \\ &= \xi(s_\kappa, x(s_\kappa +), -w(s_\kappa -) - u_\kappa) = \xi(s_\kappa, \xi(s_\kappa, x(s_\kappa +), -u_\kappa), -w(s_\kappa -)) = \\ &= \xi(s_\kappa, x(s_\kappa -), -w(s_\kappa -)) = y(s_\kappa -). \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $\sigma \in \Sigma_f$

$$\eta(s_\kappa, x(s_\kappa +), w(s_\kappa +)) - \eta(s_\kappa, x(s_\kappa -), w(s_\kappa -)) = 0, \quad \kappa = \overline{0, N}, \quad (3.40)$$

т.е. вектор-функция η постоянна на всех решениях каждого из уравнений (3.32) (если трактовать их как одношаговые разностные уравнения). Поэтому, если следовать каноническому подходу, можно перейти от задачи (P_N) к эквивалентной задаче (P'_N) , заменив уравнение (3.32) равенствами (3.40) и дополнив динамику уравнениями (3.38) для фазы w . Однако мы предпочтем полное преобразование к эквивалентной задаче сравнения (CP_N) на образе $E = \Theta(\Sigma)$ с исключением фазы x . Эта задача сравнения имеет следующее описание:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(t, y, w), \quad t \in \Delta, \\ \dot{w} &= 0, \quad t \neq s_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N}, \\ w(s_\kappa +) &= w(s_\kappa -) + u_\kappa, \quad w(s_0 -) = 0, \quad u_\kappa \in U, \quad \kappa = \overline{0, N}, \\ b &:= (s_0, y(s_0), w(s_0 -), \dots, s_N, y(s_N), w(s_N -)) \in B, \\ I[e] &= \mathcal{L}(b) \rightarrow \inf. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Здесь многоточечное ограничение (3.41) и функционал получены с учетом равенств $x(s_\kappa -) = \xi(s_\kappa, y(s_\kappa), w(s_\kappa -))$, $\kappa = \overline{0, N}$.

Теорема 3.6.1. *Задачи (P_N) и (CP_N) эквивалентны, т.е. их значения и минимизирующие последовательности совпадают с точностью до обратимого преобразования.*

Задача (CP_N) заметно проще исходной, поскольку в ней основная траекторная компонента $y(\cdot)$ липшицева, а дискретная динамика элементарна. Для её решения применимы методы главы 2.

Определенный теоретический интерес представляют необходимые и достаточные условия (1-го и 2-го порядка) локальной оптимальности допустимого процесса $\bar{\sigma}$ в исходной задаче (P_N) . Они могут быть получены путем «расшифровки» соответствующих условий локальной оптимальности процесса $\bar{e} = \Theta(\bar{\sigma})$ в задаче сравнения по образцу доказательств вариационного принципа максимума и квадратичных условий оптимальности общих импульсных процессов [30, 31, 40]. Не останавливаясь на этих вопросах, отметим, что «расшифровка» принципа Лагранжа в задаче (CP_N) приводит к линеаризованному принципу максимума в исходной задаче.

В заключение заметим, что технология предложенного преобразования дискретно-импульсной задачи вполне аналогична нелинейному преобразованию Гоха непрерывных и импульсных задач управления. В то же время родственное ему преобразование В.И. Гурмана к производной задаче непрерывных задач [23, 24] не имеет прямого аналога для задачи (P_N) , если функции g и G зависят от x .

Пример 3.9 соответствует дискретному варианту динамической модели оптимального распределения ресурсов [13], непрерывный вариант которой исследован в [37] с помощью K -условий и непрерывного преобразования Гоха. Наш подход, в сущности, реализует ту же технологию в дискретной модели. Она имеет следующее описание:

$$\begin{aligned} x_i(t_{\kappa+1}) &= x_i(t_{\kappa}) + c_i(x_i(t_{\kappa}))u_i(t_{\kappa}), \\ \sum_{i=1}^n u_i(t_{\kappa}) &= S_{\kappa}, \quad u_i(t_{\kappa}) \geq 0, \\ i &= \overline{1, n}, \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \\ q &= (t_0, x(t_0), \dots, t_N, x(t_N)) \in Q, \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$J[\sigma] = l(q, u(t_0), \dots, u(t_{N-1})) \rightarrow \inf.$$

Здесь $x_i(t_\kappa)$ — объем i -го ресурса, добытого к моменту t_κ , $u_i(t_\kappa)$ — текущие затраты на его добычу, ограниченные суммарно S_κ , $c_i(x_i) > 0$ при $x_i \geq 0$ — функция истощения, характеризующая эффективность единицы вложений в добычу в зависимости от уже добытого объема, конкретный эколого-экономический смысл функционала и многоточечных ограничений на моменты t_κ и вектор $x(t_\kappa)$ не имеют значения для иллюстрации метода решения путем преобразования Θ .

В данном примере новая фазовая координата $w = (w_i) \in R^n$ подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} w_i(t_{\kappa+1}) &= w_i(t_\kappa) + u_i(t_\kappa), & w_i(t_0) &= 0, \\ i &= \overline{1, N}, & \kappa &= \overline{0, N-1}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

а вектор-функция $\xi(x, w) = (\xi_i(x_i, w_i))$, $i = \overline{1, N}$ находится покомпонентно (переменные разделяются) из уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dw_i} = c_i(\xi_i), \quad \xi_i|_{w_i=0} = x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Решения находятся неявным образом из равенств

$$C_i(\xi_i) = w_i + C_i(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.44)$$

где

$$C_i(\xi_i) = \int \frac{d\xi_i}{c_i(\xi_i)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Поскольку $C'_i(\xi_i) > 0$ при $\xi_i \geq 0$, то уравнения (3.44) действительно однозначно определяют вектор-функцию $\xi(x, w)$. Новые фазовые координаты y_i вводятся по формулам

$$y_i = \xi_i(x_i, -w_i), \quad i = \overline{1, n}$$

и оказываются постоянными по времени —

$$y_i(t_\kappa) = y_i(t_0) = x_i(t_0), \quad i = \overline{1, n}, \quad \kappa = \overline{1, N}$$

(так как $f \equiv 0$, то $F \equiv 0$). Многоточечное ограничение и функционал преобразуются по формулам обращения

$$x_i(t_\kappa) = \xi_i(y_i(t_0), w_i(t_\kappa)), \quad i = \overline{1, n}, \quad \kappa = \overline{0, N}.$$

В итоге задача сравнения оказывается «почти статической» — с элементарной дискретной динамикой (3.42), (3.43).

Заключение

В работе получены следующие результаты.

Во-первых, доказаны достаточные условия сильного и глобального экстремума с бипозиционными решениями неравенств Гамильтона-Якоби для классических, дискретных и дискретно-непрерывных задач оптимального управления с общими конечными ограничениями и целевыми функционалами. Эти условия основаны на внешних оценках интегральных воронок и множеств соединимых точек соответствующих управляемых систем.

Во-вторых, получено обращение принципа максимума Понтрягина в достаточное условие оптимальности для невыпуклых задач оптимального управления дискретными и дискретно-непрерывными системами. Эти условия оптимальности не требуют нормальности исследуемой экстремали, единственности соответствующего нормированного набора множителей Лагранжа и применимы в случаях плохо управляемых систем.

Наконец, доказаны необходимые условия глобальной оптимальности с бипозиционными и производящими функциями для классических, дискретных и дискретно-непрерывных задач оптимального управления.

Литература

- [1] *Алексеев, В.М.* Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
- [2] *Анрион, Р.* Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении / Р. Анрион. — М.: Наука, 1979. — 208 с.
- [3] *Антипина, Н.В.* Линейные функции Ляпунова-Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н.В. Антипина, В.А. Дыхта // *Изв. вузов. Математика.* — 2002. — № 12. — С. 11–21.
- [4] *Аргучинцев, А.В.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума / А.В. Аргучинцев, В.А. Дыхта, В.А. Срочко // *Изв. вузов. Математика.* — 2009. — № 1. — С. 3–43.
- [5] *Арнольд, В.И.* Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
- [6] *Арутюнов, А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи / А.В. Арутюнов. — М.: Изд-во «Факториал», 1997. — 256 с.
- [7] *Арутюнов, А.В.* Принцип максимума Понтрягина и достаточные условия локальной оптимальности для нелинейных задач / А.В. Арутюнов // *Дифференциальные уравнения.* — 2003. — Т. 39, № 12. — С. 1587–1595.
- [8] *Арутюнов, А.В.* Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения / А.В. Арутюнов, Г.Г. Магалир-Ильяев, В.М. Тихомиров. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2006. — 144 с.

- [9] *Ащепков, Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами / Л.Т. Ащепков. — Новосибирск: Наука, 1987. — 227 с.
- [10] *Батурин, В.А.* Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления / В.А. Батурин, А.А. Лемперт // *Вычислительные технологии*. — 2003. — Т. 8. — С. 102–108.
- [11] *Батурин, В.А.* Метод слабого улучшения первого порядка для задач оптимального управления логико-динамическими системами / В.А. Батурин, Н.С. Малтугуева // *Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. математика*. — 2009. — Т. 2, № 1. — С. 83–93.
- [12] *Болтянский, В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. — М.: Наука, 1973. — 448 с.
- [13] *Борщевский, М.З.* Задача динамического использования истощаемого ресурса / М.З. Борщевский // *Вопросы прикладной математики*. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1977. — С. 120–131.
- [14] *Васильев, С.Н.* Метод сравнения в анализе систем. I, II / С.Н. Васильев // *Дифференциальные уравнения*. — 1981. — Т. 17, № 9, 11. — С. 1562–1573, 1545–1554.
- [15] *Васильев, С.Н.* Метод сравнения в анализе систем. III, IV / С.Н. Васильев // *Дифференциальные уравнения*. — 1982. — Т. 18, № 2, 6. — С. 197–205, 938–947.
- [16] *Васильев, Ф.П.* Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
- [17] *Волин, Ю.М.* Принцип максимума для разрывных систем и его применение к задачам с фазовыми ограничениями / Ю.М. Волин, Г.М. Островский // *Изв. вузов. Радиофизика*. — 1969. — Т. 12, № 11. — С. 1609–1621.
- [18] *Габасов, Р.* Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. — М.: Наука, 1971. — 508 с.

- [19] *Галеев, Э.М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 320 с.
- [20] *Гантмахер, Ф.Р.* Лекции по аналитической механике: Учебное пособие для вузов / Ф.Р. Гантмахер; Под ред. Е.С. Пятницкого. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 264 с.
- [21] *Гельфанд, И.М.* Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. — М.: Физматлит, 1961. — 228 с.
- [22] *Гирсанов, И.В.* Некоторые связи между функциями Беллмана и Кротова для задачи динамического программирования / И.В. Гирсанов // *Вестник Московского ун-та.* — 1968. — № 2. — С. 56–59.
- [23] *Гурман, В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления / В.И. Гурман. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
- [24] *Гурман, В.И.* Принцип расширения в задачах управления. 2-е изд., перераб. и доп. / В.И. Гурман. — М.: Наука, Физматлит, 1997. — 288 с.
- [25] *Гусейнов, Х.Г.* Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения, их производные и применение к задачам управления / Х.Г. Гусейнов, В.Н. Ушаков // *Дифференциальные уравнения.* — 1990. — Т. 26, № 11. — С. 1888–1894.
- [26] *Дмитрук, А.В.* Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями / А.В. Дмитрук, А.М. Каганович // *Нелинейная динамика и управление: Сб. науч. тр.* — М.: Наука, 2008. — Т. 6. — С. 1–40.
- [27] *Дубовицкий, А.Я.* Дискретный принцип максимума / А.Я. Дубовицкий // *Автоматика и телемеханика.* — 1978. — № 10. — С. 55–71.
- [28] *Дыхта, В.А.* Условия локального минимума для особых режимов в системах с линейным управлением / В.А. Дыхта // *Автоматика и телемеханика.* — 1981. — № 12. — С. 5–10.

- [29] *Дыхта, В.А.* Принцип расширения в качественной теории управления / В.А. Дыхта // Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения / Под ред. В.И. Гурмана, Г.Н. Константинова. — Новосибирск: Наука, 1990. — 190 с.
- [30] *Дыхта, В.А.* Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых процессов / В.А. Дыхта // *Сибирский математический журнал*. — 1994. — Т. 35, № 1. — С. 70–82.
- [31] *Дыхта, В.А.* Вариационный принцип максимума для классических задач оптимального управления / В.А. Дыхта // *Автоматика и телемеханика*. — 2002. — № 4. — С. 47–54.
- [32] *Дыхта, В.А.* Неравенство Гамильтона-Якоби и достаточные условия оптимальности в гибридных управляемых системах / В.А. Дыхта // Тез. докл. междунар. семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнения Гамильтона-Якоби», посв. 60-летию акад. А. И. Субботина. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2005. — С. 61–64.
- [33] *Дыхта, В.А.* Неравенство Ляпунова-Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении / В.А. Дыхта // *Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения*. — 2006. — Т. 110. — С. 76–108.
- [34] *Дыхта, В.А.* Достаточные условия оптимальности в задачах импульсного управления / В.А. Дыхта // *Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки*. — 2007. — Т. 12, № 4. — С. 443–445.
- [35] *Дыхта, В.А.* Инвариантность, достижимость и оптимальность в управляемых динамических системах / В.А. Дыхта // Труды XIV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — Т. 2: Оптимальное управление. — 2008. — С. 35–47.

- [36] Дыхта, В.А. Некоторые приложения неравенств Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении / В.А. Дыхта // *Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. математика.* — 2009. — Т. 2. — С. 183–196.
- [37] Дыхта, В.А. Анализ достаточных условий оптимальности с множеством функций типа Ляпунова / В.А. Дыхта // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* — 2010. — Т. 16, № 5. — С. 66–75.
- [38] Дыхта, В.А. Неравенства Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение / В.А. Дыхта // *Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки.* — 2010. — Т. 15, № 15. — С. 405–425.
- [39] Дыхта, В.А. Достаточные условия оптимальности для задач импульсного управления / В.А. Дыхта, Н.В. Антипина // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* — 2004. — № 4. — С. 76–83.
- [40] Дыхта, В.А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В.А. Дыхта, О.Н. Самсонок. — М.: Физматлит, 2003. — 256 с.
- [41] Дыхта, В.А. К сравнению достаточных условий оптимальности, основанных на решениях неравенства Гамильтона-Якоби / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // Тез. докл. школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2008. — С. 24–25.
- [42] Дыхта, В.А. Точное описание множеств достижимости управляемых систем субрешениями уравнения Гамильтона-Якоби и условия глобальной оптимальности / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2008. — С. 18.
- [43] Дыхта, В.А. Полурешения уравнения Гамильтона-Якоби в задачах оптимального управления с концевыми ограничениями / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // Тез. докл. междунар. конференции «Актуальные проблемы теории устойчивости и управления». — Екатеринбург: УрО РАН, 2009. — С. 70–72.

- [44] *Дыхта, В.А.* Каноническая теория Гамильтона-Якоби в задачах с общими концевыми и многоточечными ограничениями на траектории / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // Proc. V Int. Symposium «Generalized Statements and Solutions of Control Problems-2010». — Ulaanbaator, Mongolia: 2010. — С. 94–98.
- [45] *Дыхта, В.А.* Неравенства Гамильтона-Якоби в задачах оптимизации дискретно-непрерывных управляемых систем / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // Тез. докл. XI Междунар. конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)». — М.: ИПУ РАН, 2010. — С. 117–119.
- [46] *Дыхта, В.А.* Неравенства Гамильтона-Якоби и условия оптимальности в задачах управления с общими концевыми ограничениями / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // *Автоматика и телемеханика*. — 2011. — № 9. — С. 13–27.
- [47] *Дыхта, В.А.* О реализации нестандартной двойственности в задачах оптимального управления / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // *Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки*. — 2011. — Т. 16, № 4. — С. 1071–1073.
- [48] *Дыхта, В.А.* Позиционные решения неравенств Гамильтона-Якоби в задачах управления дискретно-непрерывными системами / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // *Автоматика и телемеханика*. — 2011. — № 6. — С. 48–63.
- [49] *Дыхта, В.А.* Позиционные решения неравенств Гамильтона-Якоби в задачах управления нелинейными обыкновенными и импульсными динамическими системами / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // Тез. докл. международной конференции, посвященная памяти И.Г. Петровского. — М.: Изд-во МГУ, 2011. — С. 173–174.
- [50] *Дыхта, В.А.* Управляемые системы: условия экстремальности, оптимальности и идентификация алгебраической структуры / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин, Г.Н. Яковенко // *Труды МФТИ*. — 2011. — Т. 3, № 3. — С. 122–131.

- [51] *Завалицин, С.Т.* Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалицин, А.Н. Сесекин. — М.: Наука, 1991. — 256 с.
- [52] *Зеликин, М.И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении / М.И. Зеликин. — М.: Изд-во «Факториал», 1998. — 351 с.
- [53] *Зеликина, Л.Ф.* Многомерный синтез и теоремы о магистрали в задачах оптимального управления / Л.Ф. Зеликина // Вероятностные проблемы управления в экономике / Под ред. В.И. Аркина. — М.: Наука, 1977. — С. 33–114.
- [54] Избранные труды А.Б. Куржанского / Под ред. А.Н. Дарьина, И.А. Дигаилова, И.В. Рублева. — М.: Изд. Моск. ун-та, 2009. — 756 с.
- [55] *Иоффе, А.Д.* Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
- [56] *Кларк, Ф.* Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М.: Наука, 1988. — 280 с.
- [57] *Кларк, Ф.* Универсальное позиционное управление и проксимальное прицеливание в задачах управления в условиях возмущения и дифференциальных играх / Ф. Кларк, Ю.С. Ледяев, А.И. Субботин // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова. — 1999. — Т. 224. — С. 165–186.
- [58] *Константинов, Г.Н.* Нормирование воздействий на динамические системы / Г.Н. Константинов. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983. — 197 с.
- [59] *Красовский, Н.Н.* Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1985. — 518 с.
- [60] *Кротов, В.Ф.* Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. — М.: Наука, 1973. — 448 с.
- [61] *Левитин, Е.С.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями / Е.С. Левитин, А.А. Милютин, Н.П. Осмо-

- ловский // *Успехи математических наук*. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 85–148.
- [62] *Матвеев, А.С.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи: Учеб. пособие / А.С. Матвеев, В.А. Якубович. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. — 540 с.
- [63] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Физматгиз, 1961. — 388 с.
- [64] *Матросов, В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В.М. Матросов. — М.: Физматлит, 2001. — 384 с.
- [65] *Матросов, В.М.* Метод сравнения в математической теории систем / В.М. Матросов, Л.Ю. Анапольский, С.Н. Васильев. — Новосибирск: Наука, 1980. — 480 с.
- [66] Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. — М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. — 312 с.
- [67] *Миллер, Б.М.* Метод разрывной замены времени в задачах управления дискретно-непрерывными системами / Б.М. Миллер // *Автоматика и телемеханика*. — 1993. — № 12. — С. 3–32.
- [68] *Миллер, Б.М.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович. — М.: Наука, 2005. — 429 с.
- [69] *Никольский, М.С.* О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах / М.С. Никольский // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика*. — 2005. — № 1. — С. 35–43.

- [70] Оптимальное управление / Э.М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин, и др.; Под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.
- [71] Оптимальное управление в линейных системах / А.А. Милютин, А.Е. Илютович, Н.П. Осмоловский, С.В. Чуканов. — М.: Наука, 1993. — 268 с.
- [72] *Пропой, А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А.И. Пропой. — М.: Наука, 1973. — 256 с.
- [73] *Пшеничный, Б.Н.* Необходимые условия экстремума / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1982. — 141 с.
- [74] *Роговцев, И.А.* Решения неравенств Гамильтона-Якоби и оценки целевого функционала в оптимальном управлении / И.А. Роговцев, С.П. Сорокин // Вестник ИГУ. Спец. выпуск: Ежегодная научно-теоретическая конф-я аспирантов и студентов: материалы. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. — С. 144–145.
- [75] *Сесекин, А.Н.* Экстремальные задачи маршрутизации с ограничениями / А.Н. Сесекин, А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. — 66 с.
- [76] *Сорокин, С.П.* Достаточность гибридного принципа максимума / С.П. Сорокин // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2009. — Т. 2, № 2. — С. 37–40.
- [77] *Сорокин, С.П.* Достаточные условия оптимальности для задач оптимального управления дискретно-непрерывными системами / С.П. Сорокин // Применение математических методов и информационных технологий в экономике: сб. науч. тр. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2009. — Вып. 8. — С. 43–50.
- [78] *Сорокин, С.П.* Задачи управления дискретно-непрерывными системами и достаточные условия оптимальности / С.П. Сорокин // Тез.

- докл. X Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2009.
- [79] *Сорокин, С.П.* Монотонные решения неравенств Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении / С.П. Сорокин // *Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки.* — 2009. — Т. 14, № 4. — С. 800–802.
- [80] *Сорокин, С.П.* Необходимые условия оптимальности в задачах управления, основанные на решениях неравенства Гамильтона-Якоби / С.П. Сорокин // *Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы».* — Воронеж: ИПЦ Воронежского гос. ун-та, 2009. — С. 167–168.
- [81] *Сорокин, С.П.* Условия глобальной оптимальности в задачах управления с общими концевыми ограничениями / С.П. Сорокин // *Материалы конференции «Ляпуновские чтения».* — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2009. — С. 49.
- [82] *Сорокин, С.П.* Достаточность гибридного принципа максимума в задаче оптимального накопления факторов производства с возможностью модернизации технологического процесса / С.П. Сорокин // *Тез. докл. XI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям.* — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2010. — С. 77.
- [83] *Сорокин, С.П.* Об оптимальности экстремалей принципа максимума понтрягина в гибридной макроэкономической модели оптимизации смены технологий / С.П. Сорокин // *Материалы III междунар. конференции «Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы».* — Улан-Удэ: Бурятского гос. ун-та, 2010. — С. 246–250.
- [84] *Сорокин, С.П.* Сильно и слабо монотонные функции типа Ляпунова в задачах управления гибридными системами / С.П. Сорокин // *Тез. докл. II Междунар. школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи».* — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2010. — С. 67.

- [85] *Сорокин, С.П.* Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума понтрягина для задач управления гибридными системами / С.П. Сорокин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 102–113.
- [86] *Сорокин, С.П.* Достаточные условия оптимальности с позиционными сильно монотонными функциями типа Ляпунова / С.П. Сорокин // Тез. докл. 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики». — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2011. — С. 51–53.
- [87] *Сорокин, С.П.* Каноническая теория оптимальности в задачах управления дискретными системами / С.П. Сорокин // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. — С. 44.
- [88] *Сорокин, С.П.* Монотонные функции типа Ляпунова и условия глобальной оптимальности для задач управления дискретными системами / С.П. Сорокин // *Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*. — 2011. — Т. 4, № 3. — С. 132–145.
- [89] *Сорокин, С.П.* О некоторых преобразованиях задач оптимального управления / С.П. Сорокин // Тез. докл. Российско-монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению. — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. — С. 82.
- [90] *Сорокин, С.П.* Слабо монотонные L -функции и улучшение управления в задачах оптимизации дискретных динамических систем / С.П. Сорокин // Труды XV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — Т. 3: Оптимальное управление. — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. — С. 121–126.
- [91] *Сорокин, С.П.* Производящие функции в линейной по состоянию задаче дискретного оптимального управления / С.П. Сорокин // Тез.

докл. XII Прибайкальской школы-семинара молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2012. — С. 45.

- [92] *Субботин, А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби / А.И. Субботин. — М.: Наука, 1991. — 216 с.
- [93] *Субботин, А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / А.И. Субботин. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.
- [94] *Субботина, Н.Н.* Принцип максимума и субдифференциал функции цены / Н.Н. Субботина // *Проблемы управления и теории информации*. — 1989. — Т. 18, № 3. — С. 151–160.
- [95] *Тер-Криков, А.М.* Оптимальное управление и математическая экономика / А.М. Тер-Криков. — М.: Наука, 1977. — 216 с.
- [96] *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 216 с.
- [97] *Хрусталева, М.М.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана / М.М. Хрусталева // *Доклады АН СССР*. — 1978. — Т. 242, № 5. — С. 1023–1026.
- [98] *Хрусталева, М.М.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в методе динамического программирования / М.М. Хрусталева. Деп. в ВИНТИ, № 4573-81. — М., 1981.
- [99] *Хрусталева, М.М.* Точное описание множеств достижимости и условие глобальной оптимальности динамических систем. I. Оценки и точное описание множеств достижимости и управляемости / М.М. Хрусталева // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 5. — С. 62–71.
- [100] *Хрусталева, М.М.* Точное описание множеств достижимости и условие глобальной оптимальности динамических систем. II. Условия гло-

бальной оптимальности / М.М. Хрусталева // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 7. — С. 70–80.

- [101] *Яковенко, Г.Н.* Теория управления регулярными системами / Г.Н. Яковенко. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 264 с.
- [102] *Янг, Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. — М.: Мир, 1974. — 488 с.
- [103] *Arutyunov, A.V.* Necessary optimality conditions for optimal control problems with intermediate constraints / A.V. Arutyunov, A.I. Okoulevitch // *J. of Dynamical and Control Systems*. — 1998. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 49–58.
- [104] *Aubin, J.-P.* Lyapunov functions for impulse and hybrid control systems / J.-P. Aubin // Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control. — Sydney, NSW: 2000. — Pp. 466–471.
- [105] *Aubin, J.-P.* Viability Theory / J.-P. Aubin. — 2nd edition. — Birkhauser, Boston, 2009. — 572 pp.
- [106] *Aubin, J.-P.* Differential Inclusions / J.-P. Aubin, A. Cellina. — Berlin: Springer-Verlag, 1984. — 342 pp.
- [107] *Bacciotti, A.* Differential inclusions and monotonicity conditions for nonsmooth Lyapunov functions / A. Bacciotti, F. Ceragioli, L. Mazzi // *Set Valued Analysis*. — 2000. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 299–309.
- [108] *Bacciotti, A.* Lyapunov functions and stability in control theory / A. Bacciotti, L. Rosier. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. — 235 pp.
- [109] *Bardi, M.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations / M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta. — Boston: Birkhauser, 1997. — 570 pp.
- [110] *Bortakovskii, A.S.* Optimal and suboptimal control for sets of trajectories of deterministic continuous-discrete systems / A.S. Bortakovskii // *J. of*

Computer and Systems Sciences International. — 2009. — Vol. 48, no. 1. — Pp. 14–29.

- [111] *Branicky, M.* A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory / M. Branicky, V. Borkar, S. Mitter // *IEEE Transactions On Automatic Control*. — 1998. — Vol. 43. — Pp. 31–45.
- [112] *Cannarsa, P.* Some characterizations of optimal trajectories in control theory / P. Cannarsa, H. Frankowska // *SIAM J. Control Optim.* — 1991. — Vol. 29. — Pp. 1322–1347.
- [113] *Cannarsa, P.* Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations and optimal control. Progress in nonlinear differential equations and their applications / P. Cannarsa, C. Sinestrari. — Boston: Birkhauser, 2004. — Vol. 58. — 304 pp.
- [114] *Caratheodory, C.* Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order / C. Caratheodory. — AMS Chelsea Publishing, 1999. — 412 pp.
- [115] *Cesari, L.* Optimization — Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations. Applications of Mathematics. / L. Cesari. — New York: Springer-Verlag, 1983. — Vol. 17 of *Applications of Mathematics*. — 542 pp.
- [116] *Clarke, F.H.* The synthesis of universal feedback pursuit strategies in differential games / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyayev, A.I. Subbotin // *SIAM J. Control Optim.* — 1997. — Vol. 35. — Pp. 552–561.
- [117] *Clarke, F.H.* Nonconvex duality in optimal control / F.H. Clarke, C. Nour // *SIAM J. Control Optim.* — 2005. — Vol. 43. — Pp. 2036–2048.
- [118] *Clarke, F.H.* Applications of optimal multiprocesses / F.H. Clarke, R.B. Vinter // *SIAM J. Control Optim.* — 1989. — Vol. 27, no. 5. — Pp. 1048–1071.
- [119] *Clarke, F.H.* Optimal multiprocesses / F.H. Clarke, R.B. Vinter // *SIAM J. Control Optim.* — 1989. — Vol. 27, no. 5. — Pp. 1072–1091.

- [120] *Clements, D.J.* Singular optimal control: The linear-quadratic problem / D.J. Clements, B.D.O. Anderson // Lecture Notes in Control and Information Sciences / Ed. by A.V. Balakrishnan, M. Thoma. — Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York, 1978. — 93 pp.
- [121] *Dmitruk, A.V.* Quadratic order conditions of a local minimum for singular extremals in a general optimal control problem / A.V. Dmitruk // Proc. of Symp. Pure Math. «Differential Geometry and Control» / Ed. by G. Ferreira et al. — Vol. 64. — Amer. Math. Soc., 1998. — Pp. 163–198.
- [122] *Dmitruk, A.V.* The hybrid maximum principle is a consequence of Pontryagin maximum principle / A.V. Dmitruk, A.M. Kaganovich // *Systems and Control Letters*. — 2008. — Vol. 57. — Pp. 964–970.
- [123] *Dykhta, V.A.* Lyapunov-Krotov inequality and sufficient conditions in optimal control / V.A. Dykhta // *J. Math. Sci.* — 2004. — Vol. 121. — Pp. 2156–2177.
- [124] *Dykhta, V.A.* Sufficient optimality conditions for classical and impulsive optimal control problems / V.A. Dykhta, N.V. Antipina // Proc. 10th IEEE Mediterranean Conf. on Control and Automation (MED2002). — Lisbon, Portugal: 2002.
- [125] *Dykhta, V.A.* Some applications of Hamilton-Jacobi inequalities for classical and impulsive optimal control problems / V.A. Dykhta, O.N. Samsonyuk // *European Journal of Control*. — 2011. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 55–69.
- [126] *Dykhta, V.A.* Weakly and strongly monotone Lyapunov functions and global optimality conditions in control problems / V.A. Dykhta, S.P. Sorokin // Book of the abstracts of the Workshop in Control, Nonsmooth analysis and Optimization. — Porto, Portugal: 2009.
- [127] *Dykhta, V.A.* Strongly and weakly monotone Lyapunov functions and global optimality conditions in control problems [электронный ресурс] / V.A. Dykhta, S.P. Sorokin // Proc. 5th Int. Scientific Conf. on Physics

and Control, Physcon 2011. — Leon, Spain: 2011. — Режим доступа: <http://lib.physcon.ru/doc?id=5613a404174a>, свободный.

- [128] *Dykhta, V.A.* Sub- and supersolutions of Hamilton-Jacobi equation in optimal control theory / V.A. Dykhta, S.P. Sorokin // Abstracts 8th International ISAAC Congress 2011. — Moscow: Peoples' Friendship University of Russia, 2011. — P. 367.
- [129] *Ekeland, I.* Nonconvex minimization problems / I. Ekeland // *Bull. Am. Math. Soc.* — 1979. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 443–474.
- [130] *Frankowska, H.* Value function in optimal control / H. Frankowska // Mathematical Control Theory / Ed. by A.A. Agrachev. — Trieste, Italy: ICTP, 2002. — Vol. 8, no. 2 of *ICTP Lecture Notes Series*. — Pp. 515–654.
- [131] *Galbraith, G.N.* Optimal control of hybrid systems with an infinite number of discrete states / G.N. Galbraith, R.B. Vinter // *J. of Dynamical and Control Systems*. — 2002. — Vol. 9. — Pp. 563–584.
- [132] *Garavello, M.* Hybrid necessary principle / M. Garavello, B. Piccoli // *SIAM J. Control Optim.* — 2005. — Vol. 43, no. 5. — Pp. 1867–1887.
- [133] *Hedlund, S.* Optimal control of hybrid systems / S. Hedlund, A. Rantzer // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. — Phoenix, AZ, USA: 1999. — Pp. 3972–3977.
- [134] Impulse differential inclusions: a viability approach to hybrid systems / J.-P. Aubin, J. Lygeros, M. Quincampoix et al. // *IEEE Transactions On Automatic Control*. — 2002. — Vol. 47, no. 1. — Pp. 2–20.
- [135] *Krasovskii, N.N.* Game-Theoretical Control Problems / N.N. Krasovskii, A.I. Subbotin. — Berlin: Springer-Verlag, 1988. — 517 pp.
- [136] *Krotov, V.F.* Global Methods in Optimal Control Theory. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. / V.F. Krotov. — New York: Marcel Dekker, 1996. — Vol. 195. — 384 pp.

- [137] *Lakshmikantham, V.* Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems / V. Lakshmikantham, V.M. Matrosov, S. Sivasundaram. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. — 172 pp.
- [138] *Marchal, C.* Second-order tests in optimization theories / C. Marchal // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 1975. — Vol. 15, no. 6. — Pp. 633–666.
- [139] A maximum principle for hybrid optimal control problems with pathwise state constraints / P.E. Caines, F.H. Clarke, X. Liu, R.B. Vinter // Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control. — San Diego, USA: 2006. — Pp. 4821–4825.
- [140] *Milyutin, A.A.* Calculus of variations and optimal control / A.A. Milyutin // Proc. Internat. Conf. on the Calculus of Variations and Related Topics. — Vol. 411. — Haifa: Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series, 2000. — Pp. 159–172.
- [141] *Milyutin, A.A.* Calculus of Variations and Optimal Control / A.A. Milyutin, N.P. Osmolovskii. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998. — 372 pp.
- [142] *Molinary, B.P.* Nonnegativity of a quadratic functional / B.P. Molinary // *SIAM J. Control Optim.* — 1975. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 792–806.
- [143] *Mordukhovich, B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation I & II. Fundamental Principles of Mathematical Sciences / B.S. Mordukhovich. — Berlin: Springer, 2006. — Vol. 330 & 331. — 611 & 580 pp.
- [144] Nonsmooth Analysis and Control Theory / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. — New York: Springer-Verlag, 1998. — Vol. 178 of *Grad. Texts in Math.* — 276 pp.

- [145] *Pachter, M.* Revisit of linear-quadratic optimal control / M. Pachter // *Journal of Optimization Theory and Applications.* — 2009. — Vol. 140. — Pp. 301–314.
- [146] *Sorokin, S.P.* Canonical optimality theory for a linear-quadratic optimal control problem with a general cost functional / S.P. Sorokin // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2010. — С. 45.
- [147] *Sussmann, H.J.* A maximum principle for hybrid optimal control problems / H.J. Sussmann // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. — Phoenix, AZ , USA: 1999. — Pp. 425–430.
- [148] *Sussmann, H.J.* A nonsmooth hybrid maximum principle / H.J. Sussmann // *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* — 1999. — no. 246. — Pp. 325–354.
- [149] *Vinter, R.B.* Weakest conditions for existence of Lipschitz continuous Krotov functions in optimal control theory / R.B. Vinter // *SIAM J. Control Optim.* — 1983. — Vol. 21. — Pp. 215–234.
- [150] *Vinter, R.B.* Dynamic programming for optimal control problems with terminal constraints / R.B. Vinter // *Lecture Notes in Math.* — 1985. — Vol. 1119. — Pp. 190–202.
- [151] *Vinter, R.B.* Convex duality and nonlinear optimal control / R.B. Vinter // *SIAM J. Control Optim.* — 1993. — Vol. 31. — Pp. 518–538.
- [152] *Vinter, R.B.* Optimal Control / R.B. Vinter. — Boston: Birkhauser, 2000. — 520 pp.
- [153] *Vinter, R.B.* A necessary and sufficient condition for optimality of dynamic programming type, making no a priori assumptions on the controls / R.B. Vinter, R.M. Lewis // *SIAM J. Control Optim.* — 1978. — Vol. 16. — Pp. 571–583.

- [154] *Vinter, R.B.* A verification theorem which provides a necessary and sufficient condition for optimality / R.B. Vinter, R.M. Lewis // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 84–89.
- [155] *Vinter, R.B.* Hamilton-Jacobi theory for optimal control problems with data measurable in time / R.B. Vinter, P. Wolenski // *SIAM J. Control Optim.* — 1990. — Vol. 28. — Pp. 1404–1419.
- [156] *Wolenski, P.R.* Proximal analysis and the minimal time function / P.R. Wolenski, Yu. Shuang // *SIAM J. Control Optim.* — 1998. — Vol. 36. — Pp. 1048–1072.