

На правах рукописи

СОРОКИН СТЕПАН ПАВЛОВИЧ

**НЕРАВЕНСТВА ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ
В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ СИСТЕМАМИ**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Дыхта
Владимир Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Арутюнов
Арам Владимирович,
РУДН, зав. кафедрой;

кандидат физико-математических наук
Бутин
Александр Алексеевич,
ИрГУПС, доцент

Ведущая организация: **Институт математики и механики**
УрО РАН (г. Екатеринбург)

Защита состоится 17 мая 2012 г. в 15:00 ч. на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в ИДСТУ СО РАН по адресу: 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте www.idstu.irk.ru ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 16 апреля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н.

А.А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию задач оптимального управления дискретно-непрерывными системами (ДНС). Эти системы, часто называемые «гибридными», состоят из конечного числа управляемых подсистем, связанных между собой правилами априорно не фиксированного последовательного включения по интервалам времени (возможно перекрывающимся) и общими ограничениями на траектории и управления. Таким образом, ДНС характеризуются переменным фазовым пространством и переплетением дискретной и непрерывной динамики. Указанные особенности стимулируют развитие методов вариационного анализа задач оптимального управления в дискретно-непрерывных системах. Дополнительный интерес к этим задачам вызывают прикладные модели оптимизации ДНС, которые встречаются в различных областях механики, робототехники, оптики, экономики, экологии и т.д.

Для вариационного анализа задач оптимального управления ДНС в определенном смысле канонической оказалась задача динамической оптимизации с промежуточными (многоточечными) фазовыми ограничениями. На это обстоятельство и связь с задачами оптимального управления разрывными системами обратил внимание В.В. Величенко. Наиболее полные необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для гладких задач оптимального управления ДНС получены в работах Л.Т. Ащепкова (на пакете игольчатых вариаций), А.В. Дмитрука и А.М. Кагановича (редукцией к классической задаче оптимального управления с не разделенными концевыми ограничениями методом «размножения» переменных Ю.М. Волина и Г.М. Островского), А.В. Арутюнова и А.И. Околевича (задачи со смешанными ограничениями) и др. «Гибридный» принцип максимума для различных классов негладких задач оптимального управления ДНС получен в серии работ Ф. Кларка и Р. Винтера, Г. Зуссмана, М. Гаравелло и Б. Пиколли; на общей области применимости все эти принципы максимума совпадают. Достаточные условия оптимальности развиты в циклах работ, выполненных под руководством В.И. Гурмана (обобщение условий В.Ф. Кротова), А.Б. Куржанского (метод динамического программирования с необходимыми условиями оптимальности синтеза в линейно-выпуклых задачах дискретно-импульсного управления), Ж.-П. Обена (квазивариационные неравенства Гамильтона-Якоби, функции типа Ляпунова), а также в работах Л.Т. Ащепкова, С. Хедлунда и А. Рантзера (условия типа Кротова), Р. Винтера и Г. Гелбрайта (квази-

вариационное неравенство Беллмана с алгоритмом оптимизации) и других авторов.

Однако анализ и примеры показывают, что условия оптимальности в ДНС, связанные с решениями неравенств и уравнений Гамильтона-Якоби, имеют ограниченную область применимости. Традиционных, даже обобщенных, решений, зависящих только от текущей позиции системы, оказывается не достаточно при наличии многоточечных фазовых ограничений и функционалов типа Майера от мультинабора конечных значений траекторий подсистем. В этом случае необходимо введение параметрической зависимости от этого мультинабора. Подобная ситуация имеет место уже в классических задачах оптимального управления с не разделенными конечными ограничениями.

Указанный недостаток известных методов и условий оптимальности обуславливает актуальность данного исследования. В работе развивается каноническая теория оптимальности Гамильтона-Якоби^{1, 2}, адаптированная к специфике дискретно-непрерывных задач оптимального управления. Особое внимание уделено усилению принципа максимума Понтрягина до достаточного условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимизации ДНС.

Цель работы состоит в получении необходимых и достаточных условий оптимальности дискретно-непрерывных процессов путем обобщения канонической теории оптимальности Гамильтона-Якоби на новые классы задач.

Объектом исследования являются задачи оптимального управления дискретно-непрерывными системами с включением в анализ базовых составляющих: классических и дискретных задач оптимального управления с общими конечными ограничениями на траекторию.

Методы исследования базируются на свойствах сильной и слабой монотонности обобщенных решений неравенств Гамильтона-Якоби, оценках множеств соединимых точек управляемых систем, канонической теории оптимальности в оригинальных вариантах, принципе максимума Понтрягина и теории экстремальных задач.

Научная новизна. Для качественного исследования оптимизационных и позиционных задач теории управления ДНС введен новый класс

¹Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Calculus of Variations and Optimal Control. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998. 372 pp.

²Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова-Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения. 2006. Т. 110. С. 76–108.

бипозиционных решений неравенств (и уравнений) Гамильтона-Якоби, параметрически зависящих от начальной или финальной позиции управляемой системы. Доказано, что этот класс L -функций (типа Ляпунова) необходим для обоснования канонической теории оптимальности уже в классических задачах оптимального управления с не разделенными концевыми ограничениями. Полученные условия локальной и глобальной оптимальности дискретно-непрерывных процессов с множествами бипозиционных L -функций существенно усиливают известные аналоги. В частности, из них выводятся наиболее общие достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для дискретно-непрерывных задач оптимизации без априорных предположений выпуклости, нормальности исследуемой экстремали, единственности соответствующих ей наборов множителей Лагранжа. Представляют интерес необходимые и достаточные условия оптимальности, усиливающие принцип максимума для дискретных задач оптимального управления в линейных системах с управляемыми коэффициентами. Переход к бипозиционным решениям неравенств Гамильтона-Якоби позволил получить способ построения субоптимальных бипозиционных управлений по нижней огибающей разрешающего множества L -функций, что невозможно в традиционном классе решений.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе результатов обусловлены строгостью доказательств, применением апробированных методов исследования, сравнением с известными результатами, а также обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

Теоретическая и практическая значимость работы. Развитые в работе методы могут применяться для качественного анализа и решения различных классов задач оптимального управления и для оценки достижимых состояний управляемых систем при общих концевых ограничениях. Исследованные многомерные модели оптимизации перехода экономики к новой технологии и распределения ресурсов иллюстрируют эффективность предлагаемых методов и условий оптимальности. Конструкция позиционного управления, экстремального к разрешающему множеству бипозиционных решений неравенств Гамильтона-Якоби, близка к традиционной и вполне реализуема в численных методах решения задач управления. Это относится и к необходимым условиям оптимальности с позиционными контруправлениями для задач оптимизации дискретных систем, линейных по состоянию.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проекта по

программе СО РАН «Нелокальные методы в теории управления динамическими системами» (№ гос. регистрации 01201001345), интеграционного проекта СО–УрО РАН № 85 «Качественный и численный анализ эволюционных уравнений и управляемых систем» и грантов РФФИ (проекты 07-01-00741-а, 11-01-00672-а, 09-01-16002-моб_з_рос, 10-01-09370-моб_з).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

В соответствии с паспортом специальности 01.01.02 в диссертации проведено теоретическое исследование свойств достижимости и управляемости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и дискретно-непрерывных систем; предложен и апробирован новый класс негладких бипозиционных решений квазивариационных неравенств (и уравнений) Гамильтона-Якоби для качественного исследования задач оптимального управления непрерывными, дискретно-непрерывными и дискретными системами (пп. 3, 11, 12 области исследований).

Апробация работы. Результаты диссертационной работы представлялись на 22 международных, всероссийских и региональных конференциях, в частности, на Международной конференции «Актуальные проблемы теории устойчивости и управления» (Екатеринбург, 2009), Международных конференциях «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2009, 2011), XI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Е.С. Пятницкого)» (Москва, 2010), V Международном симпозиуме «Обобщенные постановки и решения задач управления» (Улан-Батор, Монголия, 2010), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г. Петровского (Москва, 2011), VIII Международном конгрессе ISAAC 2011 (Москва, 2011), V Международной научной конференции PhysCon 2011 (Леон, Испания, 2011), XV Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, 2011), I и II Школах-семинарах «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2008, 2010), 42-ой Всероссийской молодежной конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2011).

Результаты работы неоднократно обсуждались на семинарах в Институте динамики систем и теории управления СО РАН.

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе статьи [1–6] в журналах, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций.

На защиту выносятся результаты, полученные автором самостоятельно. В работах [1, 2, 11] В.А. Дыхтой доказана негладкая версия канонических достаточных условий оптимальности и предложены модификации условий В.Ф. Кротова и К. Каратеодори с множествами L -функций, получено обращение принципа максимума в достаточное условие оптимальности для невыпуклых задач импульсного управления. Автором диссертации в этих работах получены оценки интегральных воронок управляемых динамических систем, доказаны канонические условия оптимальности с бипозиционными L -функциями и проведен их анализ. Часть статьи [5], написанная Г.Н. Яковенко, посвящена методам анализа управляемых систем на наличие у них общих групповых свойств. В статьях [5, 6] В.А. Дыхтой введены производящие L -функции, определенные на траекториях канонической системы из принципа максимума, и указаны их приложения к задачам управления в непрерывных системах. Соискателем эти результаты распространены на задачи дискретного оптимального управления и апробированы на примерах.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 156 наименований. Общий объем диссертации составляет 154 страницы. Результаты главы 1 опубликованы в работах [1, 2, 5, 8, 11], главы 2 — в работах [2, 3, 7, 9], главы 3 — в работах [4, 6, 10].

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится обзор и характеристика известных необходимых и достаточных условий оптимальности для дискретно-непрерывных задач оптимального управления, обосновывается актуальность диссертационного исследования.

Для управляемой системы

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \quad (S)$$

с процессами

$$\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta = [t_0, t_1]) \in AC(\Delta, R^n) \times L_\infty(\Delta, U),$$

непрерывной функцией $f(t, x, u)$ и компактным множеством $U \subset R^m$ анонсируются необходимые понятия монотонности функций типа Ляпунова и соответствующие критерии в форме неравенств Гамильтона-Якоби для классических и негладких решений; указываются апробированные методы их решения и реализация разрывных позиционных управлений по Красовскому-Субботину.

Часть дальнейших результатов (внутренние оценки интегральных воронок и необходимые условия оптимальности) требует более жестких стандартных предположений:

- 1) функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных и локально липшицева по x равномерно по $(t, u) \in R \times U$;
- 2) существует действительное число $c > 0$, такое что $|f(t, x, u)| \leq c(1 + |x|)$ на $R^{n+1} \times U$;
- 3) множество $f(t, x, U)$ выпукло $\forall (t, x) \in R^{n+1}$;
- 4) множество U компактно.

Пусть $G = (a, b) \times R^n$, $a < b$. Непрерывную функцию $\varphi : G \rightarrow R$ называют сильно возрастающей на G , если она не убывает вдоль всех траекторий системы (S) , проходящих по G . Если φ не убывает вдоль хотя бы одной траектории системы (S) , начинающейся в произвольной начальной точке из G и проходящей по G , то φ называется слабо возрастающей на G . Типы монотонности имеют аналоги для убывающих функций, а также могут рассматриваться в обратном времени (относительно системы $(-S)$)³. Множества всех сильно возрастающих и слабо возрастающих в обратном времени функций обозначаются через $L_{s\uparrow}(G)$ и $L_{w\uparrow}^-(G)$ соответственно.

Положим $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$, $h(t, x, \psi) = \min\{H(t, x, \psi, u) \mid u \in U\}$, $\bar{h}(t, x, p) = p_t + h(t, x, p_x)$, где $p = (p_t, p_x) \in R \times R^n$. Для гладкой функции $\varphi(t, x)$ через $\nabla\varphi(t, x)$ обозначается ее градиент в точке (t, x) , а через $\partial_P\varphi(t, x)$ и $\partial^P\varphi(t, x)$ — проксимальные суб- и супердифференциалы^{3, 4} функции φ в точке (t, x) .

Для локально липшицевой или непрерывной функции включение $\varphi \in L_{s\uparrow}(G)$ эквивалентно следующим неравенствам Гамильтона-Якоби соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{h}(t, x, \nabla\varphi(t, x)) &\geq 0 \quad \forall (t, x) \in G, \\ \bar{h}(t, x, p) &\geq 0 \quad \forall p = (p_t, p_x) \in \partial_P\varphi(t, x), \quad \forall (t, x) \in G. \end{aligned} \quad (1)$$

Для гладкой или непрерывной функции включение $\varphi \in L_{w\uparrow}^-(G)$ эквивалентно следующим неравенствам Гамильтона-Якоби соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{h}(t, x, \nabla\varphi(t, x)) &\leq 0 \quad \forall (t, x) \in G, \\ \bar{h}(t, x, p) &\leq 0 \quad \forall p = (p_t, p_x) \in \partial^P\varphi(t, x), \quad \forall (t, x) \in G. \end{aligned} \quad (2)$$

Неравенства (1), (2) рассматриваются в точках с непустыми множествами $\partial_P\varphi(t, x)$ и $\partial^P\varphi(t, x)$.

³Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1998. Vol. 178 of Grad. Texts in Math. 276 pp.

⁴Vinter R.B. Optimal Control. Boston: Birkhäuser, 2000. 520 pp.

Приведены и другие инфинитезимальные критерии монотонности, используемые далее.

Первая глава посвящена условиям оптимальности в следующей классической задаче (P) с не разделенными концевыми ограничением и целевым функционалом: минимизировать функционал

$$J[\sigma] = l(q)$$

на множестве процессов системы (S) , удовлетворяющих ограничению $q \in Q$.

Здесь функция l непрерывна, множество Q замкнуто, $q = q(\sigma) = (t_0, x(t_0); t_1, x(t_1))$ — *концевой вектор* процесса $\sigma = (x(t), u(t) | \Delta = [t_0, t_1])$. Пусть Σ_f и Σ — непустые множества всех процессов системы (S) и допустимых процессов в задаче (P) соответственно.

Определение 1. *Множество*

$$\mathcal{R} = \{q = (t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid \exists \sigma \in \Sigma_f : x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\}$$

называется множеством соединимых точек системы (S) .

В §1.2 приводится базовый, негладкий вариант канонических достаточных условий оптимальности Гамильтона-Якоби^{1,2} (K -достаточных условий) для задачи (P) , основанный на внешних оценках множества $\mathcal{R}$. Эти оценки строятся с помощью произвольных семейств непрерывных L -функций $\Phi = \{\varphi^\alpha(t, x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subset L_{s\uparrow}$. Проведено сравнение K -условий с негладкими модификациями достаточных условий К. Каратеодори и В.Ф. Кротова, также оперирующих множествами сильно возрастающих L -функций. Установлено, что K -условия выполняются каждый раз, когда выполнены альтернативные достаточные условия, причем с теми же множествами разрешающих функций. Приведены примеры, показывающие, что запас разрешающих функций в смысле канонического подхода шире, чем для условий Каратеодори и Кротова. Кроме того, эти примеры указывают на необходимость введения нового класса *бипозиционных* L -функций, зависящих не только от текущей позиции (t, x) системы (S) , но и от начальной (t_0, x_0) или конечной (t_1, x_1) .

Определение 2. *Непрерывную функцию $V(t, x; t_0, x_0) : R^{2n+2} \rightarrow R$ назовем*

- а) *сильно возрастающей, если $\forall (t_0, x_0) \in R^{n+1} \quad V(\cdot, \cdot; t_0, x_0) \in L_{s\uparrow}$ и $V(t_0, x_0; t_0, x_0) = 0$;*
- б) *слабо возрастающей в обратном времени, если $\forall (t_0, x_0) \in R^{n+1} \quad V(\cdot, \cdot; t_0, x_0) \in L_{w\uparrow}^-$ и $V(t_0, x; t_0, x_0) < 0 \quad \forall x \neq x_0$.*

Для множеств бипозиционных функций вводятся обозначения типа $\mathcal{V}_{s\uparrow}$, $\mathcal{V}_{w\uparrow}^-$ и т.д.

В §1.3 получены оценки множества соединимых точек $\mathcal{R}$ системы (S) с использованием неравенств с бипозиционными функциями. Для некоторого множества бипозиционных функций $\mathcal{V}$ вводятся множества

$$E(V) = \{(t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid V(t_1, x_1; t_0, x_0) \geq 0\},$$

$$E_+(\mathcal{V}) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} E(V) \quad \text{и} \quad E_-(\mathcal{V}) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} E(V).$$

Теорема 1. а) Если $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}$, то $\mathcal{R} \subset E_+(\mathcal{V})$.

б) Если $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$, то $\mathcal{R} \supset E_-(\mathcal{V})$.

в) Если $V \in \mathcal{V}_{s\uparrow} \cap \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$, то $\mathcal{R} = E(V)$.

Из этой теоремы вытекают необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче (P) , которые формулируются через конечномерные *концевые задачи* минимизации.

Теорема 2. Пусть для процесса $\bar{\sigma} \in \Sigma$ существует такое множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}$, что вектор $\bar{q} = q(\bar{\sigma})$ глобально оптимален в задаче

$$l(q) \rightarrow \min; \quad q \in E_+(\mathcal{V}) \cap Q. \quad (A_+(\mathcal{V}))$$

Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P) .

Теорема 2 допускает естественную локализацию на случай исследования сильного минимума на процессе $\bar{\sigma}$. Это достигается сужением задачи (P) на некоторое открытое множество $G \subset R^{n+1}$, содержащее график траектории $\bar{x}(\cdot)$. В этом случае монотонность функций из $\mathcal{V}$ требуется на G , а в концевую задачу $(A_+(\mathcal{V}))$ следует добавить ограничения $(t_0, x_0) \in G$, $(t_1, x_1) \in G$.

Теорема 3. Пусть процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P) . Тогда для любого множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$ выполнено неравенство

$$J[\bar{\sigma}] \leq \inf(A_-(\mathcal{V}))^5,$$

где справа стоит значение задачи

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in E_-(\mathcal{V}) \cap Q. \quad (A_-(\mathcal{V}))$$

Из теорем 2, 3 (или утверждения в) теоремы 1) вытекают смыкающиеся необходимые и достаточные условия оптимальности с одним решением уравнения Гамильтона-Якоби из $\mathcal{V}_{s\uparrow} \cap \mathcal{V}_{w\uparrow}^-$. Однако его нахождение сопряжено с трудностями, неестественными для рассматриваемой задачи в

⁵Здесь и далее используются сокращенные обозначения типа $\min(P) = \min J(\Sigma)$.

классе программных управлений, поэтому внимание на этой ситуации не акцентируется.

В §1.4 анализируются свойства *разрешающего множества* $\mathcal{V}$, обеспечивающего выполнение достаточных условий теоремы 2. Показано, что в случае, когда задача (P) локально не вырождена в точке $\bar{\sigma}$ (т.е. дифференциальная связь существенна), а множество функций $\mathcal{V}$ полунепрерывно снизу в точке $\bar{q}$, $\mathcal{V}$ содержит элементы, постоянные вдоль траектории $\bar{x}$. Отсюда (с использованием результатов Н.Н. Субботиной), в частности, следует, что супердифференциал таких функций $V \subset \mathcal{V}$ вдоль $\bar{x}$ содержит *коэкстремаль* — решение сопряженной системы, удовлетворяющее вместе с $\bar{\sigma}$ условиям экстремальности из принципа максимума Понтрягина. В конструктивном плане важно, что нижняя огибающая множества $\mathcal{V}$ — функция

$$V_*(t, x; t_0, x_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}} V(t, x; t_0, x_0)$$

— тоже оказывается разрешающей. Возможность перехода от разрешающего множества к одной функции не имеет места в традиционном классе L -функций. Между тем этот переход дает ключ к проверке свойства разрешаемости выбранного множества L -функций $\mathcal{V}$, если достаточные условия теоремы 2 рассматривать как метод приближенного решения задачи без априори заданного исследуемого процесса. Для этого можно использовать естественную модификацию правила экстремального прицеливания Н.Н. Красовского из динамического программирования^{6, 7} с перебором бипозиционных управлений $w(t, x; t_0, x_0)$, экстремальных к огибающей V_* . На выходе эта процедура должна давать допустимый процесс σ_* , концевой вектор которого сколь угодно мало отклоняется от вектора $\bar{q}$ — решения концевой задачи $(A_+(\mathcal{V}))$ (в идеале — совпадает с $\bar{q}$). В этом случае полученный процесс будет приближенно удовлетворять концевым ограничениям задачи при малой разности $|J[\sigma_*] - l(\bar{q})|$.

В §1.5 достаточные условия оптимальности с бипозиционными функциями применены для исследования неклассической линейно-квадратичной задачи с общей зависимостью терминальной части целевого функционала от x_0, x_1 и присутствием линейных слагаемых в интегранте. Эти

⁶Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

⁷Кларк Ф., Ледяев Ю.С., Субботин А.И. Универсальное позиционное управление и проксимальное прицеливание в задачах управления в условиях возмущения и дифференциальных играх // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 165–186.

особенности делают не применимым метод динамического программирования в традиционном варианте и порождают новые свойства оптимальных решений. Получены необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности в терминах существования решения матричного дифференциального уравнения Риккати и решений ряда линейных систем. Эти решения определяют разрешающую бипозиционную функцию, линейно-квадратичную по паре (x, x_0) . Бипозиционное экстремальное управление получено в явном виде.

В §1.6 кратко описывается альтернативное расширение традиционных функций типа Ляпунова до *производящих* функций $S(t, x, \psi)$, определенных на решениях канонической системы из принципа максимума Понтрягина. Это расширение может быть использовано как для развития канонического подхода, так и построения обобщенного лагранжиана задачи с последующим переходом к соответствующей задаче сравнения (аналога двойственной). Оперирование производящими функциями иллюстрировано на примере, а в главах 2, 3 применения таких функций детально изложены для дискретно-непрерывных и дискретных задач оптимизации.

Во **второй главе** канонические условия оптимальности с бипозиционными L -функциями обобщаются на задачи управления дискретно-непрерывными (гибридными) системами, а гибридный принцип максимума усиливается до достаточного условия оптимальности. Основной здесь является следующая задача оптимального управления (P_h) с общими ограничениями на концы траектории подсистем и целевым функционалом:

$$\dot{x}^\kappa(t) = f^\kappa(t, x^\kappa(t), u^\kappa(t)), \quad u^\kappa(t) \in U^\kappa, \quad (3)$$

$$t \in \Delta^\kappa = [a^\kappa, b^\kappa], \quad \kappa = 1, \dots, N,$$

$$q \in Q, \quad (4)$$

$$J = l(q) \rightarrow \min.$$

Здесь моменты времени $a^\kappa \leq b^\kappa$ не фиксированы, размерности x^κ , u^κ равны n^κ , m^κ соответственно, функции f^κ , l непрерывны, множества U^κ произвольны, Q замкнуто, $q = \{q^1, \dots, q^N\}$ — *концевой мультивектор*, составленный из концевых векторов подсистем $q^\kappa = (a^\kappa, x_a^\kappa, b^\kappa, x_b^\kappa)$, $x_a^\kappa = x^\kappa(a^\kappa)$, $x_b^\kappa = x^\kappa(b^\kappa)$.

Набор процессов подсистем

$$\sigma = \{\sigma^\kappa = (x^\kappa(t), u^\kappa(t) \mid t \in \Delta^\kappa), \kappa = 1, \dots, N\}$$

назван *мультипроцессом*, а набор функций $x(\cdot) = \{x^1(\cdot), \dots, x^N(\cdot)\}$ — *мультитраекторией*. Мультипроцесс σ *допустим* в задаче (P_h) , если для

него выполнено общее концевое ограничение (4). Фиксированный допустимый мультипроцесс $\bar{\sigma}$ исследуется как на глобальный, так и на сильный минимум.

Определение 3. Мультипроцесс $\bar{\sigma}$ доставляет сильный минимум в задаче (P_h) , если для каждого κ найдется такое открытое множество $G^\kappa \subset R \times R^{n^\kappa}$, содержащее график траектории $\bar{x}^\kappa(\cdot)$, что мультипроцесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P_h) , дополненной ограничениями

$$(t, x^\kappa(t)) \in G^\kappa \quad \forall t \in \Delta^\kappa, \quad \kappa = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Условия (5) задают сужение $(P_h(G))$ задачи (P_h) на множество $G := G^1 \times \dots \times G^N$. Мультитраектория $x(\cdot)$ допустимого мультипроцесса σ называется *допустимой* по множеству G , если выполнено условие (5).

Общее концевое ограничение (4), связывающее подсистемы из (3), формально выглядит статическим, но является очень емким и может отражать дискретную динамику гибридной системы. Например, в него вкладываются ограничения вида

$$x^{\kappa+1}(a^{\kappa+1}) \in F(a^\kappa, x^\kappa(a^\kappa), x^\kappa(b^\kappa)), \quad \kappa = 1, \dots, N,$$

представляющие собой дискретную систему, а также различные правила переключения подсистем. Поэтому ограничение (4) названо *дискретно-концевым*.

Через $\mathcal{R}^\kappa(G^\kappa)$ обозначается множество пар точек (a^κ, x_a^κ) , (b^κ, x_b^κ) из G^κ , соединимых траекториями κ -ой подсистемы из (3), допустимыми по G^κ . Положим $\mathcal{R}(G) = \prod \mathcal{R}^\kappa(G^\kappa)$ и назовем $\mathcal{R}(G)$ *множеством соединимых точек гибридной системы на G* .

Определение 4. Набор функций $V = \{V^1, \dots, V^N\}$ называется *составной бипозиционной сильно возрастающей L -функцией системы (3) на множестве G* , если для каждого $\kappa = 1, \dots, N$ $V^\kappa \in \mathcal{V}_{s\uparrow}^\kappa(G^\kappa)$. Множество всех таких наборов обозначается через $\mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G)$.

Аналогичным образом определено множество $\mathcal{V}_{w\uparrow}^{h-}(G)$ всех бипозиционных функций гибридной системы (3), слабо возрастающих в обратном времени на множестве G .

В §2.2 с помощью составных бипозиционных функций получены внешние и внутренние оценки множества соединимых точек гибридной системы и соответствующие условия оптимальности.

Для $\mathcal{V}_+ \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G)$ и $\mathcal{V}_- \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^{h-}(G)$ вводятся множества

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+(\mathcal{V}_+) &= \{q = \{q^1, \dots, q^N\} \in G \times G \mid \forall V \in \mathcal{V}_+ \quad V^\kappa(q^\kappa) \geq 0 \quad \forall \kappa\}, \\ \mathcal{E}_-(\mathcal{V}_-) &= \{q = \{q^1, \dots, q^N\} \in G \times G \mid \exists V \in \mathcal{V}_- : V^\kappa(q^\kappa) \geq 0 \quad \forall \kappa\}. \end{aligned}$$

Тогда справедливы оценочные включения

$$\mathcal{E}_-(\mathcal{V}_-) \subseteq \mathcal{R}(G) \subseteq \mathcal{E}_+(\mathcal{V}_+),$$

из которых вытекают условия оптимальности в задаче (P_h) .

Теорема 4. Пусть для мультипроцесса $\bar{\sigma}$ существует такое множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G)$, что мультивектор $\bar{q}$ глобально оптимален в задаче

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in \mathcal{E}_+(\mathcal{V}) \cap Q. \quad (B_+(\mathcal{V}))$$

Тогда $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный мультипроцесс в задаче $(P_h(G))$, достигающий сильный минимум в задаче (P_h) .

Теорема 5. Пусть мультипроцесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче $(P_h(G))$. Тогда для любого множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{w\uparrow}^{h-}(G)$

$$J[\bar{\sigma}] \leq \inf(B_-(\mathcal{V})),$$

где справа стоит значение задачи

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in \mathcal{E}_-(\mathcal{V}) \cap Q. \quad (B_-(\mathcal{V}))$$

Приведенные условия оптимальности для гибридных задач обладают аналогами свойств K -условий для стандартной задачи (P) , установленных в первой главе.

В §2.3 получено обращение принципа максимума Понтрягина в достаточное условие оптимальности, наиболее общее из известных для задач типа (P_h) .

Предполагается, что функции f^κ, l имеют непрерывные частные производные по q^κ, x^κ, t . Вводятся функции $H^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa, u^\kappa) = \psi_x^\kappa \cdot f^\kappa(t, x^\kappa, u^\kappa)$ и $\mathcal{H}^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa) = \max\{H^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa, u^\kappa) \mid u^\kappa \in U^\kappa\}$.

Процесс $\bar{\sigma}^\kappa$ называется *экстремалью κ -ой системы* на отрезке $\bar{\Delta}^\kappa$, если для него существует нетривиальная коэкстремаль $\psi^\kappa(t) = (\psi_x^\kappa(t), \psi_t^\kappa(t))$, $t \in \bar{\Delta}^\kappa$, т.е. решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}_x^\kappa = -H_x^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa, \bar{u}^\kappa(t)), \quad \dot{\psi}_t^\kappa = -H_t^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa, \bar{u}^\kappa(t)), \quad (6)$$

обеспечивающее выполнение условий максимума

$$\begin{aligned} H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)) + \psi_t^\kappa(t) &= 0 \quad \text{п.в. на } \bar{\Delta}^\kappa, \\ H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), u^\kappa) + \psi_t^\kappa(t) &\leq 0 \quad \text{на } \bar{\Delta}^\kappa \times U^\kappa. \end{aligned} \quad (7)$$

Тройка $\gamma^\kappa = (\psi^\kappa, \bar{\sigma}^\kappa)$ называется в этом случае *биэкстремалью κ -ой системы*, набор $\gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^N\}$ — *биэкстремалью гибридной системы*, а набор $\psi = \{\psi^1, \dots, \psi^N\}$ — *коэкстремалью мультипроцесса $\bar{\sigma}$* .

Пусть $G = G^1 \times \dots \times G^N$ — некоторое множество, где все $G^\kappa \subset R \times R^{n^\kappa}$ связны (но не обязательно открыты). Множество G названо *достаточным* (для $\bar{\sigma}$), если из условия, что $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный мультипроцесс в суженной задаче $(P_h(G))$, следует, что $\bar{\sigma}$ доставляет, по крайней мере, сильный минимум в задаче (P_h) . Биекстремаль $\gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^N\}$ называется *допускающей продолжение*, если найдется такое достаточное множество G , что каждую биекстремаль подсистемы γ^κ можно продолжить на промежуток времени $I^\kappa = \text{pr}_t G^\kappa$ так, чтобы выполнялись условия (6), (7) с заменой в них $\bar{\Delta}^\kappa$ на I^κ . Тогда соответствующая коэкстремаль ψ мультипроцесса $\bar{\sigma}$ также называется *продолженной*.

Пусть $\Psi(\bar{\sigma}, G) \neq \emptyset$ — множество продолженных коэкстремалей, соответствующих продолженной экстремали гибридной системы $\bar{\sigma}$, $(G^\kappa)^t$ — сечение множества G^κ при фиксированном t . Для $\bar{\sigma}$, $\psi \in \Psi(\bar{\sigma})$ и достаточного множества G определяются следующие *расширенные условия максимума*.

Условие $MH(\psi, G)$. $\forall \kappa = 1, \dots, N$ п. в. на I^κ

$$\begin{aligned} & H^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar{u}^\kappa(t)) + \dot{\psi}_x^\kappa(t) \cdot \bar{x}^\kappa(t) = \\ & = \max \left\{ H^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa(t), u^\kappa) + \dot{\psi}_x^\kappa(t) \cdot x^\kappa \mid x^\kappa \in (G^\kappa)^t, u^\kappa \in U^\kappa \right\}. \end{aligned}$$

Условие $M\mathcal{H}(\psi, G)$. $\forall \kappa = 1, \dots, N$ п. в. на I^κ

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}^\kappa(t, \bar{x}^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t)) + \dot{\psi}_x^\kappa(t) \cdot \bar{x}^\kappa(t) = \\ & = \max \left\{ \mathcal{H}^\kappa(t, x^\kappa, \psi_x^\kappa(t)) + \dot{\psi}_x^\kappa(t) \cdot x^\kappa \mid x^\kappa \in (G^\kappa)^t \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $\Psi_+(\bar{\sigma}, G)$ — множество всех коэкстремалей, обеспечивающих выполнение любого из условий $MH(\psi, G)$ или $M\mathcal{H}(\psi, G)$. Если это множество непусто, то любая $\psi \in \Psi_+(\bar{\sigma}, G)$ порождает составную функцию

$$V = V[\psi] = \{V^1(t, x^1; a^1, x_a^1), \dots, V^N(t, x^N; a^N, x_a^N)\} [\psi] \in \mathcal{V}_{s\uparrow}^h(G),$$

компоненты которой определены равенством

$$V^\kappa(t, x^\kappa; a^\kappa, x_a^\kappa) = \psi_x^\kappa(t) \cdot (\bar{x}^\kappa(t) - x^\kappa) - \psi_x^\kappa(a^\kappa) \cdot (\bar{x}^\kappa(a^\kappa) - x_a^\kappa), \kappa = 1, \dots, N.$$

Теорема 6. Пусть для мультипроцесса $\bar{\sigma}$ существует такое множество коэкстремалей $\Psi \subset \Psi_+(\bar{\sigma}, G)$, что мультивектор $\bar{q}$ глобально оптимален в задаче

$$\begin{aligned} & l(q) \rightarrow \min; \quad q \in Q, \\ & V^\kappa[\psi](q^\kappa) \geq 0 \quad \forall \psi \in \Psi, \quad (B_0(\Psi)) \\ & q^\kappa \in G^\kappa \times G^\kappa, \quad \kappa = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Тогда $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный мультипроцесс в задаче $(P_h(G))$, доставляющий сильный минимум в задаче (P_h) .

В §2.4 с помощью достаточных условий в форме принципа максимума исследована построенная автором макромодель двухэтапной оптимизации структуры основных фондов экономики в условиях смены технологии после переходного периода достижения заданного уровня развития. Показано, что любая экстремаль Понтрягина в этой модели является ее глобальным решением.

Параграф 2.5 посвящен анализу связи канонических достаточных условий оптимальности с гибридным принципом максимума Понтрягина. Показано, что градиенты разрешающих функций $V \in \mathcal{V}$, порождающих активные в точке $\bar{q}$ ограничения дискретно-концевой задачи $(B_+(\mathcal{V}))$, являются коэкстремальными.

В заключительном параграфе приведены возможные теоретические приложения полученных условий оптимальности к классическим задачам оптимального управления: а) с разрывными по времени правыми частями управляемых систем (сложными для вариационного анализа⁸); б) к исследованию экстремалей с разрывным управлением (иллюстрируется на модели гармонического осциллятора с ограничением на управление). Доказаны необходимые условия оптимальности для двухэтапной линейной по состоянию невыпуклой задачи оптимизации. Эти условия основаны на конструкции модифицированного лагранжиана с билинейными производящими функциями.

В **третьей главе** метод неравенств Гамильтона-Якоби и канонические условия оптимальности распространяются на задачи управления дискретными и некоторыми дискретно-импульсными системами. Помимо того, что результаты главы имеют самостоятельный интерес, они служат естественным дополнением к предыдущей главе, поскольку вспомогательные *дискретно-концевые* экстремальные задачи $(B_+(\mathcal{V}))$, $(B_-(\mathcal{V}))$, $(B_0(\Psi))$ в условиях оптимальности гибридных систем могут относиться к исследуемым здесь классам задач.

Рассматривается дискретная управляемая динамическая система

$$x(\kappa + 1) = f(\kappa, x(\kappa), u(\kappa)), \quad u(\kappa) \in U_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \quad (8)$$

где N — заданное натуральное число, функция f конечна на $Z_{N-1} \times R^n \times R^m$, $Z_\kappa := \{0, 1, \dots, \kappa\}$, множества $U_\kappa \subset R^m$ непусты.

Траектории и управления системы (8) — это любые конечные последовательности $\chi = \{x(\kappa)\}_{\kappa=0}^N$ и $v = \{u(\kappa)\}_{\kappa=0}^{N-1}$, удовлетворяющие системе

⁸Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Изд-во «Факториал», 1997. 256 с.

(8). Пары $\sigma = (\chi, v)$ образуют *процессы* системы (8). Через $\chi|_s$ ($s \in Z_N$) обозначаются подпоследовательности χ — *отрезки* траекторий, а через $\mathcal{T}_s(\xi)$ — множество отрезков с начальным условием $x(s) = \xi$.

Для системы (8) естественным образом вводятся сильно и слабо монотонные L -функции $\varphi(\kappa, x)$, критериями для которых являются дискретные аналоги неравенств Гамильтона-Якоби. Например, функция $\varphi(\kappa, x) : Z_N \times R^n \rightarrow R$ *сильно возрастает* относительно системы (8), если

$$(\forall (s, \xi) \in Z_{N-1} \times R^n) (\forall \chi|_s \in \mathcal{T}_s(\xi)) : \\ \varphi(\kappa + 1, x(\kappa + 1)) \geq \varphi(\kappa, x(\kappa)), \quad \kappa = \overline{s, N-1}.$$

Множество всех сильно возрастающих функций обозначается через $L_{s\uparrow}^d$.

В §3.2 с применением функций из $L_{s\uparrow}^d$ получены внешние оценки множества соединимых точек системы (8) и достаточные условия оптимальности в задаче (P_d) оптимального управления системой (8) с конечным ограничением на траекторию

$$q := (x(0), x(N)) \in Q$$

и целевой функцией

$$J[\sigma] = l(q) \rightarrow \min.$$

Здесь множество $Q \subset R^{2n}$ замкнуто, а функция $l : R^{2n} \rightarrow R$ непрерывна.

Теорема 7. Пусть для допустимого процесса $\bar{\sigma}$ найдется такое множество $\Phi \subset L_{s\uparrow}^d$, что вектор $\bar{q}$ глобально оптимален в задаче

$$l(x_0, x_N) \rightarrow \inf; \quad \varphi(N, x_N) - \varphi(0, x_0) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad (x_0, x_N) \in Q.$$

Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P_d) .

В §3.3 показано, что разрешающее множество Φ для этих условий обладает свойствами, аналогичными установленным в главе 1.

Параграф 3.4 посвящен доказательству достаточных условий оптимальности в форме дискретного принципа максимума без предположений выпуклости задачи (P_d) и локальной выпуклости вектограммы системы (8).

В §3.5 описываются приложения слабо монотонных L -функций. Доказано новое необходимое условие оптимальности — принцип минимума с контрстратегиями — для задач дискретного оптимального управления со свободным правым концом. Этот критерий формулируется в терминах множеств слабо монотонных функций и экстремальных к ним позиционных управлений. В теоретическом плане он смыкается с достаточными условиями оптимальности. Здесь же установлена нестандартная двой-

ственность для задач оптимизации линейных систем с управляемыми коэффициентами. Эта двойственность основана на использовании модифицированного лагранжиана с билинейными производящими функциями и приводит к необходимым и достаточным условиям оптимальности, допускающим естественную численную алгоритмизацию⁹.

В последнем параграфе главы рассмотрена задача дискретно-импульсного оптимального управления в нелинейной системе «с толчками» в априорно не фиксированные моменты времени. При выполнении так называемого условия согласования применение к этой задаче канонической теории естественным образом приводит к дискретному аналогу нелинейного преобразования Гоха², существенно упрощающему задачу. Это преобразование иллюстрировано на многомерной дискретной динамической модели оптимального распределения ресурсов, которая преобразуется к «почти статической» задаче оптимального управления.

РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Доказаны достаточные условия сильного и глобального экстремума с бипозиционными решениями неравенств Гамильтона-Якоби для классических, дискретных и дискретно-непрерывных задач оптимального управления с общими концевыми ограничениями и целевыми функциями.
2. Получены достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для невыпуклых задач оптимального управления дискретными и дискретно-непрерывными системами.
3. Доказаны необходимые условия глобальной оптимальности с бипозиционными и производящими функциями для классических, дискретных и дискретно-непрерывных задач оптимального управления.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Дыхта В.А., Сорокин С.П. Неравенства Гамильтона-Якоби и условия оптимальности в задачах управления с общими концевыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 13–27.
2. Дыхта В.А., Сорокин С.П. Позиционные решения неравенств Гамильтона-Якоби в задачах управления дискретно-непрерывными системами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 48–63.

⁹Эти результаты являются дискретными аналогами принципа минимума с контрстратегиями и нестандартной двойственностью, установленными научным руководителем для непрерывных задач.

3. Сорокин С.П. Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задач управления гибридными системами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 102–113.
4. Сорокин С.П. Монотонные функции типа Ляпунова и условия глобальной оптимальности для задач управления дискретными системами // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 3. С. 132–145.
5. Дыхта В.А., Сорокин С.П., Яковенко Г.Н. Управляемые системы: условия экстремальности, оптимальности и идентификация алгебраической структуры // Труды МФТИ. 2011. Т. 3, № 3. С. 122–131.
6. Дыхта В.А., Сорокин С.П. О реализации нестандартной двойственности в задачах оптимального управления // Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2011. Т. 16, № 4. С. 1071–1073.
7. Сорокин, С.П. Достаточность гибридного принципа максимума // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2009. Т. 2, № 2. С. 37–40.
8. Сорокин С.П. Монотонные решения неравенств Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении // Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2009. Т. 14, № 4. С. 800–802.
9. Сорокин С.П. Достаточные условия оптимальности для задач оптимального управления дискретно-непрерывными системами // Применение математических методов и информационных технологий в экономике: сб. науч. тр. Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2009. Вып. 8. С. 43–50.
10. Сорокин С.П. Слабо монотонные L -функции и улучшение управления в задачах оптимизации дискретных динамических систем // Труды XV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 3: Оптимальное управление. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. С. 121–126.
11. Дыхта В.А., Сорокин С.П. Каноническая теория Гамильтона-Якоби в задачах с общими концевыми и многоточечными ограничениями на траектории // Proc. V Int. Symposium «Generalized Statements and Solutions of Control Problems-2010». Ulaanbaatar, Mongolia: MUST, 2010. С. 94–98.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
E-mail: rio@icc.ru

Подписано к печати 09.04.2012 г.
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Заказ 5. Тираж 130 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН