

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»
Министерство образования и науки Российской Федерации

УДК 517.988

На правах рукописи

Леонтьев Роман Юрьевич

О РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ
УРАВНЕНИЙ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОКРЕСТНОСТЯХ
НЕРЕГУЛЯРНОГО ЗНАЧЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Н.А. Сидоров

ИРКУТСК — 2012

Оглавление

Введение	3
1 Минимальные ветви решений нелинейных операторных уравнений в секториальных окрестностях нерегулярных значений векторного параметра	16
1.1 Построение ветвей решений в случае существования производной Фреше нелинейного оператора	16
1.2 Построение ветвей решений при выполнении условий типа Липшица	44
1.3 Усиление результатов параграфов 1 и 2 с помощью замены общего вида	74
2 Минимальные ветви решений нелинейных уравнений в случае фредгольмова оператора	84
3 Построение малых решений различных порядков малости нелинейных уравнений в секториальных окрестностях векторного параметра	106
3.1 Униформизация ветвей и последовательные приближения	107
3.2 Построение решений краевой задачи об изгибе стержня в нерегулярном случае	110
Заключение	113
Список литературы	114

Введение

Нелинейные уравнения представляют большой интерес в силу многочисленных приложений в современной физике и технике. Поэтому важность исследования таких уравнений не вызывает никаких сомнений.

Первая серьезная работа по нелинейным интегральным уравнениям принадлежит А.М. Ляпунову [83], которая была посвящена изучению фигур равновесия вращающейся жидкости. В несколько более общей форме результаты А.М. Ляпунова были получены Э. Шмидтом [87].

В первой половине XX века различные методы исследования нелинейных уравнений развивались в работах П.С. Урысона [74], Гаммерштейна [78], Иглиша [79], Н.Н. Назарова [49], А.И. Некрасова [50] и других.

К концу 50-х годов М.А. Красносельским [17] и другими начинается интенсивное развитие топологических и вариационных методов в теории ветвления, позволяющих доказывать теоремы существования в ряде прикладных задач.

Состояние теории ветвления решений нелинейных уравнений к концу 60-ых годов отражено в монографии М.М. Вайнберга, В.А. Треногина [7]. В этой книге подробно освещены вопросы, касающиеся диаграмм Ньютона, одномерного и многомерного случаев ветвления, уравнений разветвления Ляпунова-Шмидта, фредгольмовых и нётеровых операторов, жордановых цепочек, рассмотрены многочисленные примеры, в том числе прикладного характера. Эта монография переведена на основные европейские языки и считается фундаментальным трудом в области ветвления решений нелинейных уравнений. Дальнейшие исследования проводились на основании сочетания аналитических, вариационных, теоретико-групповых методов многими современными учеными. Из приближенных методов в теории ветвления решений нелиней-

ных уравнений с параметрами выделяют для типа – это асимптотические методы и итерационные методы.

В развитие современных асимптотических методов в многомерном случае принципиальное продвижение внесли работы В.А. Треногина [7, 51], методы группового анализа (работы Б.В. Логинова и В.А. Треногина [44, 51]), методы степенной геометрии (А.Д. Брюно [6]) и других. При асимптотическом анализе задач теории ветвления решения ищутся в виде разложения Ньютона-Пьюизо, т.е. по дробным степеням числового параметра. Асимптотические методы развивались в теоретических и прикладных работах [5, 8] и многих других (см. например, библиографии в [6, 7, 44, 51, 84]). Асимптотическими методами были решены сложнейшие задачи в математической физике и иных областях современной и прикладной математики (работы В.И. Юдовича [76], М.М. Вайнберга и В.А. Треногина [7, стр. 490-517], А.А. Белолипецкого и А.М. Тер-Крикорова [4], [51, стр. 145-196], Б.В. Логинова [45], Д. Сэтинджер [86], Н.И. Макаренко [47] и др.)

Методы теории ветвления нашли применение и при решении дифференциально-операторных уравнений с необратимым оператором в главной части [90], в бифуркационном анализе системы Власова-Максвелла [84] и других областях науки и техники.

Появление итерационных методов дало новый толчок в развитии приближенных методов в теории ветвления. В этом направлении были рассмотрены вопросы униформизации решений [70], в том числе явная и неявная параметризация [48, 56, 69, 71] в условиях групповой симметрии [43] уравнений, сплетаемые уравнения разветвления [1, 55], предложен N-ступенчатый итерационный метод [67] поиска ветвящихся решений нелинейных уравнений. Некоторые результаты в теории итерационных методов, в том числе и построение разветвляющихся решений операторных уравнений, полученные к середине 80-х годов, отражены в монографии Н.А. Сидорова [68]. Итерационные методы при решении конкретных задач использовали и другие авторы [80, 82, 85, 91]. Важным вопросом при исследовании уравнений итерацион-

ными методами является выбор начального приближения, который зачастую становится отдельной задачей и существенно усложняет метод.

Некоторые последние результаты теории ветвления отражены в монографиях [51] и [84]. С другими методами исследования нелинейных задач можно познакомиться в работах [2, 3, 12, 53, 77].

В статьях А.В. Арутюнова [2, 3] изучаются неявно заданные гладкие нелинейные отображения в окрестности аномальной (вырожденной) точки. Теоремы о неявной функции, полученные для аномальной точки, в нормальной точке превращаются в классические теоремы. Доказательство основано на изучении строящегося семейства экстремальных задач с ограничениями, к которым применяются необходимые условия экстремума второго порядка.

В 2004 году в работе Н.А. Сидорова [66] была поставлена задача поиска решения, являющегося минимальной ветвью, и был предложен способ поиска искомого решения методом последовательных приближений, сходящимся при любом достаточно малом начальном приближении, в том числе при нулевом начальном приближении. Оператор в главной части уравнения полагался фредгольмовым, малый параметр λ – элементом линейного нормированного пространства.

Целью данной работы является выявление классов нелинейных интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и краевых задач, для которых в результате замены переменных и эквивалентных преобразований в достаточно малой секториальной окрестности нерегулярного значения векторного параметра применим принцип сжимающих отображений, и, как следствие, существует возможность поиска решения методом последовательных приближений.

Отметим, что результаты, полученные в рамках текущего диссертационного сочинения, были применены при изучении решений конкретных прикладных задач. Например, в статьях [54, 57, 61] и в данной работе рассмотрены следующие краевые задачи, исследование которых проводилось с использованием теорем, доказанных в диссертации: задача об изгибе стержня (Н.А. Сидоров, Р.Ю. Леонтьев), задача о колебании спутника (Д.Н. Сидоров), задача

погранслоя в моделировании производства синтетических волокон (А.И. Дрегла).

Например, при исследовании краевой задачи

$$(1 + e \cos x) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2e \sin x \frac{du}{dx} + \alpha \sin u - 4e \sin x = 0,$$

$$u(0) = u(\pi) = 0,$$

описывающей колебания спутника в плоскости его эллиптической орбиты, были применены известные результаты из области функционального анализа, операторных уравнений и некоторые результаты текущей диссертации. В результате были выписаны асимптотики малых вещественных решений и предложена формула для поиска минимальной ветви методом последовательных приближений.

Краевые задачи, возникающие в некоторых моделях производства полимеров, имеют вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, \lambda),$$

где λ — малый положительный параметр, $0 < x < \infty$, $f(u, \lambda)$ — непрерывная функция в области $\Omega = \{|u| < r, 0 < \lambda < \rho\}$. Задача сводится к уравнению в операторном виде

$$F(u, \lambda) = 0,$$

и с применением теоремы 1.2.1 доказывается существование минимальной ветви $u(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +0$ на сколь угодно большом интервале $[0, \frac{1}{\lambda}]$, удовлетворяющей краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\frac{1}{\lambda}} = 0.$$

Приводятся формулы для построения решения методом последовательных приближений.

В главе 3 диссертации рассмотрена краевая задача об изгибе стержня под действием сжимающей силы в нерегулярном случае:

$$y^{(4)}(x) + 2py^{(2)}(x) + y = f(y, \beta), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

$$y^{(2)}(0) = 0, \quad y^{(2)}(\pi) = 0,$$

где $f(y, \beta)$ – нелинейная функция, зависящая от малого параметра β , $y(x)$ описывает малый прогиб стержня. Задача рассмотрена в окрестности критической точки $p^* = 1 - \lambda$ при малых значениях параметра λ . После преобразований приходим к уравнению в операторной форме:

$$A(1)y = F(y, \lambda, \beta),$$

и на основании полученных в третьей главе результатов выписываются малые решения этого уравнения.

Наиболее общие теоремы существования в современной теории дифференциальных уравнений и математической физики получены с точки зрения операторных уравнений в банаховых пространствах. В целях общности и универсальности целесообразно развивать теорию разрешимости дифференциальных, интегральных уравнений, краевых задач в операторном виде.

Область исследования соответствует пункту 8 «теория дифференциально-операторных уравнений» в соответствии с паспортом специальности 01.01.02.

В работе широко используется принцип сжимающих отображений для доказательства существования решения (минимальной ветви), гарантирующий, в частности, сходимость метода последовательных приближений при любом достаточно малом начальном приближении. В первой главе в доказательствах применяются теорема Банаха-Штейнгауза и формула конечных приращений Лагранжа. Во второй и третьей главах применяются известные результаты теории обобщенных жордановых цепочек и фредгольмовых операторов.

В диссертации получены результаты, которые расширяют рамки применимости аналитических методов современного анализа к исследованию нелинейных операторных уравнений с параметрами за счет расширения возможных пространств, в которых рассматривается малый параметр (который может быть и многомерным), и за счет расширения круга разрешимых задач в силу снятия на операторы рассматриваемых уравнений определенных ограничений (например, требования, чтобы оператор в главной части был фредгольмовым). Итерационные методы, приводимые в работе, не требуют особых условий для выбора начального приближения и работают одинаково эффек-

тивно при любом достаточно малом начальном приближении, в том числе при нулевом начальном приближении. Заданные в работе оценки позволяют применять полученные результаты для широкого класса нелинейных уравнений, оператор в главной части которых не ограничивается случаями с фредгольмовым или нётеровым оператором. В том числе теоремы могут применяться для уравнений фредгольма 1 рода.

Полученные результаты могут быть использованы при решении прикладных задач, и в работе рассмотрены прикладные задачи. Также в работе выделены конкретные классы интегральных уравнений и краевых задач, для которых доказанные теоремы могут быть особенно полезны. Некоторые части работы включены в спецкурсы для студентов-математиков ИМЭИ ИГУ и использовались студентами кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ИГУ при написании курсовых и дипломных работ.

В первой главе рассмотрено нелинейное операторное уравнение вида

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (0.0.1)$$

где $F : X \times \Lambda \rightarrow Y$ и $F(0, 0) = 0$. X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Нелинейный оператор $F(x, \lambda)$ является непрерывным по x и λ в окрестности нуля и имеет производную Фреше по первому аргументу, непрерывную по x и λ в окрестности нуля.

Введено понятие *секториальной окрестности нуля*, как открытого множества $S \subset \Lambda$, такого что $0 \in \partial S$, где ∂S – граница множества S .

Оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет в секториальной окрестности нуля S ограниченный обратный оператор, для которого имеет место оценка:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ для } \forall \lambda \in S, \quad (0.0.2)$$

где непрерывный положительный функционал $a(\lambda)$, определенный в области S , удовлетворяет условию $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$, т.е. $a(0) = 0$.

Из оценки (0.0.2) следует, что оператор $F_x(0, 0)$ не имеет ограниченного обратного, т.е. точка $\lambda = 0$ является нерегулярным значением векторного параметра λ , и уравнение не удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции [14].

Условие (0.0.2) является важным для данного исследования и используется на протяжении всей работы. С одной стороны, это условие, выполняющееся для широкого класса задач, в силу равенства $a(0) = 0$, гарантирует нерегулярность рассматриваемого случая. С другой стороны, оно позволяет производить оценки при доказательствах теорем существования и других результатов, связанных с построением решений.

Для обоснованности выбора условия вида (0.0.2), в параграфе 1 главы 1 приведено три широких класса операторов, наиболее часто встречающихся в приложениях, для которых данная оценка имеет место:

1. Пусть $X = Y = H$ – гильбертово пространство, B_0 – самосопряженный неотрицательный оператор, B_1 – самосопряженный положительный оператор, то есть $\forall x \in H$

$$(B_0x, x) \geq 0, \quad (B_1x, x) \geq \gamma(x, x), \quad \gamma \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{\gamma a(\lambda)}\right),$$

где $0 < a(\lambda) < \varepsilon$.

2. Если элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $k = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, n}$ образуют полный B_1 – жорданов набор фредгольмова оператора B_0 и $p = \max_{i=\overline{1, n}} p_i$, тогда в некоторой области $0 < |a(\lambda)| < \varepsilon$ существует ограниченный обратный оператор $(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}$, и выполнена оценка

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{|a(\lambda)|^p}\right).$$

3. Пусть нильпотентный оператор B удовлетворяет условию $B^n = 0$, а оператор C имеет ограниченный обратный оператор, перестановочный с оператором B , $0 < |a(\lambda)| < \varepsilon$. Тогда оператор $a(\lambda)C - B$ имеет ограниченный обратный оператор, для которого выполнена оценка

$$\|(a(\lambda)C - B)^{-1}\| = O\left(\left(\frac{1}{|a(\lambda)|}\right)^n\right).$$

Вводится область

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\},$$

где $r > 0$.

Дается определение минимальной непрерывной ветви, изучению вопросов существования и построения которой посвящена данная работа.

Определение. Если найдутся числа $r_0 \in (0, r]$ и $\varepsilon > 0$ такие, что из всех малых решений уравнения (0.0.1), определенных в области Ω , только одно решение $x^*(\lambda)$ попадает в область

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S, 0 < \|\lambda\| < \varepsilon\},$$

то решение $x^*(\lambda)$ будем называть минимальным решением уравнения (0.0.1) в области S , непрерывным в точке $\lambda = 0$ (далее кратко «минимальной непрерывной ветвью»).

Доказываются конструктивные теоремы, гарантирующие существование минимальной ветви малого решения при значениях параметра $S \ni \lambda \rightarrow 0$ и позволяющие строить её. Один из основных результатов параграфа 1 главы 1 заключается в том, что при условии выполнения в области Ω для оператора F оценок $\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L\|x\|$ и $\|F(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$, где константа $L > 0$, $a(\lambda)$ – функционал из (0.0.2), доказано существование минимальной непрерывной ветви уравнения (0.0.1) в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ для любого $\lambda \in S_0$, где константа r_0 из полуинтервала $(0, r]$, а S_0 – секториальная окрестность нуля, $S_0 \subseteq S$. Приведена формула для построения решения методом последовательных приближений, сходящимся при нулевом начальном приближении.

Следует отметить, что уравнение (0.0.1) может иметь и другие малые решения при $\lambda \in S$, но в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ при $\lambda \in S_0$ решение единственно. Остальные малые решения уравнения (0.0.1), определенные при $\lambda \in S$, будут находиться в области $\|x\| > a(\lambda)r_0$.

В параграфе 2 главы 1 предполагается, что $F(x, \lambda) = B(\lambda)x + R(x, \lambda)$, причем оператор $F(x, \lambda)$ не имеет производной Фреше по первому аргументу. Линейный замкнутый оператор $B(\lambda)$ действует из X в Y . Нелинейный

оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ – непрерывен в области Ω . Здесь доказаны аналоги теорем, приведенных в предыдущем параграфе для случая, когда производная Фреше существует. Вместо (0.0.2) используется подобная оценка:

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ для } \forall \lambda \in S, \quad (0.0.3)$$

где положительный непрерывный функционал $a(\lambda)$ удовлетворяет условию $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$, т.е. $a(0) = 0$. В силу того, что указанная оценка имеет место, рассматриваемый в этом параграфе случай не является регулярным.

В параграфе 3 главы 1 для уравнения

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (0.0.4)$$

где функция $b(\lambda)$ не зависит от x , а линейный замкнутый оператор $B(\lambda)$ удовлетворяет условию (0.0.3), доказаны еще несколько конструктивных теорем, существенно усиливающих результаты работы Н.А. Сидорова [66], дополняющих и развивающих теорию простых решений М.А. Красносельского, А.Е. Гельмана и П.П. Забрейко [10, 16]. Здесь мы применили замену более общего вида, а именно, вместо замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, применявшейся прежде, мы использовали замену вида $x(\lambda) = \nu(\lambda)V(\lambda)$, где функционал $\nu(\lambda)$, изначально являющийся произвольным, определяется в процессе доказательства, что позволяет более гибко производить оценки.

Результаты главы 1 опубликованы в работах [21, 24–26, 28, 30, 31, 33, 38, 39, 57, 58, 60].

В главе 2 продолжается исследование уравнения вида

$$B(\lambda) = R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (0.0.5)$$

где замкнутый линейный оператор $B(\lambda)$ с плотной в банаховом пространстве X областью определения, не зависящей от параметра $\lambda \in \Lambda$, предполагается фредгольмовым в точке $\lambda = 0$; Λ – линейное нормированное пространство, $S \subset \Lambda$ – секториальная окрестность нуля; $\{\varphi_i\}_1^n$ – базис в подпространстве нулей $N(B(0))$, $\{\psi_i\}_1^n$ – базис в дефектном подпространстве $N^*(B(0))$. Оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, для которого выполнена оценка (0.0.3). Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ непрерывен по x

и λ в окрестности нуля, $R(0, 0) = 0$. Функция $b(\lambda) : \Lambda \rightarrow Y$ определена и непрерывна в окрестности точки $\lambda = 0$, $b(0) = 0$.

Приводятся леммы, дающие достаточные условия выполнения оценки (0.0.3). Для оператора вида $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$ при условии существования полного B_1 – жорданова набора фредгольмова оператора B_0 доказана теорема о существовании минимальной ветви. Приведены формулы, позволяющие строить минимальную ветвь методом последовательных приближений.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [57, 58].

В третьей главе рассматривается нелинейное уравнение

$$Bu = F(u, \alpha(\lambda), \beta(\lambda)),$$

где $F(u, \alpha, \beta) = F_N(u, \alpha, \beta) + R(u, \alpha, \beta)$, $F_N = \sum_{i+k+j=1}^N F_{ikj}(u)\alpha^k\beta^j$, $F_{100} = 0$. Замкнутый фредгольмов оператор B действует из X в Y и имеет плотную область определения в X . Предполагается, что $\{\varphi_i\}_1^n$ – базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_1^n$ – базис в дефектном подпространстве $N^*(B)$, F_{ikj} – i – степенные операторы [7, стр. 345]. Оператор R непрерывен, дифференцируем по u в смысле Фреше и удовлетворяет оценке $R(u, \alpha, \beta) = O((\|u\| + |\alpha| + |\beta|)^{N+1})$, $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ – непрерывные функционалы, определенные на открытом множестве $\Omega \subset \Lambda$, $0 \in \partial\Omega$, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. Область Ω является секториальной окрестностью нуля.

Целью третьей главы является построение асимптотических последовательных приближений непрерывных решений $u(\lambda) \rightarrow 0$ при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$, позволяющих строить решения нелинейных интегральных уравнений и краевых задач с несколькими параметрами.

Случай векторного параметра, часто встречающийся в приложениях, изучен недостаточно. Особый интерес при этом представляет разработка схем униформизации ветвей решений и последовательные приближения. Ранее в диссертации в секториальных окрестностях нуля последовательными приближениями строились минимальные ветви малого решения. В третьей главе предложен метод последовательных приближений, позволяющий в секториальных окрестностях строить решения с различными порядками малости

уравнений с векторным параметром. В основе метода лежат результаты аналитической теории решений нелинейных уравнений [73, гл. 9] и результаты работы [62].

Затем найдены малые решения краевой задачи об изгибе стержня под действием сжимающей силы в нерегулярном случае с помощью полученной в главе теоремы.

Результаты главы 3 опубликованы в работах [20, 54, 61].

Исследования по теме диссертации проводились в рамках следующих программ:

- тема НИР задания Федерального агентства по образованию (проект 091-08-102/1.2.08).

- федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы. Госконтракт по ФЦП «Кадры» П 696 от 20 мая 2010 года.

- индивидуальный исследовательский грант Иркутского государственного университета 111-09-001/A2.

Результаты диссертации были представлены на следующих научных конференциях, из которых 6 международных и 2 всероссийских: III Международная научно-техническая конференция «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем» (г. Пенза, Пензенский госуниверситет, 2008) [21]; XIV Байкальская Международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» (г. Иркутск, Байкал, 2008) [60]; Международная научно-образовательная конференция «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования» (г. Москва, РУДН, 2009) [30]; II Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2010) [27]; XV Байкальская Международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутская область, п. Листвянка, 2011) [26]; III Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2012) [32]; Всероссийская конференция «Математическое моделирование и вычислительно-

информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2009); Седьмая Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, СамГТУ, 2010) [24]; Школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2008) [59]; III Межвузовская зональная конференция, посвященная памяти профессора Б.А. Бельтюкова «Математика и проблемы ее преподавания в вузе» (г. Иркутск, Иркутский педуниверситет, 2007) [37]; региональная научно-практическая конференция «Интеллектуальные и материальные ресурсы Сибири» (г. Иркутск, БГУЭП, 2008) [40]; ежегодные научно-теоретические конференции студентов и аспирантов ИГУ (г. Иркутск, 2007, 2008, 2009, 2010) [34, 35, 42]; ежегодные конференции ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения & презентация информационных технологий» (г. Иркутск, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011) [22, 23, 29, 36, 41], а также на семинарах, проводимых на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений под руководством Н.А. Сидорова.

По теме диссертации опубликовано 29 работ — [20–42, 54, 57–61]. Наиболее значимые результаты представлены в работах [20, 21, 24–26, 28, 31, 33, 38, 39, 54, 57, 58, 60, 61], 6 из которых [20, 31, 54, 57, 58, 61] входят в список журналов, рекомендованных ВАК для опубликования основных результатов кандидатских и докторских диссертаций по математике. Три работы изданы в англоязычных версиях соответствующих журналов, в том числе [88, 89].

В работах [20, 54, 57, 58, 60, 61] Н.А. Сидорову принадлежат постановки исследуемых задач. В работах [54, 61] Д.Н. Сидорову принадлежат построения решений интегрального уравнения и краевой задачи о колебании спутника. В работе [57] А.И. Дрегля принадлежат доказательство существования решения краевой задачи моделирования полимеров и вывод формулы для поиска решения этой задачи методом последовательных приближений.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Библиографический список содержит 91 наименование.

Автор выражает глубокую признательность профессору Сидорову Н.А. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Минимальные ветви решений нелинейных операторных уравнений в секториальных окрестностях нерегулярных значений векторного параметра

1.1 Построение ветвей решений в случае существования производной Фреше нелинейного оператора

Пусть X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (1.1.1)$$

где $F : X \times \Lambda \rightarrow Y$.

Оператор F является непрерывным в окрестности нуля по x и λ , $F(0, 0) = 0$, и возникает вопрос о существовании малых непрерывных решений таких, что $x(0) = 0$, и способах их построения.

Далее введем определение секториальной окрестности нуля, которая имеет важное место в нашем исследовании:

Определение 1.1.1. Секториальной окрестностью точки $0 \in \Lambda$ будем называть открытое множество $S \subset \Lambda$, такое что $0 \in \partial S$, где ∂S – граница множества S .

Примерами секториальной окрестности нуля при $\Lambda = \mathbb{R}$ служат проколота окрестность нуля, а также левая или правая полуокрестность нуля. Если

$\Lambda = \mathbb{R}^2$, то секториальной окрестностью нуля будет, например, открытый сектор, границе которого принадлежит точка $\lambda = 0$.

Пусть оператор $F(x, \lambda)$ имеет производную Фреше по первому аргументу, непрерывную по x и λ в окрестности нуля, и пусть выполнена оценка:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ для } \forall \lambda \in S, \quad (1.1.2)$$

где непрерывный функционал $a(\lambda) : S \rightarrow \mathbb{R}_+$; $a(0) = 0$ (т.е. $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$); S – секториальная окрестность нуля.

Требуется для уравнения (1.1.1), где оператор F удовлетворяет вышеперечисленным условиям, в том числе условию (1.1.2), привести достаточные условия существования в секториальной окрестности нуля S малого решения $x(\lambda)$ и предложить способ построения этого решения.

Оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет ограниченный обратный в области S , но оператор $F_x(0, 0)$ не является непрерывно обратимым, в силу равенства $a(0) = 0$. Поэтому стандартная теорема о неявном операторе в данном случае не применима. В работе Н.А. Сидорова [66] были выделены классы уравнений, когда при выполнении оценки вида (1.1.2) уравнение (1.1.1) приводится к эквивалентному уравнению, имеющему единственное малое решение, существование которого можно доказать, используя принцип сжимающих отображений, и построить асимптотику решения с помощью метода последовательных приближений. Именно изучению подобных классов уравнений при выполнении оценки (1.1.2) и посвящена данная работа.

Обратим внимание, в первой главе мы не предполагаем, что оператор $F_x(0, 0)$ фредгольмов или имеет замкнутую область значений. В частности, не исключается и особый случай, когда $F_x(0, 0)$ – нулевой оператор. Параметр λ является элементом произвольного линейного нормированного пространства.

Оценки вида (1.1.2) фактически играли определяющую роль в работах по теории ветвления решений. На этой основе в работах А.Е. Гельмана, М.А. Красносельского и П.П. Забрейко было введено и изучено понятие простого решения [10, 16].

В монографии Н.А. Сидорова [68] была установлена связь оценок такого рода с жордановой структурой производной Фреше $F_x(0, \lambda)$. Там же предложен метод регуляризации вычисления простых решений путем определенного сдвига по параметру λ , согласованным с погрешностью вычислений.

Далее приводится ряд достаточных условий, выделяющих обширные классы нелинейных уравнений, для которых выполнена оценка вида (1.1.2).

Достаточные условия для выполнения оценки (1.1.2).

Лемма 1.1.1. Пусть $X = Y = H$ – гильбертово пространство, B_0 – самосопряженный неотрицательный оператор, B_1 – самосопряженный положительный оператор, то есть $\forall x \in H$

$$(B_0 x, x) \geq 0, \quad (B_1 x, x) \geq \gamma(x, x), \quad \gamma \in \mathbb{R}_+,$$

см. [68, стр. 40]. Тогда

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{\gamma a(\lambda)}\right),$$

где $0 < a(\lambda) < \varepsilon$.

Справедливость леммы 1.1.1 для компактных операторов следует из теоремы Гильберта-Шмидта о разложении по собственным векторам [73, стр.245], а в общем случае из теории линейных операторов [46].

Леммы 1.1.2 и 1.1.3 справедливы в банаховых пространствах и опираются на информацию о жордановой структуре и условие нильпотентности. Справедливость леммы 1.1.2 следует из леммы 2.0.2. В случае вещественного параметра похожие результаты получены в [7, стр.436].

Лемма 1.1.2. Если элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $k = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, n}$ образуют полный B_1 – жорданов набор фредгольмова оператора B_0 , и $p = \max_{i=\overline{1, n}} p_i$, тогда в некоторой области $0 < |a(\lambda)| < \varepsilon$ существует ограниченный обратный оператор $(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}$, и выполнена оценка

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{|a(\lambda)|^p}\right).$$

Лемма 1.1.3. Пусть нильпотентный оператор B удовлетворяет условию $B^n = 0$, а оператор C имеет ограниченный обратный оператор, перестановочный с оператором B , $0 < |a(\lambda)| < \varepsilon$. Тогда оператор $a(\lambda)C - B$ имеет ограниченный обратный оператор, для которого выполнена оценка

$$\|(a(\lambda)C - B)^{-1}\| = O\left(\left(\frac{1}{|a(\lambda)|}\right)^n\right).$$

Доказательство. Действительно, убедиться в этом можно, рассмотрев уравнение вида

$$(a(\lambda)C - B)x = f$$

или эквивалентное ему уравнение при $\lambda \in S$

$$x = a^{-1}(\lambda)C^{-1}Bx + a^{-1}(\lambda)C^{-1}f.$$

Далее, формально применяя метод последовательных приближений по формуле

$$x_n = a^{-1}(\lambda)C^{-1}Bx_{n-1} + a^{-1}(\lambda)C^{-1}f, \quad x_0 = 0,$$

на n -ном шаге получим

$$\begin{aligned} x_n = & a^{-n}(\lambda)C^{-n}B^{n-1}f + a^{-n+1}(\lambda)C^{-n+1}B^{n-2}f + \dots + \\ & + a^{-2}(\lambda)C^{-2}Bf + a^{-1}(\lambda)C^{-1}f, \end{aligned}$$

которое и будет искомым решением, убедиться в чем можно подстановкой данного выражения в изначальное уравнение. $\square$

Пусть r – положительное число и S – секториальная окрестность нуля. Введем множество:

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}.$$

Следующее определение дает понятие минимальной непрерывной ветви, изучению вопросов существования и построения которой для уравнений вида (1.1.1) и посвящена данная работа.

Определение 1.1.2. Если найдутся числа $r_0 \in (0, r]$ и $\varepsilon > 0$ такие, что из всех малых решений уравнения (1.1.1), определенных в области Ω , только

одно решение $x^*(\lambda)$ попадает в область

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S, 0 < \|\lambda\| < \varepsilon\},$$

то решение $x^*(\lambda)$ будем называть минимальным решением уравнения (1.1.1) в области S , непрерывным в точке $\lambda = 0$ (далее кратко «минимальной непрерывной ветвью»).

Заметим, что, если уравнение (1.1.1) при $\forall \lambda \in S$ имеет решение $x(\lambda) = 0$, минимальной непрерывной ветвью будет нулевое решение. В таких случаях точка $\lambda = 0$ называется точкой бифуркации. Этот вопрос рассматривался отдельно в [51]. Заметим ещё, что определение 1.1.2 подразумевает либо единственность решения, которое мы называем минимальной непрерывной ветвью, либо отсутствие такого решения вовсе.

Далее для уравнения (1.1.1) доказывается теорема, условия которой являются достаточными для существования минимальной непрерывной ветви в секториальной окрестности нуля $S_0 \subseteq S \subset \Lambda$, и дан способ ее построения методом последовательных приближений.

Теорема 1.1.1. Пусть в области Ω выполнены условия:

- 1) оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ и имеет частную производную Фреше $F_x(x, \lambda)$, непрерывную по x и λ ;
- 2) $F(0, 0) = 0$; оператор $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим при $\forall \lambda \in S$ на всем пространстве Y , причем при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ имеет место оценка (1.1.2);
- 3) найдется некоторая константа $L > 0$, что для каждого $\lambda \in S$ справедливо неравенство:

$$\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L\|x\|;$$

- 4) имеет место оценка $\|F(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Тогда найдется число $r_0 \in (0, r]$ и секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1.1.1) имеет в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$, которую можно построить методом последовательных приближений по формуле, данной в доказательстве теоремы.

Доказательство. Уравнение (1.1.1) рассматривается в области Ω , как указано выше, и S – секториальная окрестность нуля. Перепишем уравнение (1.1.1) в эквивалентной форме

$$x = x - F_x^{-1}(0, \lambda)F(x, \lambda),$$

которая справедлива для $\forall \lambda \in S$ в силу оценки (1.1.2). В полученном уравнении сделаем замену $x = a(\lambda)V$, где $a(\lambda)$ – функционал из (1.1.2). Получим:

$$a(\lambda)V = a(\lambda)V - F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V, \lambda)$$

Разделим на $a(\lambda)$, поскольку $a(\lambda) \neq 0$ при $\forall \lambda \in S$:

$$V = V - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V, \lambda).$$

Обозначим правую часть полученного уравнения как $\Phi(V, \lambda)$, тогда оно примет вид:

$$V = \Phi(V, \lambda) \tag{1.1.3}$$

Покажем, что существуют секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и число $0 < r_0 \leq r$ такие, что для $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leq r_0$ к уравнению (1.1.3) применим принцип сжимающих отображений.

Для этого сначала покажем, что существует число $0 < r_0 \leq r$ такое, что для $\forall \lambda \in S$ оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжатием в шаре $\|V\| \leq r_0$. Действительно, учитывая вид оператора $\Phi(V, \lambda)$, имеем:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| = \\ & = \left\| V_1 - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_1, \lambda) - V_2 + \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_2, \lambda) \right\|. \end{aligned}$$

В полученном выражении перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} & \left\| V_1 - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_1, \lambda) - V_2 + \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_2, \lambda) \right\| = \\ & = \left\| (V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda) \left[F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda) \right] \right\|. \end{aligned}$$

Вынесем оператор $F_x^{-1}(0, \lambda)$ за скобку:

$$\left\| (V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda) \left[F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda) \right] \right\| =$$

$$= \left\| F_x^{-1}(0, \lambda) \times \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)} (F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)) \right] \right\|.$$

Воспользуемся оценкой нормы произведения:

$$\begin{aligned} &= \left\| F_x^{-1}(0, \lambda) \times \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)} (F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)) \right] \right\| \leq \\ &\leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)} (F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)) \right\|. \end{aligned}$$

В последнем выражении воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа [73, п.32.2], согласно которой:

$$\begin{aligned} &F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda) = \\ &= \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2). \end{aligned}$$

Тогда, продолжая оценку, имеем:

$$\begin{aligned} &\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)} (F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)) \right\| = \\ &\leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a(\lambda)} \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2) \right\|. \end{aligned}$$

Сокращая на $a(\lambda)$ в числителе и знаменателе, получаем:

$$\begin{aligned} &\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a(\lambda)} \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2) \right\| = \\ &= \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(V_1 - V_2) \right\|. \end{aligned}$$

Вынесем $V_1 - V_2$ за скобку:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(V_1 - V_2) \Big\| = \\
& = \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| \left[F_x(0, \lambda) - \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta \right] (V_1 - V_2) \right\|.
\end{aligned}$$

Внесём $F_x(0, \lambda)$ под знак интеграла, так как он не зависит от Θ :

$$\begin{aligned}
& \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| \left[F_x(0, \lambda) - \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta \right] (V_1 - V_2) \right\| = \\
& = \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| \int_0^1 \left[F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) \right] d\Theta(V_1 - V_2) \right\|.
\end{aligned}$$

Далее применим оценку нормы произведения и оценку нормы интеграла. Получим:

$$\begin{aligned}
& \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| \int_0^1 \left[F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) \right] d\Theta(V_1 - V_2) \right\| \leq \\
& \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \int_0^1 \left\| F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) \right\| d\Theta \|V_1 - V_2\|.
\end{aligned}$$

Согласно условию 3) доказываемой теоремы, имеем:

$$\begin{aligned}
& \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \int_0^1 \|F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda)\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq \\
& \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \int_0^1 L \|a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2))\| d\Theta \|V_1 - V_2\|.
\end{aligned}$$

Вынесем L и $a(\lambda)$ из под знака интеграла, а под знаком интеграла применим неравенство треугольника для норм:

$$\begin{aligned}
& \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \int_0^1 L \|a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2))\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq \\
& \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times La(\lambda) \int_0^1 (\|V_2\| + \Theta(\|V_1\| + \|V_2\|)) d\Theta \|V_1 - V_2\|.
\end{aligned}$$

Дальнейшую оценку будем производить в шаре $\|V\| \leq r_0$, где $0 < r_0 \leq r$:

$$\begin{aligned} \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times La(\lambda) \int_0^1 (\|V_2\| + \Theta(\|V_1\| + \|V_2\|)) d\Theta \|V_1 - V_2\| &\leq \\ &\leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times La(\lambda) r_0 \int_0^1 (1 + 2\Theta) d\Theta \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

После вычисления интеграла получим:

$$\begin{aligned} \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times La(\lambda) r_0 \int_0^1 (1 + 2\Theta) d\Theta \|V_1 - V_2\| &= \\ &= a(\lambda) \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times 2Lr_0 \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

Согласно условию 2) доказываемой теоремы, выражение $a(\lambda) \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \leq C$ при $\forall \lambda \in S$, где C – константа. Пусть q – число из интервала $(0, 1)$. Выберем r_0 так, чтобы $r_0 = \min\{r, \frac{q}{2CL}\}$. Тогда оператор $\Phi(V, \lambda)$ будет сжатием с коэффициентом сжатия q в шаре $\|V\| \leq r_0$ для $\forall \lambda \in S$.

Теперь покажем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что для $\forall \lambda \in S_0$ и значениях V из шара $\|V\| \leq r_0$ значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ удовлетворяют оценке $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$, т.е. отображают замкнутый шар $\overline{S_{r_0}(0)}$ в себя. Действительно:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda)\| &= \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda) + \Phi(0, \lambda)\| \leq \\ &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\|. \end{aligned}$$

Здесь мы добавили и вычли $\Phi(0, \lambda)$ и применили неравенство треугольника для норм. Далее, учитывая сжимаемость оператора $\Phi(V, \lambda)$ в шаре $\|V\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$, имеем:

$$\|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq q\|V\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \|\Phi(0, \lambda)\|.$$

Распишем оператор $\Phi(0, \lambda)$ и применим оценку нормы произведения:

$$\begin{aligned} qr_0 + \|\Phi(0, \lambda)\| &= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda) F(0, \lambda)\| \leq \\ &\leq qr_0 + \frac{\|F_x^{-1}(0, \lambda)\|}{a(\lambda)} \|F(0, \lambda)\|. \end{aligned}$$

В силу условий 2) и 4) доказываемой теоремы второе слагаемое в последнем выражении является сколь угодно малой величиной при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Поэтому существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что для $\forall \lambda \in S_0$

$$\frac{\|F_x^{-1}(0, \lambda)\|}{a(\lambda)} \|F(0, \lambda)\| \leq (1 - q)r_0,$$

откуда и получаем, что для $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leq r_0$ выполняется неравенство $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$.

Тогда на основании принципа сжимающих отображений уравнение (1.1.3) для $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leq r_0$ имеет единственное малое решение, которое можно строить методом последовательных приближений по формуле

$$V_n = \Phi(V_{n-1}, \lambda), \quad (1.1.4)$$

сходящимся при любом начальном приближении V_0 из шара $\|V_0\| \leq r_0$, в том числе при $V_0 = 0$. Тогда искомое решение уравнения (1.1.3) $V_* = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$, а $x_* = a(\lambda)V_*$ будет малым решением уравнения (1.1.1). Следует отметить, что уравнение (1.1.1) кроме x_* может иметь и другие малые решения, но поскольку в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ не существует других решений, кроме x_* , то решение x_* является минимальной непрерывной ветвью. $\square$

Если $F_x(0, 0) \neq 0$, то следующий результат позволяет в приложениях ослаблять условие 4) теоремы 1.1.1.

Теорема 1.1.2. Пусть в области Ω выполнены условия:

- 1) оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ и имеет частную производную Фреше $F_x(x, \lambda)$, непрерывную по x и λ ;
- 2) $F(0, 0) = 0$; оператор $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим при $\forall \lambda \in S$ на всем пространстве Y , причем при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ имеет место оценка (1.1.2);
- 3) найдется некоторая константа $L > 0$ такая, что при любом $\lambda \in S$ справедливо неравенство:

$$\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L\|x\|;$$

- 4) линейное уравнение $F_x(0, 0)x = F(0, \lambda)$, где $\lambda \in S$, имеет решение $x^*(\lambda)$, причем выполнены оценки $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ и $\|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| = O(a(\lambda))$ при $\lambda \in S$.

Тогда найдется число $r_0 \in (0, r]$ и секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1.1.1) имеет в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$, которую можно построить методом последовательных приближений по формуле, данной в доказательстве теоремы.

Доказательство. Уравнение (1.1.1) перепишем в эквивалентной форме с использованием обратного оператора $F_x^{-1}(0, \lambda)$:

$$x = x - F_x^{-1}(0, \lambda)F(x, \lambda).$$

В полученном уравнении сделаем замену $x = a(\lambda)V$, где $a(\lambda)$ – функционал из условия (1.1.2), $\lambda \in S$:

$$a(\lambda)V = a(\lambda)V - F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V, \lambda)$$

или

$$V = V - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V, \lambda).$$

Введем обозначение:

$$\Phi(V, \lambda) = V - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V, \lambda).$$

Тогда получим уравнение вида (1.1.3), которое будем исследовать в области Ω с помощью принципа сжимающих отображений. Для этого покажем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и число $0 < r_0 \leq r$ такие, что при $\|V\| \leq r_0$ для $\forall \lambda \in S_0$ оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжатием, и значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ не выходят из шаров радиуса r_0 , то есть $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$. Действительно:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| = \\ & = \|V_1 - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_1, \lambda) - V_2 + \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_2, \lambda)\| = \\ & = \|(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)[F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)]\| = \\ & = \|F_x^{-1}(0, \lambda) \times \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}(F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)) \right]\|. \end{aligned}$$

В силу формулы конечных приращений Лагранжа [73, п.32.2] продолжим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|F_x^{-1}(0, \lambda) \times \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}(F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)) \right] \| = \\ = \|F_x^{-1}(0, \lambda) \times \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a(\lambda)}a(\lambda) \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(V_1 - V_2) \right] \|. \end{aligned}$$

Но тогда, выполняя в последнем выражении оценку нормы произведения и сокращая на $a(\lambda)$, получим:

$$\begin{aligned} \|F_x^{-1}(0, \lambda) \times \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a(\lambda)}a(\lambda) \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(V_1 - V_2) \right] \| \leq \\ \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(V_1 - V_2) \right] \right\| = \\ = \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| \int_0^1 \left[F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) \right] d\Theta(V_1 - V_2) \right\| \leq \\ \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \int_0^1 \left\| F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) \right\| d\Theta \| (V_1 - V_2) \|. \end{aligned}$$

Здесь мы вынесли выражение $(V_1 - V_2)$ за скобку, а $F_x(0, \lambda)$ внесли под знак интеграла в силу его независимости от Θ , после чего сделали оценку нормы произведения и оценку нормы интеграла. Далее, в силу условия 3) теоремы 1.1.2, в шаре $\|V\| \leq r$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \int_0^1 \left\| F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) \right\| d\Theta \| (V_1 - V_2) \| \leq \\ \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \int_0^1 L \cdot \left\| a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)) \right\| d\Theta \| (V_1 - V_2) \| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \cdot L \int_0^1 a(\lambda)(\|V_2\| + \Theta(\|V_1\| + \|V_2\|)) d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq \\
&\leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \cdot L \cdot a(\lambda) \cdot r \int_0^1 (1 + 2\Theta) d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq \\
&\leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \cdot L \cdot a(\lambda) \cdot r \cdot 2 \|V_1 - V_2\|.
\end{aligned}$$

Поскольку $a(\lambda)\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \leq C$, то есть ограничена в силу условия (1.1.2), то всегда можно выбрать число $r_0 \leq r$, такое что $2 \cdot C \cdot L \cdot r_0$ будет меньше 1, что, в свою очередь, будет достаточным для сжимаемости оператора $\Phi(V, \lambda)$ с коэффициентом сжатия $q = 2 \cdot C \cdot L \cdot r_0$.

Покажем теперь, что значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ не выходят из шаров $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$ при $\|V\| \leq r_0$ в некоторой секториальной окрестности нуля $S_0 \subseteq S$. Действительно, имеем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(V, \lambda)\| &= \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda) + \Phi(0, \lambda)\| \leq \\
&\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq \\
&\leq qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0, \lambda) F(0, \lambda) \right\|.
\end{aligned}$$

Воспользуемся условием 4) доказываемой теоремы:

$$\begin{aligned}
qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0, \lambda) F(0, \lambda) \right\| &= qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0, \lambda) F_x(0, 0) x^*(\lambda) \right\| = \\
&= qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0, \lambda) \times \{F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda) + F_x(0, \lambda)\} x^*(\lambda) \right\| \leq \\
&\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| \times \|x^*(\lambda)\| + \\
&\quad + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda) F_x(0, \lambda) x^*(\lambda)\| \leq \\
&\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| \|x^*(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\|.
\end{aligned}$$

В силу выполнения условия 4) теоремы и оценки на обратный оператор $F_x^{-1}(0, \lambda)$ второе и третье слагаемые в последнем выражении являются сколь угодно малыми величинами при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Следовательно, существует некоторая секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$, такая что при $\forall \lambda \in S_0$ сумма

второго и третьего слагаемых в последнем выражении будет меньше, чем $(1 - q)r_0$, то есть:

$$\frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| \|x^*(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\| \leq (1 - q)r_0.$$

Тогда $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$, и условие отображения шара $S_{r_0}(0)$ в себя выполнено при $\forall \lambda \in S_0$.

Поскольку все условия принципа сжимающих отображений выполнены, то уравнение $V = \Phi(V, \lambda)$ имеет в шаре $\|V\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S_0$ единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений при любом начальном приближении из шара $\|V\| \leq r_0$, например, при $V_0 = 0$ по формуле:

$$V_n = \Phi(V_{n-1}, \lambda).$$

Решение уравнения (1.1.3) $V^*(\lambda)$ будет пределом последовательности $\{V_n(\lambda)\}$. Возвращаясь к переменной $x(\lambda)$, получим, что уравнение (1.1.1) будет иметь минимальную непрерывную ветвь вида $x(\lambda) = a(\lambda)V^*(\lambda)$. Заметим, что уравнение (1.1.1) может иметь и другие малые решения, но среди всех малых решений в шар $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ попадает только одно найденное нами решение. Все остальные малые решения будут находиться в области $\|x\| > a(\lambda)r_0$. $\square$

Пример 1.1.1. Покажем, что уравнение

$$F(x, \lambda) \equiv \int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^3(s) ds - f(t, \lambda) = 0,$$

где $x(t) \in C_{[0,1]}$, $f(t, \lambda) = m(t)\lambda^n$, $m(t) \in C_{[0,1]}$, $n \geq 2$, S — суть проколота окрестность нуля, имеет непрерывное при $t \in [0, 1]$ решение $x_\lambda(t) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Решение. Первым делом найдем для оператора $F(x, \lambda)$ производную Фреше по первому аргументу. Для этого рассмотрим разность

$$F(x + h) - F(x) = \int_0^1 ts(x(s) + h(s)) ds + \lambda x(t) + \lambda h(t) - \int_0^1 (x(s) + h(s))^3 ds -$$

$$\begin{aligned}
& -f(t, \lambda) - \int_0^1 tsx(s) ds - \lambda x(t) + \int_0^1 x^3(s) ds + f(t, \lambda) = \\
& = \int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t) - \int_0^1 3x^2(s)h(s) ds - \int_0^1 3x(s)h^2(s) ds - \int_0^1 h^3(s) ds.
\end{aligned}$$

Здесь дифференциал Фреше будет состоять из всех слагаемых, входящих по h линейно в выражении $F(x+h) - F(x)$, то есть дифференциал Фреше будет иметь вид:

$$F_x(x, \lambda)h = \int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t) - 3 \int_0^1 x^2(s)h(s) ds.$$

Согласно условиям теорем, оценка на норму оператора $F_x^{-1}(0, \lambda)$ должна удовлетворять условию (1.1.2). Найдем $F_x^{-1}(0, \lambda)$. Для этого разрешим уравнение

$$\int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t) = f(t) \quad (1.1.5)$$

относительно $h(t)$, где $\int_0^1 ts[\cdot] ds + \lambda[\cdot] \equiv F_x(0, \lambda)$. Вынесем множитель t за знак интеграла и введем обозначение:

$$\int_0^1 s \cdot h(s) ds = C_1. \quad (1.1.6)$$

Тогда из (1.1.5) получим:

$$h(t) = \frac{1}{\lambda}(f(t) - tC_1).$$

Подставляя полученное выражение для $h(t)$ в равенство (1.1.6), получим алгебраическое уравнение относительно C_1 , после разрешения которого получим:

$$C_1 = \frac{3}{3\lambda + 1} \int_0^1 sf(s) ds.$$

Тогда оператор $F_x^{-1}(0, \lambda)$ имеет вид:

$$F_x^{-1}(0, \lambda)f = \frac{f(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 sf(s) ds.$$

Следовательно, оценка (1.1.2) выполняется:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0.$$

Теперь проверим, что выполнены остальные условия теоремы 1.1.1:

1) оператор $F(x, \lambda)$ является непрерывным по x и λ в некоторой окрестности нуля $\|x\| \leq r, |\lambda| < \rho$. Производная Фреше $F_x(x, \lambda)$ тоже непрерывна по x и λ в некоторой окрестности нуля $\|x\| \leq r, |\lambda| < \rho$;

2) оператор $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим в некоторой проколотой окрестности нуля, и имеет место оценка (1.1.2);

3) из следующей оценки:

$$\|F_x(x, \lambda)h - F_x(0, \lambda)h\| = \left\| 3 \int_0^1 x^2(s)h(s) ds \right\| \leq 3r\|x\|\|h\|,$$

где $\|x\| \leq r$, следует, что

$$\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq 3r\|x\|;$$

4) $\|F(0, \lambda)\| = \|f(t, \lambda)\| = \|m(t)\lambda^n\| = \|m(t)\||\lambda|^n$, где $n \geq 2$.

Если $n > 2$, то условие 4) теоремы 1.1.1 выполнено, и, следовательно, выполнены все условия теоремы 1.1.1, что позволяет утверждать, что при $n > 2$ заданное уравнение имеет решение $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ в некоторой проколотой окрестности нуля $0 < |\lambda| < r_0$. Это решение будет иметь вид $x = \lambda V$, где $V(\lambda)$ – строится методом последовательных приближений при начальном приближении $V_0 = 0$.

Если $n = 2$, то условие 4) теоремы 1.1.1 не выполняется, и ее применение не возможно, однако, согласно теореме 1.1.2, если будет выполнено условие 4) теоремы 1.1.2, то можно судить о существовании решения данного уравнения. Составим уравнение, как сказано в условии 4) теоремы 1.1.2:

$$\int_0^1 tsx(s) ds = m(t)\lambda^2.$$

Данное уравнение разрешимо только при $m(t) = t$. Решением будет, например, $x^*(t) = 3\lambda^2 t$, убедиться в чем можно простой подстановкой в уравнение.

Очевидно, что $\|x^*(t)\| = o(|\lambda|)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Далее проверим, будет ли для разности $\|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\|$ выполняться требуемая в теореме оценка.

$$\begin{aligned} \|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| &= \left\| \int_0^1 tsx(s) ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) \right\| = |\lambda| \|x(t)\| \leq |\lambda| r = O(|\lambda|). \end{aligned}$$

То есть все условия теоремы 1.1.2 будут выполнены, если $m(t) = t$. Поэтому при $m(t) = t$ заданное уравнение будет иметь малое решение вида $x = \lambda V$, где V строится методом последовательных приближений при начальном приближении $V_0 = 0$. $\square$

Пример 1.1.2. Покажем, что двухточечная краевая задача для интегродифференциальной системы в гильбертовом пространстве

$$\begin{cases} -y''(t) = x(t), & y(0) = y(1) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(t) + \lambda x(t) + t \int_0^1 x(s)y(s) ds + f(t, \lambda) = 0, & \lambda > 0, \end{cases}$$

где $x(t), y(t)$ – функции из пространства $L_2[0,1]$, $f(t, \lambda) = m(t)\lambda^n$, $m(t) \in L_2[0,1]$, $n \geq 2$, имеет минимальную непрерывную ветвь $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \rightarrow (0, 0)$ при $\lambda \rightarrow +0$.

Решение. Первым делом разрешим краевую задачу относительно $y(t)$. Поскольку соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то существует непрерывная на $[0, 1] \times [0, 1]$ функция Грина:

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \\ (1-t)s, & s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

такая, что единственное решение неоднородной краевой задачи будет иметь вид:

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s)x(s) ds.$$

Функция Грина всегда строится для однородной краевой задачи и подбирается таким образом, чтобы удовлетворять одновременно нескольким условиям, в том числе она должна быть непрерывна на $[0, 1] \times [0, 1]$, её производная

должна иметь скачок при $t = s$ величины, обратно пропорциональной коэффициенту при $y''(t)$. Функция Грина должна быть решением для однородной краевой задачи, в том числе удовлетворять краевым условиям. Задачи подобного вида рассматривались в курсе дифференциальных уравнений. Готовую функцию Грина для подобной задачи можно посмотреть в ([9], стр. 247).

Подставляя полученное выражение для $y(t)$ во второе уравнение системы, получим нелинейное интегральное уравнение:

$$\int_0^1 G(t, s)x(s) ds + \lambda x(t) + t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds + f(t, \lambda) = 0. \quad (1.1.7)$$

Для удобства введем обозначение левой части уравнения (1.1.7):

$$F(x, \lambda) = \int_0^1 G(t, s)x(s) ds + \lambda x(t) + t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds + f(t, \lambda).$$

Здесь следует отметить, что для функции Грина, как непрерывной функции на $[0, 1] \times [0, 1]$, имеет место неравенство:

$$\int_0^1 \int_0^1 |G(t, s)|^2 dt ds < \infty,$$

что позволит далее делать определенные оценки, связанные с нормой в $L_2[0,1]$.

Ещё нам понадобится производная Фреше по первому аргументу. Найдем её:

$$\begin{aligned} F(x + h, \lambda) - F(x, \lambda) &= \\ &= \int_0^1 G(t, s)[x(s) + h(s)] ds + \lambda[x(t) + h(t)] + \\ &+ t \int_0^1 [x(s) + h(s)] \int_0^1 G(s, z)[x(z) + h(z)] dz ds + f(t, \lambda) - \\ &- \int_0^1 G(t, s)x(s) ds - \lambda x(t) - t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds - f(t, \lambda) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 G(t, s)h(s) ds + \lambda h(t) + t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)h(z) dz ds + \\
&+ t \int_0^1 h(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds + t \int_0^1 h(s) \int_0^1 G(s, z)h(z) dz ds.
\end{aligned}$$

Производную Фреше составят все слагаемые, входящие в выражение $F(x + h, \lambda) - F(x, \lambda)$ линейно по h , то есть дифференциал Фреше имеет вид:

$$\begin{aligned}
F_x(x, \lambda)h &= \int_0^1 G(t, s)h(s) ds + \lambda h(t) + t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)h(z) dz ds + \\
&+ t \int_0^1 h(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds.
\end{aligned}$$

Теперь убедимся, что для оператора $F_x(0, \lambda)$ существует обратный оператор при $\lambda > 0$, и имеет место оценка:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +0.$$

Для этого рассмотрим уравнение:

$$F_x(0, \lambda)h = f, \quad (1.1.8)$$

где оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет вид:

$$F_x(0, \lambda)h = \int_0^1 G(t, s)h(s) ds + \lambda h(t).$$

Интеграл $\int_0^1 G(t, s)h(s) ds$, где $G(t, s) \in L_{2[0,1] \times [0,1]}$, принято называть оператором Гильберта-Шмидта, и поскольку он является вполне непрерывным ([73], стр. 209), причем $G(t, s) = G(s, t)$, то в гильбертовом пространстве, каковым является $L_{2[0,1]}$, имеет место теорема Гильберта-Шмидта ([73], стр. 245) о разложении оператора в сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\int_0^1 G(t, s)h(s) ds$. То есть

$$\int_0^1 G(t, s)h(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k \varphi_k.$$

Учитывая, что элементы h и f тоже представимы сходящимися рядами в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$:

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \varphi_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k, \quad (1.1.9)$$

уравнение (1.1.8) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k \varphi_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} h_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k,$$

откуда в силу линейной независимости элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ получаем систему алгебраических уравнений:

$$\lambda_k h_k + \lambda h_k = f_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

или

$$h_k = \frac{f_k}{\lambda + \lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляя полученные выражения для h_k в ряд (1.1.9), получаем решение уравнения (1.1.8):

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda + \lambda_k} \varphi_k.$$

Теперь оценим по норме:

$$\begin{aligned} \|h\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda + \lambda_k} \varphi_k \right\| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{f_k}{\lambda + \lambda_k} \right|^2} \leq \frac{1}{\lambda} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2} = \frac{\|f\|}{\lambda}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались оценкой $\frac{1}{\lambda + \lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda}$, которая справедлива в силу неравенств $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > 0$ ([73], стр. 245) и $\lambda > 0$. Но, с другой стороны, при $\lambda > 0$ $h = F_x^{-1}(0, \lambda)f$. Следовательно, получаем требуемую оценку на $F_x^{-1}(0, \lambda)$:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +0.$$

Теперь покажем, что при $n > 2$ выполнены все условия теоремы 1.1.1 для оператора $F(x, \lambda)$.

1) Операторы $F(x, \lambda)$ и $F_x(x, \lambda)$ – непрерывны.

2) Очевидно, $F(0, 0) = 0$, и оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda > 0$ такой, что

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +0.$$

3) $\|F_x(x, \lambda)h - F_x(0, \lambda)h\| =$

$$\begin{aligned} &= \left\| \int_0^1 G(t, s)h(s) ds + \lambda h(t) + t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)h(z) dz ds + \right. \\ &\quad \left. + t \int_0^1 h(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds - \int_0^1 G(t, s)h(s) ds - \lambda h(t) \right\| = \\ &= \left\| t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)h(z) dz ds + t \int_0^1 h(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds \right\| \leq \\ &\leq \|t\| \int_0^1 \int_0^1 \|h\| \|G(s, z)\| \|x\|^2 dz ds = \|t\| \|h\| \|G(s, z)\| \|x\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку, как было замечено выше, $\int_0^1 \int_0^1 |G(s, z)|^2 dz ds < \infty$, то $2\|t\| \|G(s, z)\| = L$, где L – некоторая константа. Таким образом,

$$\|F_x(x, \lambda)h - F_x(0, \lambda)h\| \leq L\|x\| \|h\|$$

и условие 3) выполнено.

4) $\|F(0, \lambda)\| = \|f(t, \lambda)\| = \|\lambda^n m(t)\| = \lambda^n \|m(t)\|$, где $n > 2$, $\|m(t)\|$ – ограничена. То есть $\|F(0, \lambda)\| = o(\lambda^2)$.

Все условия теоремы 1.1.1 при $n > 2$ выполнены, следовательно, уравнение (1.1.7) имеет минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +0$ в шаре $\|x\| \leq \lambda r_0$.

Отдельно рассмотрим случай $n = 2$. Теорема 1.1.1 в этом случае не выполняется, поскольку не выполнено условие 4). Однако попробуем применить теорему 1.1.2. Условия 1), 2) и 3) аналогичны условиям теоремы 1.1.1, и мы уже убедились, что они выполняются. Проверим справедливость условия 4).

Составим уравнение $F_x(0, 0)h = F(0, \lambda)$:

$$\int_0^1 G(t, s)h(s) ds = \lambda^2 m(t).$$

Это уравнение будет разрешимо, если $m(t)$ – дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям на границе $m(0) = m(1) = 0$. И решение $h^*(t)$ будет иметь оценку $\|h^*(t)\| = o(\lambda)$, и

$$\begin{aligned} & \|F_x(0, 0)h - F_x(0, \lambda)h\| = \\ & = \left\| \int_0^1 G(t, s)h(s) ds - \int_0^1 G(t, s)h(s) ds - \lambda h(t) \right\| = \lambda \|h(t)\|. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| = O(\lambda)$.

Таким образом, для того, чтобы данное уравнение при $n = 2$ имело минимальную непрерывную ветвь $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \rightarrow (0, 0)$ при $\lambda \rightarrow +0$, достаточно, чтобы $m(t)$ была дважды дифференцируемой функцией, причем $m(0) = m(1) = 0$. $\square$

Примеры 1.1.1 и 1.1.2 показывают, что при $n > 2$ выполняется теорема 1.1.1, а при $n = 2$ и дополнительном условии на свободный член уравнения выполняется теорема 1.1.2. Таким образом, приведенные теоремы дополняют друг друга, и одна не является частным случаем другой.

Далее будем считать, что найдется элемент $V_0 \in X$ такой, что линейное уравнение

$$F_x(0, \lambda)x = F(a(\lambda)V_0, \lambda) \tag{1.1.10}$$

имеет решение $x^*(\lambda)$, и выполнена оценка $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$; а область Ω пусть имеет вид:

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\},$$

где $r \in \mathbb{R}_+$, S – секториальная окрестность нуля в Λ . Тогда будет справедлива следующая

Теорема 1.1.3. Пусть в области Ω выполнены условия:

1) оператор $F(x, \lambda)$ и его производная Фреше $F_x(x, \lambda)$ непрерывны;

- 2) линейный оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, и выполнена оценка (1.1.2);
- 3) имеет место оценка $\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L(\lambda)\|x\|$ при $\lambda \in S$, причем $L(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$;

Тогда найдется секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при каждом $\lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r$ существует единственное решение уравнения (1.1.1) вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \rightarrow V_0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$.

Доказательство. С помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ и эквивалентных преобразований уравнение (1.1.1) сводится к уравнению вида:

$$V = V - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V, \lambda). \quad (1.1.11)$$

Оператор, стоящий в правой части уравнения (1.1.11), обозначим $\Phi(V, \lambda)$. Тогда уравнение (1.1.11) перепишется в виде:

$$V = \Phi(V, \lambda). \quad (1.1.12)$$

Покажем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что для $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V - V_0\| \leq r$ к уравнению (1.1.3) применим принцип сжимающих отображений.

Для этого сначала покажем, что существует секториальная окрестность нуля $S'_0 \subseteq S$ такая, что для $\forall \lambda \in S'_0$ оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжатием в шаре $\|V - V_0\| \leq r$. Действительно:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| = \\ & = \|V_1 - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_1, \lambda) - V_2 + \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_2, \lambda)\| = \\ & = \|(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)[F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)]\| = \\ & = \|F_x^{-1}(0, \lambda) \times \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}(F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)) \right]\|. \end{aligned}$$

В последнем выражении применим оценку нормы произведения и воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа [73, п.32.2], согласно которой:

$$F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda) =$$

$$= \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2).$$

Тогда, продолжая оценку, имеем:

$$\begin{aligned} & \|F_x^{-1}(0, \lambda) \times \left[F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}(F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)) \right]\| \leq \\ & \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \|F_x(0, \lambda)(V_1 - V_2) - \\ & - \frac{1}{a(\lambda)} \int_0^1 F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) d\Theta(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2)\| = \\ & = \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| \int_0^1 [F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda)] d\Theta(V_1 - V_2) \right\|. \end{aligned}$$

Здесь мы сократили $a(\lambda)$ в числителе и знаменателе и внесли $F_x(0, \lambda)$ под интеграл, так как он не зависит от Θ . Далее выполним оценку нормы интеграла и оценку нормы произведения. Получим:

$$\begin{aligned} & \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \left\| \int_0^1 [F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda)] d\Theta(V_1 - V_2) \right\| \leq \\ & \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \int_0^1 \|F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda)\| d\Theta \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

Поскольку оценка производится в шаре $\|V - V_0\| \leq r$, то, учитывая условие 3) доказываемой теоремы, получаем:

$$\begin{aligned} & \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \int_0^1 \|F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda)\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq \\ & \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times \int_0^1 L(\lambda) \|a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2))\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq \\ & \leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \times L(\lambda) a(\lambda) \int_0^1 (\|V_2\| + \Theta(\|V_1\| + \|V_2\|)) d\Theta \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

Поскольку выполнено условие (1.1.2), то $a(\lambda)\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \leq C_1$, то есть ограниченная величина. Также ограничен в области Ω интеграл $\int_0^1 (\|V_2\| +$

$\Theta(\|V_1\| + \|V_2\|) d\Theta \leq C_2$. Тогда получим:

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq L(\lambda)C_1C_2\|V_1 - V_2\|,$$

где $L(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Следовательно, выбором λ можно сделать коэффициент при $\|V_1 - V_2\|$ сколь угодно малым, то есть существует некоторая секториальная окрестность нуля $S'_0 \subseteq S$, такая что $L(\lambda)C_1C_2 < 1$. Таким образом, оператор $\Phi(V, \lambda)$ будет сжимающим.

Теперь необходимо показать, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S'_0$ такая, что для $\forall \lambda \in S_0$ и значениях V из шара $\|V - V_0\| \leq r$ значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ удовлетворяют оценке $\|\Phi(V, \lambda) - V_0\| \leq r$. Действительно, учитывая сжимаемость оператора $\Phi(V, \lambda)$ в шаре $\|V - V_0\| \leq r$, имеем:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda) - V_0\| &= \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(V_0, \lambda) + \Phi(V_0, \lambda) - V_0\| \leq \\ &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(V_0, \lambda)\| + \|\Phi(V_0, \lambda) - V_0\| \leq q\|V - V_0\| + \|\Phi(V_0, \lambda) - V_0\| \leq \\ &\leq qr + \|\Phi(V_0, \lambda) - V_0\| \leq qr + \|V_0 - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_0, \lambda) - V_0\| \leq \\ &\leq qr + \|\frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_0, \lambda)\|. \end{aligned}$$

В силу формулы (1.1.10) имеет место тождество:

$$F_x(0, \lambda)x^*(\lambda) \equiv F(a(\lambda)V_0, \lambda),$$

где $x^*(\lambda)$ решение уравнения (1.1.10) и $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$. Тогда, продолжая оценку, имеем:

$$\begin{aligned} qr + \|\frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V_0, \lambda)\| &\leq \\ &\leq qr + \|\frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F_x(0, \lambda)x^*(\lambda)\| = qr + \frac{1}{a(\lambda)}\|x^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\|x^*(\lambda)\|}{a(\lambda)} \rightarrow 0$ при $S'_0 \ni \lambda \rightarrow 0$, то выбором достаточно малых $\lambda \in S'_0$ можно сделать величину $\frac{\|x^*(\lambda)\|}{a(\lambda)}$ сколь угодно малой, например:

$$\frac{\|x^*(\lambda)\|}{a(\lambda)} \leq (1 - q)r.$$

То есть существует некоторая секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S'_0$ такая, что для $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V - V_0\| \leq r$ имеет место неравенство:

$$\|\Phi(V, \lambda) - V_0\| \leq r.$$

Тогда на основании принципа сжимающих отображений уравнение (1.1.3) для $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V - V_0\| \leq r$ имеет единственное малое решение, которое можно строить методом последовательных приближений по формуле

$$V_n = \Phi(V_{n-1}, \lambda), \quad (1.1.13)$$

сходящимся при любом начальном приближении V' из шара $\|V' - V_0\| \leq r$. Тогда искомое решение уравнения (1.1.3) $V_* = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$, а $x_* = a(\lambda)V_*$ будет малым решением уравнения (1.1.1). $\square$

Далее будем полагать, что оператор $F(x, \lambda)$ имеет следующий вид:

$$F(x, \lambda) = B(\lambda)x + R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (1.1.14)$$

где $B(\lambda)$ – замкнутый линейный оператор, зависящий от параметра λ . Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ предполагается непрерывным по x и λ и непрерывно дифференцируемым по x в смысле Фреше в окрестности нуля. Функция $b(\lambda) : \Lambda \rightarrow Y$ непрерывна по λ . Линейный оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, причем справедлива оценка

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0. \quad (1.1.15)$$

Также будем полагать, что имеет место представление

$$B(\lambda) = B + a(\lambda)A + \omega(\lambda), \quad (1.1.16)$$

где $\omega(\lambda) = o(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$, B, A – замкнутые операторы, не зависящие от λ , с плотными областями определения в X и со значениями в Y .

Следующая лемма дает достаточные условия существования элемента $V_0 \in X$, при котором линейное уравнение (1.1.10) имеет требуемое решение.

Лемма 1.1.4. Пусть для оператора (1.1.14) в области Ω выполнены условия:

- 1) $b(\lambda) = a^2(\lambda)b_2 + \xi(\lambda)$, где $\|\xi(\lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$;
- 2) оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, для которого выполнена оценка (1.1.15);
- 3) уравнение $Bx = b_2 + A(\bar{c}, \bar{\varphi})$ имеет решение x_0 , где $\bar{\varphi} \in N(B)$, $\bar{c}$ – постоянный вектор, $(\bar{c}, \bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$;
- 4) $\|R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$;
- 5) $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, \lambda) = 0$, $b(0) = 0$.

Тогда уравнение (1.1.10) имеет требуемое решение при $V_0 = (\bar{c}, \bar{\varphi})$.

Доказательство. Для доказательства леммы подставим $V_0 = (\bar{c}, \bar{\varphi})$ в уравнение $F_x(0, \lambda)x = F(a(\lambda)V_0, \lambda)$.

Получим:

$$F_x(0, \lambda)x = F(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda).$$

Поскольку $F(x, \lambda) = B(\lambda)x + R(x, \lambda) + b(\lambda)$ и $R_x(0, \lambda) = 0$, то $F_x(0, \lambda) = B(\lambda)$, и изначальное уравнение примет вид:

$$B(\lambda)x = B(\lambda)a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + b(\lambda).$$

Так как в секториальной окрестности нуля, согласно условию леммы 2), оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный, то последнее уравнение решается относительно x следующим образом:

$$x = B^{-1}(\lambda) \left(B(\lambda)a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + b(\lambda) \right), \quad (1.1.17)$$

то есть мы показали существование решения. Теперь покажем, что это решение удовлетворяет оценке $\|x\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Действительно, согласно (1.1.17) имеем равенство:

$$\|x\| = \left\| B^{-1}(\lambda) \left(B(\lambda)a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + b(\lambda) \right) \right\|.$$

В силу формулы (1.1.16) и условия 1) леммы, имеем:

$$\begin{aligned} \|x\| = & \left\| B^{-1}(\lambda) \left((B + a(\lambda)A + \omega(\lambda))a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + a^2(\lambda)b_2 + \xi(\lambda) \right) \right\|. \end{aligned}$$

Так как φ_i , где $i = \overline{1, n}$, являются элементами пространства нулей оператора B , то $B\varphi_i = 0$, где $i = \overline{1, n}$. В итоге получаем:

$$\|x\| = \left\| B^{-1}(\lambda) \left(a^2(\lambda)A(\bar{c}, \bar{\varphi}) + a(\lambda)\omega(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + \right. \right. \\ \left. \left. + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + a^2(\lambda)b_2 + \xi(\lambda) \right) \right\|.$$

Сгруппируем слагаемые при $a^2(\lambda)$:

$$\|x\| = \left\| B^{-1}(\lambda) \left(a^2(\lambda)(b_2 + A(\bar{c}, \bar{\varphi})) + a(\lambda)\omega(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + \right. \right. \\ \left. \left. + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + \xi(\lambda) \right) \right\|.$$

Принимая во внимание условие 3) леммы, получаем:

$$\|x\| = \left\| B^{-1}(\lambda) \left(a^2(\lambda)Bx_0 + a(\lambda)\omega(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + \xi(\lambda) \right) \right\|.$$

К оператору B добавим и вычтем выражение $a(\lambda)A + \omega(\lambda)$:

$$\|x\| = \left\| B^{-1}(\lambda) \left(a^2(\lambda)(B + a(\lambda)A + \omega(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda))x_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + a(\lambda)\omega(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + \xi(\lambda) \right) \right\|.$$

Вследствие формулы (1.1.16) имеем:

$$\|x\| = \left\| B^{-1}(\lambda) \left(a^2(\lambda)B(\lambda)x_0 - a^3(\lambda)Ax_0 - a^2(\lambda)\omega(\lambda)x_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + a(\lambda)\omega(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + \xi(\lambda) \right) \right\|.$$

В силу равенства $B^{-1}(\lambda)B(\lambda) = I$, где I – тождественный оператор в пространстве X , имеем:

$$\|x\| = \left\| a^2(\lambda)x_0 - a^3(\lambda)B^{-1}(\lambda)Ax_0 - a^2(\lambda)B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x_0 + \right. \\ \left. + a(\lambda)B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + B^{-1}(\lambda)\xi(\lambda) \right\|.$$

Выражение, стоящее в правой части последнего равенства, оценим с помощью неравенства треугольника для норм:

$$\|x\| \leq a^2(\lambda)\|x_0\| + a^3(\lambda)\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|Ax_0\| + a^2(\lambda)\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\omega(\lambda)\| \cdot \|x_0\| + \\ + a(\lambda)\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\omega(\lambda)\| \cdot \|(\bar{c}, \bar{\varphi})\| + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda)\| + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\xi(\lambda)\|.$$

В последнем выражении для каждого слагаемого справедлива оценка $o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, что легко видеть, исходя из условий леммы. Количество слагаемых конечно, значит и для их суммы будет справедлива оценка $o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Таким образом, мы показали, что в условиях леммы (1.1.4) при $V_0 = (\bar{c}, \bar{\varphi})$ решение уравнения (1.1.10) существует, и имеет место оценка $\|x\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. $\square$

Тогда на основании теоремы 1.1.3 и леммы 1.1.4 для оператора $F(x, \lambda)$ вида (1.1.14) получаем:

Следствие 1.1.1. Пусть для оператора $F(x, \lambda)$ вида (1.1.14) в области Ω выполнены условия:

- 1) оператор $R(x, \lambda)$ и его производная Фреше $R_x(x, \lambda)$ непрерывны в Ω ;
- 2) оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, и выполнена оценка (1.1.15);
- 3) $\|R_x(x, \lambda)\| \leq L(\lambda)\|x\|$, где $L(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$;
- 4) $b(\lambda) = a^2(\lambda)b_2 + \xi(\lambda)$, где $\|\xi(\lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$;
- 5) уравнение $Bx = b_2 + A(\bar{c}, \bar{\varphi})$ имеет решение x_0 , где $\bar{\varphi} \in N(B)$, $\bar{c}$ — постоянный вектор, $(\bar{c}, \bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$;
- 6) $\|R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$;
- 7) $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, \lambda) = 0$, $b(0) = 0$.

Тогда найдется секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi})\| \leq a(\lambda)r$ существует единственное решение уравнения (1.1.1). Это решение имеет вид $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \rightarrow (\bar{c}, \bar{\varphi})$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$.

1.2 Построение ветвей решений при выполнении условий типа Липшица

Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение вида

$$B(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0, \quad (1.2.1)$$

где $B(\lambda)$ — замкнутый линейный оператор с плотной в пространстве X областью определения, не зависящей от параметра $\lambda \in \Lambda$. Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ — непрерывен в окрестности нуля по x и λ , $R(0, 0) = 0$.

Будем предполагать, что оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный оператор при $\lambda \in S$, причем

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ для } \forall \lambda \in S, \quad (1.2.2)$$

где S — секториальная окрестность нуля; $a(\lambda) : S \subset \Lambda \rightarrow (0, +\infty)$ — положительный непрерывный функционал, $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$, т.е. $a(0) = 0$.

Требуется доказать существование и построить минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ в нерегулярном случае, когда область значений оператора $B(0)$ может быть незамкнутой, и размерность $\dim N(B(0)) \geq 1$.

Если $B(0)$ — фредгольмов оператор, то для построения малых решений уравнения (1.2.1) можно использовать классические результаты теории ветвления решений нелинейных уравнений [7]. В частности, общие теоремы существования точек бифуркации в секториальных областях во фредгольмовом случае можно найти в [63] и в монографии [84]. Приближенные методы и их регуляризация в окрестности точек ветвления изучались в работах [43, 63, 64, 71] и др. В текущей работе фредгольмов случай будет рассмотрен во 2 главе.

Введем множество

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}. \quad (1.2.3)$$

Искомая минимальная непрерывная ветвь решения строится методом последовательных приближений, сходящимся в области S при нулевом начальном приближении.

Далее приводятся теоремы существования и метод последовательных приближений минимальных ветвей решений уравнения (1.2.1) при выполнении оценки (1.2.2); в соответствующих итерационных формулах присутствует оператор $B^{-1}(\lambda)$, поэтому, ввиду неизбежных погрешностей вычислений, этот

метод последовательных приближений требует регуляризации в смысле теории некорректных задач [19, 72], ([13], раздел 3). Регуляризация может быть проведена во фредгольмовом случае в окрестности точки ветвления решения сдвигом по параметру λ [64]. В некоторых конкретных примерах, когда оператор $B^{-1}(\lambda)$ построен явно, а точка $\lambda = 0$ оказывается устранимой особой точкой, регуляризация достигается путем сокращения на допустимую степень параметра λ в редуцированном уравнении.

Приведем достаточные условия существования малого решения в некоторой области $\Omega_0 \subseteq \Omega$ с указанием способа построения решения и его асимптотики.

Теорема 1.2.1. Пусть в области Ω выполнено условие (1.2.2) и при этом:

1) справедливо неравенство

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(\lambda)r \|x_1 - x_2\|, \quad (1.2.4)$$

где $L(\lambda) = O(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$;

2) имеет место оценка $\|R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Тогда найдется область $\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S_0 \subseteq S, 0 < r_0 \leq r\}$, в которой существует единственное решение уравнения (1.2.1) $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Последовательность $\{x_n\}$ $x_0 = 0$, где x_n строится методом последовательных приближений, сходится к этому решению.

Доказательство. Поскольку уравнение (1.2.1) рассматривается в области Ω , то оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный с оценкой (1.2.2). Следовательно, уравнение (1.2.1) может быть эквивалентным образом преобразовано к следующему виду:

$$x = -B^{-1}(\lambda)R(x, \lambda). \quad (1.2.5)$$

Далее в уравнении (1.2.5) сделаем замену $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, получим:

$$V = -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V, \lambda). \quad (1.2.6)$$

Обозначим правую часть уравнения (1.2.6) как $\Phi(V, \lambda)$. Тогда уравнение (1.2.6) примет вид:

$$V = \Phi(V, \lambda). \quad (1.2.7)$$

Покажем, используя принцип сжимающих отображений, что уравнение (1.2.7) имеет единственное малое решение, если выполняются все условия доказываемой теоремы.

Для этого первым делом покажем, что оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим в шаре $\|V\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$, $0 < r_0 \leq r$. Действительно:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| = \\ &= \left\| \frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) R(a(\lambda)V_1, \lambda) - \frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) R(a(\lambda)V_2, \lambda) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)V_1, \lambda) - R(a(\lambda)V_2, \lambda)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| L(\lambda) r \|a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\| = \\ &= \|B^{-1}(\lambda)\| L(\lambda) r \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

В силу оценок на оператор $B^{-1}(\lambda)$ и $L(\lambda)$ имеет место неравенство $L(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)\| \leq C$, где C – некоторая константа. Далее, пусть $0 < q < 1$. Выберем $r_0 = \min\{\frac{q}{C}, r\}$. Тогда оператор $\Phi(V, \lambda)$ будет сжимающим в шаре $\|V\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$ с коэффициентом сжатия q .

Теперь требуется показать, что найдется секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при любом $\lambda \in S_0$ значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ удовлетворяют оценке $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$ при $\|V\| \leq r_0$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda)\| &= \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda) + \Phi(0, \lambda)\| \leq \\ &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\|. \end{aligned}$$

Поскольку мы уже показали сжимаемость оператора $\Phi(V, \lambda)$, то первое слагаемое в последнем выражении будет иметь оценку:

$$\|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| \leq q r_0.$$

Тогда получим:

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq q r_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) R(0, \lambda) \right\| \leq$$

$$\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda)\|.$$

Здесь в последнем выражении норма $\|R(0, \lambda)\|$, согласно условию теоремы, имеет оценку $\|R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Тогда выражение $\frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda)\|$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ является сколь угодно малой величиной. Следовательно, существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$, такая что

$$\frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda)\| \leq (1 - q)r_0.$$

Но тогда и получаем, что при любом $\lambda \in S_0$ и $\|V\| \leq r_0$:

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq qr_0 + (1 - q)r_0 = r_0.$$

Таким образом, на основании принципа сжимающих отображений уравнение (1.2.7) имеет единственное малое решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:

$$V_n = \Phi(V_{n-1}, \lambda), \quad V_0 = 0. \quad (1.2.8)$$

Но тогда найденное, как предел последовательности $\{V_n\}$, решение V^* , умноженное на $a(\lambda)$, будет являться решением для уравнения (1.2.1). Таким образом, мы показали, что уравнение (1.2.1) в области $\Omega_0 \subseteq \Omega$ имеет единственное малое решение, которое можно найти методом последовательных приближений

$$x_n = -B^{-1}(\lambda)R(x_{n-1}, \lambda), \quad (1.2.9)$$

$$x_0 = 0. \quad \square$$

Замечание 1.2.1. В условиях теоремы 1.2.1 в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ при $\lambda \in S_0$ существует единственное малое решение. Заметим, что порядок этого решения, как бесконечно малой в нуле, может оказаться выше порядка бесконечно малой величины $a(\lambda)$.

В области $\|x\| \geq a(\lambda)r_0$ уравнение (1.2.1) может иметь и другие малые решения. Во фредгольмовом случае для отыскания остальных решений можно применить приближенные методы, изложенные в [7, 43, 63, 68, 71, 84].

Следующие теоремы 1.2.2, 1.2.3 позволяют ослабить условие 2) теоремы 1.2.1, заменив его на предположение существования непрерывной функции $b(\lambda) : S \subset \Lambda \rightarrow Y$, $b(0) = 0$, такой что

$$\|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| = o(a^2(\lambda)) \text{ при } \lambda \rightarrow 0. \quad (1.2.10)$$

Далее в данной главе будем предполагать еще, что

$$B(\lambda) = B + a(\lambda)A + \omega(\lambda), \quad (1.2.11)$$

где B, A — замкнутые линейные операторы с плотными в банаховом пространстве X областями определения, $D(B) \subseteq D(A)$, $\omega(\lambda)$ — линейная непрерывная оператор-функция, $\|\omega(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$.

В доказательствах теорем 1.2.2, 1.2.3, как и в теореме 1.2.1, используется принцип сжимающих отображений.

Теорема 1.2.2. Пусть в области Ω выполнена оценка (1.2.2):

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ для } \forall \lambda \in S,$$

оценка (1.2.4) и оценка (1.2.10), причем оператор $B(\lambda)$ имеет вид (1.2.11).

А также пусть линейное уравнение $Bx = b(\lambda)$ имеет при $\lambda \in S$ решение $x^*(\lambda)$, причем $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, $\|Ax^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Тогда в области

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda; \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S_0; 0 < r_0 \leq r, S_0 \subseteq S\}$$

существует единственное малое решение уравнения (1.2.1).

Доказательство. Уравнение (1.2.1) преобразуем к эквивалентному виду:

$$x = -B^{-1}(\lambda)R(x, \lambda), \quad (1.2.12)$$

что возможно в силу существования ограниченного обратного для оператора $B(\lambda)$ в области Ω . Далее с помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ уравнение (1.2.12) приведем к виду:

$$V = -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V, \lambda), \quad (1.2.13)$$

где правая часть является оператором, который мы обозначим $\Phi(V, \lambda)$. Тогда уравнение (1.2.13) примет вид:

$$V = \Phi(V, \lambda). \quad (1.2.14)$$

Покажем с помощью принципа сжимающих отображений, что найдется секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при любом $\lambda \in S_0$ уравнение (1.2.14) имеет в шаре $\|V\| \leq r_0$, где $0 < r_0 \leq r$, единственное малое решение.

С этой целью покажем, что существует число $0 < r_0 \leq r$ такое, что при любом $\lambda \in S$ оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим в шаре $\|V\| \leq r_0$. Действительно:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| = \\ &= \left\| \frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) R(a(\lambda)V_1, \lambda) - \frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) R(a(\lambda)V_2, \lambda) \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) [R(a(\lambda)V_1, \lambda) - R(a(\lambda)V_2, \lambda)] \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)V_1, \lambda) - R(a(\lambda)V_2, \lambda)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot L(\lambda) \cdot r \cdot \|a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\| \leq \\ &\leq \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot L(\lambda) \cdot r \cdot \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

Поскольку для оператора $B^{-1}(\lambda)$ в области Ω имеет место оценка (1.2.2) и, согласно условию теоремы, $L(\lambda) = O(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, то произведение $\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot L(\lambda)$ ограничено некоторой константой C :

$$\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot L(\lambda) \leq C.$$

Но тогда, изменяя радиус r шара $\|V\| \leq r$, мы можем влиять на величину, стоящую перед $\|V_1 - V_2\|$ в нашей оценке, поэтому выберем $0 < r_0 \leq r$ таким образом, чтобы выражение перед $\|V_1 - V_2\|$ в нашей оценке заведомо было меньше 1. Для этого достаточно выбрать r_0 по следующей схеме:

$$r_0 = \min\left\{\frac{q}{C}, r\right\},$$

где $0 < q < 1$, q – фиксированная величина. В результате мы получаем, что в шаре $\|V\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$ оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим.

Покажем теперь, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leq r_0$ выполняется неравенство $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$, то есть значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ не выходят из шаров радиуса r_0 при $\|V\| \leq r_0$. Действительно, на основании сжимаемости оператора $\Phi(V, \lambda)$, имеем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda)\| &= \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda) + \Phi(0, \lambda)\| \leq \\ &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \|\Phi(0, \lambda)\|. \end{aligned}$$

Учитывая, что за $\Phi(V, \lambda)$ мы обозначили правую часть уравнения (1.2.13), продолжаем оценку:

$$qr_0 + \|\Phi(0, \lambda)\| = qr_0 + \left\| -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(0, \lambda) \right\| = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)R(0, \lambda)\|.$$

Добавим и вычтем $b(\lambda)$, затем воспользуемся свойством линейности оператора $B^{-1}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)R(0, \lambda)\| &= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda) + b(\lambda)]\| = \\ &= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)] + B^{-1}(\lambda)b(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Далее произведем оценку с помощью неравенства треугольника для норм:

$$\begin{aligned} qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)] + B^{-1}(\lambda)b(\lambda)\| &\leq \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)b(\lambda)\|. \end{aligned}$$

В силу условия теоремы, имеет место равенство $b(\lambda) = Bx^*(\lambda)$, поэтому получим:

$$\begin{aligned} qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)b(\lambda)\| &= \\ = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)Bx^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся формулой (1.2.11), продолжаем оценку:

$$\begin{aligned} qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)Bx^*(\lambda)\| &= \\ = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[B(\lambda)-a(\lambda)A-\omega(\lambda)]x^*(\lambda)\|.$$

Так как $B^{-1}(\lambda)B(\lambda) = I$, где I – тождественный оператор в X , то получим:

$$\begin{aligned} &= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \\ &+ \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda)]x^*(\lambda)\| = \\ &= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \\ &+ \frac{1}{a(\lambda)}\|x^*(\lambda) - a(\lambda)B^{-1}(\lambda)Ax^*(\lambda) - B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся неравенством треугольника:

$$\begin{aligned} &= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \\ &+ \frac{1}{a(\lambda)}\|x^*(\lambda) - a(\lambda)B^{-1}(\lambda)Ax^*(\lambda) - B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x^*(\lambda)\| \leq \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \\ &+ \frac{1}{a(\lambda)}\|x^*(\lambda)\| + \|B^{-1}(\lambda)Ax^*(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Применим оценку нормы произведения

$$\begin{aligned} &qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)[R(0, \lambda) - b(\lambda)]\| + \\ &+ \frac{1}{a(\lambda)}\|x^*(\lambda)\| + \|B^{-1}(\lambda)Ax^*(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x^*(\lambda)\| \leq \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \\ &+ \frac{1}{a(\lambda)}\|x^*(\lambda)\| + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|Ax^*(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\omega(\lambda)\| \cdot \|x^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что в полученном выражении каждое слагаемое, кроме первого, при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ можно сделать сколь угодно малой величиной, а, значит, и их сумму, как сумму конечного числа бесконечно малых величин при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, можно сделать сколь угодно малой величиной. Действительно, второе слагаемое:

$$\frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| \rightarrow 0 \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0$$

в силу оценок (1.2.2) и (1.2.10); третье слагаемое сколь угодно малая величина при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ в силу оценок на функцию $x^*(\lambda)$, которая является решением уравнения $Bx = b(\lambda)$ согласно условиям текущей теоремы. Четвертое слагаемое:

$$\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|Ax^*(\lambda)\| \rightarrow 0 \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0$$

в силу оценки (1.2.2) и условия теоремы $\|Ax^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Также пятое слагаемое сколь угодно малая величина при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ в силу оценки (1.2.2), оценки на $\|\omega(\lambda)\|$ в представлении (1.2.11) и оценки на $x^*(\lambda)$ из условия теоремы.

Таким образом, все слагаемые, начиная со второго, можно сделать сколь угодно малыми величинами при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, а следовательно, найдется секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что их сумма заведомо будет меньше заранее определенного положительного числа, например, $(1 - q)r_0$. Но тогда при любом $\lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leq r_0$ выполняется:

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq qr_0 + (1 - q)r_0 = r_0,$$

то есть значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ не выходят из шаров радиуса r_0 при $\|V\| \leq r_0$. И, следовательно, к уравнению (1.2.14) можно применять принцип сжимающих отображений, согласно которому уравнение (1.2.14) имеет единственное решение в шаре $\|V\| \leq r_0$ при любом $\lambda \in S_0$, которое можно найти методом последовательных приближений.

Но тогда, возвращаясь к переменной x , мы получим, что уравнение (1.2.1) имеет при $\lambda \in S_0$ в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ единственное решение. $\square$

Замечание 1.2.2. Если B — фредгольмов оператор, и уравнение $Bx = b(\lambda)$ разрешимо, то можно положить $x^*(\lambda) = \Gamma b(\lambda)$, где Γ — оператор $B.A.$ Треногина [73, стр. 221]. Если при этом $\|b(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, то, очевидно, выполнена оценка $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

В теоремах 1.2.1, 1.2.2 методом последовательных приближений строится минимальная непрерывная ветвь малого решения. При этом на основании

замечания 1.2.1 порядок главного члена построенного решения может оказаться выше порядка бесконечно малой $a(\lambda)$.

Заметим, что главный член асимптотики решения в теоремах 1.2.1, 1.2.2 не выписан.

Теорема 1.2.3 решает вопрос о главном члене асимптотики минимальной ветви. В теореме 1.2.3 приведены достаточные условия существования и единственности минимальной ветви малого решения в некотором шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r_0$, где V_0 — определенный ненулевой элемент из пространства X . Для краткости записи введем обозначение

$$F(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} B(\lambda)x + R(x, \lambda). \quad (1.2.15)$$

Теорема 1.2.3. Пусть выполнена оценка (1.2.2):

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ для } \forall \lambda \in S,$$

а оператор $B(\lambda)$ имеет вид (1.2.11). Пусть существует элемент $V_0 \in X$ такой, что линейное уравнение

$$B(\lambda)x = F(a(\lambda)V_0, \lambda) \quad (1.2.16)$$

имеет решение $x^*(\lambda)$, $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Пусть в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r$ выполнена оценка:

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(\lambda)r \|x_1 - x_2\|,$$

где $\|L(\lambda)\| = O(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Тогда существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и число $0 < r_0 \leq r$ такие, что при $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r_0$ существует единственное решение уравнения (1.2.1) вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \rightarrow V_0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Доказательство. Поскольку уравнение (1.2.1) рассматривается в секториальной окрестности нуля S и оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный оператор в S , то эквивалентными преобразованиями приведем уравнение (1.2.1) к следующему виду:

$$x = -B^{-1}(\lambda)R(x, \lambda). \quad (1.2.17)$$

В уравнении (1.2.17) сделаем замену $x = a(\lambda)V$. Получим:

$$a(\lambda)V = -B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V, \lambda)$$

или

$$V = -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V, \lambda). \quad (1.2.18)$$

Правую часть уравнения (1.2.18) обозначим как $\Phi(V, \lambda)$, тогда уравнение (1.2.18) примет вид:

$$V = \Phi(V, \lambda). \quad (1.2.19)$$

Покажем, что уравнение (1.2.19) имеет единственное решение в шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$ при любом $\lambda \in S_0$, где $0 < r_0 \leq r$, $S_0 \subseteq S$, S_0 – секториальная окрестность нуля, а элемент V_0 определяется согласно условию теоремы. Для этого достаточно показать, что в шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$ при любом $\lambda \in S_0$ выполняются все условия принципа сжимающих отображений. Во-первых, необходимо показать сжимаемость оператора $\Phi(V, \lambda)$ в шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$ при любом $\lambda \in S$. Действительно:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| = \\ &= \left\| \frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V_1, \lambda) - \frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V_2, \lambda) \right\| = \\ &= \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)V_1, \lambda) - R(a(\lambda)V_2, \lambda)]\| \leq \\ &\leq \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)V_1, \lambda) - R(a(\lambda)V_2, \lambda)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot L(\lambda) \cdot r \cdot \|a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\| = \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot L(\lambda) \cdot r \cdot \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

Поскольку при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ имеет место оценка (1.2.2) и $\|L(\lambda)\| = O(a(\lambda))$, то при $\forall \lambda \in S$ справедливо неравенство $\|L(\lambda)\| \cdot \|B^{-1}(\lambda)\| \leq C$, где C – константа. Пусть $0 < q < 1$. Выберем $r_0 = \min\{\frac{q}{C}, r\}$. Тогда в шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$ справедливо неравенство:

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq q\|V_1 - V_2\|, \quad 0 < q < 1,$$

то есть оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим в шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$.

Покажем теперь, что значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ не выходят из шаров $\|\Phi(V, \lambda) - V_0\| \leq r_0$ при $\|V - V_0\| \leq r_0$ в некоторой секториальной окрестности нуля $S_0 \subseteq S$. Действительно:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda) - V_0\| &= \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(V_0, \lambda) + \Phi(V_0, \lambda) - V_0\| \leq \\ &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(V_0, \lambda)\| + \|\Phi(V_0, \lambda) - V_0\|. \end{aligned}$$

Поскольку оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим в области $\|V - V_0\| \leq r_0$, то первое слагаемое в последнем выражении оценим следующим образом:

$$\|\Phi(V, \lambda) - \Phi(V_0, \lambda)\| \leq q\|V - V_0\| \leq qr_0.$$

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda) - V_0\| &\leq qr_0 + \|\Phi(V_0, \lambda) - V_0\| = \\ &= qr_0 + \left\| -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V_0, \lambda) - V_0 \right\| = \\ &= qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V_0, \lambda) + V_0 \right\| = \\ &= qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)V_0, \lambda) + B(\lambda)V_0] \right\|. \end{aligned}$$

Согласно одному из условий доказываемой теоремы, существует некоторый элемент $x^*(\lambda)$ такой, что верно равенство:

$$B(\lambda)x^*(\lambda) = R(a(\lambda)V_0, \lambda) + B(\lambda)V_0.$$

Воспользуемся этим равенством в нашей оценке:

$$\begin{aligned} qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)[R(a(\lambda)V_0, \lambda) + B(\lambda)V_0] \right\| &= \\ &= qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)B(\lambda)x^*(\lambda) \right\| = qr_0 + \frac{\|x^*(\lambda)\|}{a(\lambda)}. \end{aligned}$$

Согласно условию теоремы, $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Следовательно, можно подобрать некоторую секториальную окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такую, что

$$\frac{\|x^*(\lambda)\|}{a(\lambda)} \leq (1 - q)r_0 \text{ при любом } \lambda \in S_0.$$

Таким образом, получаем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и существует положительное число $r_0 \leq r$ такие, что оператор

$\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим при любом $\lambda \in S_0$ в шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$, и значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ не выходят из шаров $\|\Phi(V, \lambda) - V_0\| \leq r_0$ при $\|V - V_0\| \leq r_0$ для любого $\lambda \in S_0$. Следовательно, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (1.2.19) имеет в шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$ единственное решение для любого $\lambda \in S_0$, которое можно найти с помощью метода последовательных приближений. А следовательно, и уравнение (1.2.1) имеет в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r_0$ единственное решение вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \rightarrow V_0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$. $\square$

В теореме 1.2.3 остался открытым вопрос о построении элемента V_0 , входящего в правую часть линейного уравнения (1.2.16). Следующая лемма показывает, что этот элемент можно выбрать в подпространстве $N(B(0))$.

Лемма 1.2.1. Пусть при $\lambda \in S$ выполняются следующие условия:

1) существует элемент b такой, что выполняется оценка:

$$\|R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b\| = o(a^2(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0;$$

2) существует элемент $\varphi \in N(B)$ такой, что линейное уравнение

$$Bx = b + A\varphi \tag{1.2.20}$$

имеет решение x_0 ;

3) $\|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$;

4) для оператора $B(\lambda)$ вида (1.2.11) выполнена оценка (1.2.2).

Тогда уравнение (1.2.16), где оператор F имеет вид (1.2.15), при $V_0 = \varphi$ имеет малое решение $x^*(\lambda)$, причем $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Доказательство. Для доказательства леммы нам достаточно найти хотя бы одно решение $x^*(\lambda)$ уравнения (1.2.16), которое имеет оценку $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Подставим $V_0 = \varphi$ в уравнение (1.2.16). Получим:

$$B(\lambda)x = F(a(\lambda)\varphi, \lambda). \tag{1.2.21}$$

Принимая во внимание факт, что оператор F имеет вид (1.2.15), уравнение (1.2.21) распишется следующим образом:

$$B(\lambda)x = B(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda). \quad (1.2.22)$$

Оператор $B(\lambda)$, стоящий в правой части уравнения (1.2.22), можно расписать согласно формуле (1.2.11):

$$B(\lambda)x = (B + a(\lambda)A + \omega(\lambda))a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda). \quad (1.2.23)$$

Согласно условию текущей леммы, элемент $\varphi \in N(B)$, поэтому $B\varphi = 0$, и уравнение (1.2.23) принимает вид:

$$B(\lambda)x = a^2(\lambda)A\varphi + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda). \quad (1.2.24)$$

Ввиду условия 2) доказываемой леммы существует элемент x_0 такой, что $A\varphi = Bx_0 - b$, поэтому уравнение (1.2.24) преобразуется к виду:

$$B(\lambda)x = a^2(\lambda)(Bx_0 - b) + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda)$$

или

$$B(\lambda)x = a^2(\lambda)Bx_0 - a^2(\lambda)b + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda). \quad (1.2.25)$$

Принимая во внимание, что оператор $B(\lambda)$ имеет вид (1.2.11), оператор B , стоящий в правой части уравнения (1.2.25), можно преобразовать к виду $B = B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda)$. В результате чего получим:

$$B(\lambda)x = a^2(\lambda)(B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda))x_0 - a^2(\lambda)b + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda)$$

или

$$\begin{aligned} B(\lambda)x = & a^2(\lambda)B(\lambda)x_0 - a^3(\lambda)Ax_0 - a^2(\lambda)\omega(\lambda)x_0 - \\ & - a^2(\lambda)b + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda). \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

В силу существования ограниченного обратного оператора $B^{-1}(\lambda)$ в области S , уравнение (1.2.26) разрешимо для $\forall \lambda \in S$, и его решением будет:

$$\begin{aligned} x^*(\lambda) = & B^{-1}(\lambda) \cdot \left[a^2(\lambda)B(\lambda)x_0 - a^3(\lambda)Ax_0 - a^2(\lambda)\omega(\lambda)x_0 - \right. \\ & \left. - a^2(\lambda)b + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda) \right] \end{aligned}$$

или, учитывая, что $B^{-1}(\lambda)B(\lambda) = I$ при $\forall \lambda \in S$, где I – тождественный оператор:

$$x^*(\lambda) = a^2(\lambda)x_0 + B^{-1}(\lambda) \cdot \left[-a^3(\lambda)Ax_0 - a^2(\lambda)\omega(\lambda)x_0 - \right. \\ \left. -a^2(\lambda)b + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda) \right]. \quad (1.2.27)$$

Покажем теперь, что для найденного решения имеет место оценка $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \|x^*(\lambda)\| &= \left\| a^2(\lambda)x_0 + B^{-1}(\lambda) \cdot \left[-a^3(\lambda)Ax_0 - a^2(\lambda)\omega(\lambda)x_0 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -a^2(\lambda)b + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda) \right] \right\| = \\ &= \left\| a^2(\lambda)x_0 + B^{-1}(\lambda) \cdot \left[-a^3(\lambda)Ax_0 - a^2(\lambda)\omega(\lambda)x_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda) + R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b \right] \right\| = \\ &= \left\| a^2(\lambda)x_0 - B^{-1}(\lambda)a^3(\lambda)Ax_0 - B^{-1}(\lambda)a^2(\lambda)\omega(\lambda)x_0 + \right. \\ &\quad \left. + B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + B^{-1}(\lambda) \cdot \left[R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda) \right] + \right. \\ &\quad \left. + B^{-1}(\lambda) \cdot \left[R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b \right] \right\| \leq \\ &\leq \|a^2(\lambda)x_0\| + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot a^3(\lambda) \cdot \|Ax_0\| + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot a^2(\lambda) \cdot \|\omega(\lambda)x_0\| + \\ &\quad + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\omega(\lambda)a(\lambda)\varphi\| + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| + \\ &\quad + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b\|. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим каждое из шести представленных слагаемых в последнем выражении и покажем, что каждое из них имеет оценку $o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Первое слагаемое, очевидно, имеет требуемую оценку

$$\|a^2(\lambda)x_0\| = o(a(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0,$$

так как $a(\lambda)$ входит в него со второй степенью, а x_0 от λ не зависит.

Второе слагаемое имеет требуемую оценку

$$\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot a^3(\lambda) \cdot \|Ax_0\| = o(a(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0$$

в силу условия (1.2.2), величина $\|Ax_0\|$ на оценку не влияет, так как не зависит от λ .

Третье слагаемое имеет требуемую оценку

$$\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot a^2(\lambda) \cdot \|\omega(\lambda)x_0\| = o(a(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0$$

в силу условия (1.2.2) на оператор $B^{-1}(\lambda)$ и оценки на $\|\omega(\lambda)\|$ согласно условию (1.2.11).

Аналогично оценивается и четвертое слагаемое:

$$\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\omega(\lambda)a(\lambda)\varphi\| = o(a(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0.$$

Пятое и шестое слагаемые имеют требуемые оценки

$$\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \left\| R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda) \right\| = o(a(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0,$$

$$\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \left\| R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b \right\| = o(a(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0$$

согласно условиям леммы 1), 3) и оценки на оператор $B^{-1}(\lambda)$ (1.2.2).

Таким образом, и сумма всех слагаемых будет иметь требуемую оценку. Следовательно, мы доказали, что найденное нами решение $x^*(\lambda)$ имеет оценку $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. $\square$

Замечание 1.2.3. Если оператор B — фредгольмов, $\{\varphi_i\}, \{\psi_i\}, i = \overline{1, n}$ базисы соответственно в $N(B)$ и $N^*(B)$, $\det \langle A\varphi_i, \psi_k \rangle|_{i,k=\overline{1,n}} \neq 0$, то искомого φ из условия 2) леммы 1.2.1 можно построить в виде суммы $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, где вектор $(c_1, \dots, c_n)$ определяется однозначно из условия разрешимости уравнения (1.2.20).

Как следствие из теоремы 1.2.3 и леммы 1.2.1 получаем следующий результат:

Следствие 1.2.1. Пусть для уравнения (1.2.1) в области

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\},$$

где r — const, S — секторальная окрестность нуля, выполнены условия 1)–4) леммы 1.2.1.

Пусть также выполнено условие 1) теоремы 1.2.1. Тогда существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и число $0 < r_0 \leq r$ такие, что при $\forall \lambda \in S_0$ в области

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S_0\}$$

существует единственное малое решение $x(\lambda)$ уравнения (1.2.1), причем $x(\lambda) \sim a(\lambda)\varphi$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Если область значений оператора B не замкнута, то в $N(B)$ может не быть вектора φ , при котором уравнение (1.2.20) разрешимо. Если, однако, в $N(B)$ найдется вектор φ , при котором $b + A\varphi \in \overline{R(B)}$, то можно получить такой результат:

Следствие 1.2.2. Пусть для уравнения (1.2.1) в области

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\},$$

где $r - \text{const}$, $S - \text{секториальная окрестность нуля}$, выполняются следующие условия:

1) оператор $B(\lambda)$ имеет вид (1.2.11):

$$B(\lambda) = B + a(\lambda)A + \omega(\lambda),$$

где область значений оператора B не является замкнутой, $\|\omega(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$;

2) оператор $B(\lambda)$ при $\forall \lambda \in S$ имеет ограниченный обратный, и имеет место оценка (1.2.2):

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0;$$

3) существует элемент b такой, что имеет место оценка:

$$\|R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b\| = o(a^2(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0;$$

4) существует элемент $\varphi \in N(B)$ такой, что:

$$b + A\varphi \in \overline{R(B)},$$

где область значений оператора B не замкнута;

5) пусть имеет место оценка из условия теоремы (1.2.1), согласно которой

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(\lambda)r \|x_1 - x_2\|,$$

где $L(\lambda) = O(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$;

6) пусть имеет место оценка

$$\|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda)) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0.$$

Тогда в некоторой области $\Omega_0 \subseteq \Omega$, где

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S_0\},$$

$0 < r_0 \leq r$, S_0 – секториальная окрестность нуля, $S_0 \subseteq S$, для каждого $\lambda \in S_0$ существует единственное малое решение $x(\lambda)$ уравнения (1.2.1), причем $x(\lambda) \rightarrow a(\lambda)\varphi$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$.

Доказательство. В силу условия 2) уравнение (1.2.1) в области Ω эквивалентно следующему:

$$x = -B^{-1}(\lambda)R(x, \lambda). \quad (1.2.28)$$

Сделаем в уравнении (1.2.28) замену $x = a(\lambda)V$. Получим

$$a(\lambda)V = -B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V, \lambda)$$

или

$$V = -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V, \lambda). \quad (1.2.29)$$

В уравнении (1.2.29) обозначим правую часть как оператор $\Phi(V, \lambda)$. Тогда получим:

$$V = \Phi(V, \lambda). \quad (1.2.30)$$

Докажем, что уравнение (1.2.30) имеет единственное решение в шаре $\|V - \varphi\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S_0$, где $0 < r_0 \leq r$, S_0 – секториальная окрестность нуля, $S_0 \subseteq S$. Доказательство будет основываться на принципе сжимающих отображений, следовательно, необходимо показать, что выполняются все условия принципа сжимающих отображений, а именно, что, во-первых, существует некоторая константа $0 < r_0 \leq r$ такая, что при $\forall \lambda \in S$ в шаре

$\|V - \varphi\| \leq r_0$ оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим. И, во-вторых, что существует некоторая секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ не выходят из шаров

$$\|\Phi(V, \lambda) - \varphi\| \leq r_0 \text{ при } \|V - \varphi\| \leq r_0.$$

Покажем, что оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим в шаре $\|V - \varphi\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$. Действительно:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| = \\ & = \left\| \frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) R(a(\lambda)V_1, \lambda) - \frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) R(a(\lambda)V_2, \lambda) \right\| = \\ & = \frac{1}{a(\lambda)} \left\| B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)V_1, \lambda) - R(a(\lambda)V_2, \lambda)] \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)V_1, \lambda) - R(a(\lambda)V_2, \lambda)\|. \end{aligned}$$

Далее применяется условие 5) нашей теоремы, поэтому получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)V_1, \lambda) - R(a(\lambda)V_2, \lambda)\| \leq \\ & \leq \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|L(\lambda)\| \cdot r \cdot \|a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\| = \\ & = \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|L(\lambda)\| \cdot r \cdot \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

Согласно условиям доказываемой теоремы, существует константа C такая, что

$$\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|L(\lambda)\| \leq C.$$

Тогда

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq C \cdot r \cdot \|V_1 - V_2\|.$$

Зафиксируем $0 < q < 1$. Теперь достаточно выбрать r_0 по следующему правилу:

$$r_0 \leq \min \left\{ \frac{q}{C}, r \right\},$$

и в шаре $\|V - \varphi\| \leq r_0$ мы получим, что оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим:

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq q \cdot \|V_1 - V_2\|.$$

Остается показать, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V - \varphi\| \leq r_0$ выполняется $\|\Phi(V, \lambda) - \varphi\| \leq r_0$. Действительно, учитывая, что оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим, получим:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(V, \lambda) - \varphi\| &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(\varphi, \lambda) + \Phi(\varphi, \lambda) - \varphi\| \leq \\
&\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(\varphi, \lambda)\| + \|\Phi(\varphi, \lambda) - \varphi\| \leq \\
&\leq q\|V - \varphi\| + \|\Phi(\varphi, \lambda) - \varphi\| \leq \\
&\leq qr_0 + \|\Phi(\varphi, \lambda) - \varphi\| = \\
&= qr_0 + \left\| -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - \varphi \right\| = \\
&= qr_0 + \left\| \frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + \varphi \right\| = \\
&= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \cdot \|B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + a(\lambda)B(\lambda)\varphi]\|.
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой для оператора $B(\lambda)$ из условия 1). Получим:

$$\begin{aligned}
qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \cdot \|B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + a(\lambda)B(\lambda)\varphi]\| &= \\
= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \cdot \left\| B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + a(\lambda) \times \right. \\
&\quad \left. \times \{B + a(\lambda)A + \omega(\lambda)\}\varphi] \right\|.
\end{aligned}$$

Поскольку $\varphi \in N(B)$, то $B\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}
qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \cdot \left\| B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + a(\lambda) \times \right. \\
&\quad \left. \times \{B + a(\lambda)A + \omega(\lambda)\}\varphi] \right\| = \\
= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \cdot \left\| B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + a^2(\lambda)A\varphi + a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi] \right\|.
\end{aligned}$$

Прибавим и вычтем слагаемое $a^2(\lambda)b$, где b – элемент из условия 3). Получим:

$$\begin{aligned}
qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \cdot \left\| B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + a^2(\lambda)A\varphi + a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi] \right\| &= \\
= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \cdot \left\| B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - a^2(\lambda)b + \right.
\end{aligned}$$

$$+a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi + a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi \Big\|.$$

Сгруппируем слагаемые удобным нам образом:

$$\begin{aligned} & qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \cdot \Big\| B^{-1}(\lambda) \cdot [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - a^2(\lambda)b + \\ & + a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi + a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi] \Big\| = \\ & = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \Big\| B^{-1}(\lambda) [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - a^2(\lambda)b] + \\ & + B^{-1}(\lambda)a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi + B^{-1}(\lambda) \cdot [a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi] \Big\|. \end{aligned}$$

Добавим и вычтем слагаемое $R(0, \lambda)$:

$$\begin{aligned} & qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \Big\| B^{-1}(\lambda) [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - a^2(\lambda)b] + \\ & + B^{-1}(\lambda)a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi + B^{-1}(\lambda) \cdot [a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi] \Big\| \leq \\ & = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \Big\| B^{-1}(\lambda) [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda) + R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b] + \\ & + B^{-1}(\lambda)a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi + B^{-1}(\lambda) \cdot [a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi] \Big\| = \\ & = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \Big\| B^{-1}(\lambda) [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)] + B^{-1}(\lambda) [R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b] + \\ & + B^{-1}(\lambda)a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi + B^{-1}(\lambda) \cdot [a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi] \Big\|. \end{aligned}$$

В последнем выражении воспользуемся оценками нормы произведения и неравенством треугольника для норм. Получим:

$$\begin{aligned} & qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \Big\| B^{-1}(\lambda) [R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)] + B^{-1}(\lambda) [R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b] + \\ & + B^{-1}(\lambda)a(\lambda)\omega(\lambda)\varphi + B^{-1}(\lambda) \cdot [a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi] \Big\| \leq \\ & \leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| + \\ & + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b\| + \\ & + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot a(\lambda) \cdot \|\omega(\lambda)\varphi\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda) \cdot (a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi)\|. \end{aligned}$$

Сократим, где возможно, на $a(\lambda)$:

$$qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b\| + \\
& + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| a(\lambda) \|\omega(\lambda)\varphi\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda) \cdot (a^2(\lambda)b + a^2(\lambda)A\varphi)\| = \\
& = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| + \\
& + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b\| + \\
& + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\omega(\lambda)\varphi\| + a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda) \cdot (b + A\varphi)\|.
\end{aligned}$$

Второе, третье и четвертое слагаемые в последнем выражении бесконечно малые величины при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ в силу условий следствия 1.2.2. Действительно, второе слагаемое – бесконечно малая величина в силу условий 2) и 6). Третье слагаемое – бесконечно малая величина в силу условий 2) и 3). Четвертое слагаемое – бесконечно малая величина в силу условий 1) и 2).

Покажем, что из $b + A\varphi \in \overline{R(B)}$ следует:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)(b + A\varphi)\| = 0.$$

С этой целью рассмотрим оператор $a(\lambda)B^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in S$. В силу оценки (1.2.2), на любой последовательности $\{\lambda_n\}$ в S операторы $a(\lambda_n)B^{-1}(\lambda_n)$ являются равномерно ограниченными. Пусть элемент g принадлежит области значений оператора B , т. е. $g = Bx$, где $x \in D(B)$. Тогда

$$\begin{aligned}
a(\lambda)B^{-1}(\lambda)g &= a(\lambda)B^{-1}(\lambda)Bx = a(\lambda)B^{-1}(\lambda)(B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda))x \\
&= a(\lambda)x - a^2(\lambda)B^{-1}(\lambda)Ax - a(\lambda)B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x,
\end{aligned}$$

где справа нормы всех слагаемых бесконечно малые при $\lambda \rightarrow 0$. Итак, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \times \|B^{-1}(\lambda)g\| = 0$ при $\forall g \in R(B)$. Следовательно, на основании теоремы Банаха-Штейнгауза при $\forall g \in \overline{R(B)}$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)g\| = 0$.

Таким образом, сумма всех слагаемых, кроме первого, в нашей оценке является бесконечно малой величиной при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Следовательно, существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что:

$$\frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b\| + \\
& + \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\omega(\lambda)\varphi\| + a(\lambda)\|B^{-1}(\lambda) \cdot (b + A\varphi)\| \leq (1 - q)r_0.
\end{aligned}$$

В итоге и получаем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|V - \varphi\| \leq r_0$ выполняется:

$$\|\Phi(V, \lambda) - \varphi\| \leq qr_0 + (1 - q)r_0 \leq r_0.$$

Поскольку все условия принципа сжимающих отображений выполнены в области $\|V - \varphi\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S_0$, то уравнение (1.2.30) имеет в шаре $\|V - \varphi\| \leq r_0$ для каждого $\lambda \in S_0$ единственное решение. А следовательно, уравнение (1.2.1) имеет в области Ω_0 единственное решение для каждого $\lambda \in S_0$. $\square$

Пример 1.2.1. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение:

$$\int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^2(s) ds - t\lambda^3 = 0, \quad x(t) \in C_{[0,1]}. \quad (1.2.31)$$

Введем обозначения согласно вышеизложенному:

$$B(\lambda)x = \int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t),$$

$$R(x, \lambda) = - \int_0^1 x^2(s) ds - t\lambda^3.$$

Убедимся, что при любом вещественном λ из проколотой окрестности нуля $(-\rho, 0) \cup (0, \rho)$ оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный, и выполняется оценка 1.2.2. С этой целью будем рассматривать уравнение:

$$\int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) = f(t). \quad (1.2.32)$$

Введем обозначение:

$$C = \int_0^1 sx(s) ds, \quad (1.2.33)$$

тогда уравнение (1.2.32) примет вид:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} (f(t) - C \cdot t). \quad (1.2.34)$$

Для определения C подставим $x(t)$, заданное формулой (1.2.34), в равенство (1.2.33), заменив предварительно t на s :

$$C = \int_0^1 s \frac{1}{\lambda} (f(s) - C \cdot s) ds. \quad (1.2.35)$$

Уравнение (1.2.35) разрешим относительно C :

$$C = \frac{3}{3\lambda + 1} \int_0^1 s f(s) ds.$$

Подставляя C в выражение для $x(t)$, заданное формулой (1.2.34), получим решение для уравнения (1.2.32):

$$x(t) = \frac{f(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 s f(s) ds. \quad (1.2.36)$$

Выражение (1.2.36) является обратным оператором к $B(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$, записанным в явной форме:

$$B^{-1}(\lambda)f = \frac{f(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 s f(s) ds.$$

Убедимся теперь, что $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(\frac{1}{|\lambda|})$ при $\lambda \rightarrow 0$. Действительно, поскольку при $\lambda \rightarrow 0$ имеет место разложение:

$$\frac{1}{3\lambda + 1} = 1 - 3\lambda + 9\lambda^2 - 27\lambda^3 + \dots,$$

то

$$B^{-1}(\lambda)f = \frac{1}{\lambda} \left(f(t) - 3t \int_0^1 s f(s) ds \right) + O(1),$$

следовательно, $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(\frac{1}{|\lambda|})$ при $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \neq 0$.

Далее, согласно условиям теоремы 1.2.1, необходимо проверить выполнение соответствующих условий.

Убедимся, что в шаре $\|x\| \leq |\lambda|r$ выполняется условие 1) теоремы 1.2.1. Действительно:

$$\begin{aligned}
\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| &= \left\| -\int_0^1 x_1^2(s) ds - t\lambda^3 + \int_0^1 x_2^2(s) ds + t\lambda^3 \right\| = \\
&= \left\| -\int_0^1 [x_1^2(s) - x_2^2(s)] ds \right\| = \left\| \int_0^1 [x_1^2(s) - x_2^2(s)] ds \right\| \leq \\
&\leq \int_0^1 \|x_1^2(s) - x_2^2(s)\| ds \leq \|x_1(s) + x_2(s)\| \cdot \|x_1(s) - x_2(s)\| \cdot \int_0^1 ds \leq \\
&\leq [\|x_1(s)\| + \|x_2(s)\|] \cdot \|x_1(s) - x_2(s)\| \leq 2|\lambda|r\|x_1(s) - x_2(s)\|.
\end{aligned}$$

Здесь $L(\lambda) = 2|\lambda|$, следовательно, $L(\lambda) = O(|\lambda|)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Далее, согласно условию 2) теоремы 1.2.1, необходимо, чтобы $\|R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$. Поскольку в нашем примере $R(0, \lambda) = -t\lambda^3$, а в качестве $a(\lambda)$ выступает $a(\lambda) = |\lambda|$, то условие 2) теоремы 1.2.1 выполнено, так как $\|R(0, \lambda)\| = o(\lambda^2)$.

Таким образом, на основании теоремы 1.2.1 уравнение (1.2.31) имеет в некотором шаре $\|x(t)\| \leq |\lambda|r_0$, где $0 < r_0 \leq r$, при любом λ из области $0 < |\lambda| \leq \rho_0$, где $0 < \rho_0 \leq \rho$, единственное решение, которое будет являться минимальной ветвью среди всех малых решений данного уравнения.

Согласно заключению теоремы 1.2.1, искомое решение может быть построено методом последовательных приближений с нулевым начальным приближением. Построим несколько членов решения уравнения (1.2.31) методом последовательных приближений. Для этого преобразуем уравнение (1.2.31). Поскольку вид оператора $B^{-1}(\lambda)$ известен при $\lambda \neq 0$, то применим его к уравнению (1.2.31) слева:

$$x(t) - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 x^2(s) ds - \frac{1}{\lambda} t\lambda^3 - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 s \cdot \left[-\int_0^1 x^2(z) dz - s\lambda^3 \right] ds = 0$$

или

$$x(t) - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 x^2(s) ds - t\lambda^2 + \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 x^2(z) dz \cdot \int_0^1 s ds +$$

$$+ \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \cdot \lambda^3 \int_0^1 s^2 ds = 0,$$

или

$$x(t) - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 x^2(s) ds - t\lambda^2 + \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 x^2(s) ds \cdot \frac{1}{2} + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1} \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

или

$$x(t) - \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{3t}{2(3\lambda + 1)\lambda} \right] \int_0^1 x^2(s) ds - \left[t\lambda^2 - \frac{t\lambda^2}{3\lambda + 1} \right] = 0,$$

или

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2} \right] \int_0^1 x^2(s) ds + \frac{3t\lambda^3}{3\lambda + 1}.$$

Далее сделаем замену $x(t) = \lambda V$:

$$\lambda V = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2} \right] \int_0^1 \lambda^2 V^2(s) ds + \frac{3t\lambda^3}{3\lambda + 1}$$

или

$$V = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2} \right] \int_0^1 V^2(s) ds + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1}.$$

Далее последовательные приближения будем искать по формуле:

$$V_n = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2} \right] \int_0^1 V_{n-1}^2(s) ds + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1},$$

выбрав в качестве начального приближения $V_0 = 0$.

$$V_1(t) = \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1} = 3t\lambda^2 \left[1 - 3\lambda + 9\lambda^2 - 27\lambda^3 + \dots \right] = 3t\lambda^2 + o(\lambda^2),$$

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2} \right] \int_0^1 9s^2\lambda^4 ds + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1} = \\ &= 9\lambda^4 \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2} \right] \cdot \frac{1}{3} + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1} = \\ &= 3\lambda^4 \left[1 - \frac{3t}{2} (1 - 3\lambda + 9\lambda^2 - 27\lambda^3 + \dots) \right] + 3t\lambda^2 [1 - 3\lambda + 9\lambda^2 - 27\lambda^3 + \dots] = \end{aligned}$$

$$= 3t\lambda^2 - 9t\lambda^3 + o(\lambda^3),$$

$$\begin{aligned} V_3(t) &= \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2}\right] \int_0^1 \left(3\lambda^2 - 9\lambda^3\right)^2 \cdot s^2 ds + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1} = \\ &= \left[1 - \frac{3}{2}t(1 - 3\lambda + 9\lambda^2 - 27\lambda^3 + \dots)\right] \cdot \left(9\lambda^4 - 54\lambda^5 + 81\lambda^6\right) \cdot \frac{1}{3} + \\ &+ 3t\lambda^2 \left[1 - 3\lambda + 9\lambda^2 - 27\lambda^3 + \dots\right] = 3t\lambda^2 - 9t\lambda^3 + \left(3 - \frac{3t}{2} \cdot 3 + 3t \cdot 9\right)\lambda^4 + o(\lambda^4) = \\ &= 3t\lambda^2 - 9t\lambda^3 + \frac{45t + 6}{2}\lambda^4 + o(\lambda^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_4(t) &= \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2}\right] \int_0^1 \left[3s\lambda^2 - 9s\lambda^3 + \frac{45s + 6}{2}\lambda^4\right]^2 ds + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1} = \\ &= \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2}\right] \int_0^1 \left[9s^2\lambda^4 - 54s^2\lambda^5 + \dots\right] ds + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1} = \\ &= \left[1 - \frac{3t}{6\lambda + 2}\right] \left(9\lambda^4 \cdot \frac{1}{3} - 54\lambda^5 \cdot \frac{1}{3} + \dots\right) + \frac{3t\lambda^2}{3\lambda + 1} = \\ &= \left[1 - \frac{3t}{2}(1 - 3\lambda + 9\lambda^2 - 27\lambda^3 + \dots)\right] \left(3\lambda^4 - 18\lambda^5 + \dots\right) + \\ &+ 3t\lambda^2(1 - 3\lambda + 9\lambda^2 - 27\lambda^3 + \dots) = 3t\lambda^2 - 9t\lambda^3 + \left(27t + 3 - \frac{9t}{2}\right)\lambda^4 - \\ &- 3t \cdot 27\lambda^5 + 3 \cdot \frac{3t}{2} \cdot 3\lambda^5 - 18\lambda^5 + 18\frac{3t}{2}\lambda^5 + o(\lambda^5) = \\ &= 3t\lambda^2 - 9t\lambda^3 + \frac{45t + 6}{2}\lambda^4 - \frac{81t + 36}{2}\lambda^5 + o(\lambda^5). \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая сделанную замену $x(t) = \lambda V(t)$, минимальная ветвь решения уравнения (1.2.31) будет иметь вид:

$$x(t) = 3t\lambda^3 - 9t\lambda^4 + \frac{45t + 6}{2}\lambda^5 - \frac{81t + 36}{2}\lambda^6 + \dots$$

□

Пример 1.2.2. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin sx(s) ds + (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)x(t) - x^4(t) - f(t, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad (1.2.37)$$

$$x(t) \in C_{[0, \pi]},$$

где вектор $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $a_i \neq 0$. Функция $f(t, \lambda_1, \lambda_2)$ непрерывна по t и аналитична по λ_1, λ_2 . Секториальная окрестность S , в которой ищется решение, определяется условием $\text{sign } \lambda_i = \text{sign } a_i$.

Согласно введенным выше обозначениям:

$$B(\lambda)x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin s x(s) ds + (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)x(t),$$

$$R(x, \lambda) = -x^4(t) - f(t, \lambda_1, \lambda_2).$$

Убедимся, что в секториальной окрестности нуля S оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный, и выполнена оценка (1.2.2), где $a(\lambda) = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2$. С этой целью будем рассматривать уравнение:

$$B(\lambda)x = h(t). \quad (1.2.38)$$

Введем обозначение

$$\int_0^\pi \sin s x(s) ds = C, \quad (1.2.39)$$

тогда уравнение (1.2.38) примет вид:

$$\frac{2}{\pi} \sin t \cdot C + (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)x(t) = h(t),$$

или

$$x(t) = \frac{1}{a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2} \left[h(t) - \frac{2C}{\pi} \sin t \right]. \quad (1.2.40)$$

Для определения C подставим (1.2.40) в (1.2.39), предварительно заменив t на s :

$$\int_0^\pi \sin s \frac{1}{a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2} \left[h(s) - \frac{2C}{\pi} \sin s \right] ds = C.$$

Будем решать получившееся алгебраическое уравнение относительно C :

$$\frac{1}{a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2} \int_0^\pi \sin s h(s) ds - \frac{2C}{\pi(a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)} \int_0^\pi \sin^2 s ds = C.$$

Поскольку:

$$\int_0^\pi \sin^2 s ds = \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2s)}{2} ds = \frac{1}{2} s \Big|_0^\pi - \frac{1}{4} \sin(2s) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

то алгебраическое уравнение относительно C примет вид:

$$\frac{1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2} \int_0^\pi \sin s h(s) ds - \frac{C}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2} = C.$$

Перенесем все слагаемые, зависящие от C , вправо и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2} \int_0^\pi \sin s h(s) ds = \left(\frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + 1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2} \right) C.$$

В результате получим C :

$$C = \frac{1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + 1} \int_0^\pi \sin s h(s) ds.$$

Полученное C подставим в (1.2.40):

$$x(t) = \frac{1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2} \left[h(t) - \frac{2 \sin t}{\pi(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + 1)} \int_0^\pi \sin s h(s) ds \right].$$

Таким образом, мы нашли вид обратного оператора для $B(\lambda)$ в области S :

$$B^{-1}(\lambda)h(t) = \frac{1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2} \left[h(t) - \frac{2 \sin t}{\pi(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + 1)} \int_0^\pi \sin s h(s) ds \right].$$

Оператор $B^{-1}(\lambda)$ удовлетворяет оценке (1.2.2) при $a(\lambda) = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$, где $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 > 0$ в силу условия задачи.

Проверим, что в шаре $\|x\| \leq (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)r$ будет выполняться условие (1.2.4). Действительно:

$$\begin{aligned} \|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| &= \|x_1^4(t) - x_2^4(t)\| \leq \\ &\leq \|x_1^2(t) + x_2^2(t)\| \cdot \|x_1(t) + x_2(t)\| \cdot \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \\ &\leq \left(\|x_1(t)\|^2 + \|x_2(t)\|^2 \right) \cdot \left(\|x_1(t)\| + \|x_2(t)\| \right) \cdot \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \\ &\leq 2(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^2 r^2 2(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)r \|x_1(t) - x_2(t)\| = \\ &= 4(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^3 r^2 \cdot r \cdot \|x_1(t) - x_2(t)\|. \end{aligned}$$

Тогда, согласно обозначениям теоремы, $L(\lambda_1, \lambda_2) = 4(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^3 r^2$, и, очевидно, $L(\lambda_1, \lambda_2) = O(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)$ при $|\lambda_1| + |\lambda_2| \rightarrow 0$.

Если $\|f(t, \lambda_1, \lambda_2)\| = o((a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^2)$ при $|\lambda_1| + |\lambda_2| \rightarrow 0$, то будут выполнены все условия теоремы 1.2.1.

Если $f(t, \lambda_1, \lambda_2) = \sin t \cdot \sum_{i+k=2} a_{ik} \lambda_1^i \lambda_2^k + o((a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^2)$ при $|\lambda_1| + |\lambda_2| \rightarrow 0$, то будут выполнены все условия теоремы 1.2.2.

И в том и в другом случаях интегральное уравнение будет иметь решение $x(t, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 0$ при $|\lambda_1| + |\lambda_2| \rightarrow 0$, которое будет являться искомой минимальной ветвью и может быть построено методом последовательных приближений по формулам, указанным в соответствующих теоремах. $\square$

Приведенный выше пример показывает, что в случае $n > 2$ выполняется теорема 1.2.1, а в случае $n = 2$ оказывается полезной теорема 1.2.2, при этом теорема 1.2.1 перестает работать. Таким образом, одна теорема не является частным случаем другой и наоборот.

Пример 1.2.3. Пусть $X = Y = H$. Рассмотрим уравнение

$$(B_0 + a(\lambda)B_1)x = R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (1.2.41)$$

где B_0 — самосопряженный неотрицательный оператор, B_1 — самосопряженный положительный оператор, т. е. $(B_0x, x) \geq 0$, $(B_1x, x) \geq \gamma(x, x)$ для $\forall x \in H$; $\gamma > 0$, $\gamma = \text{const}$.

Нелинейный оператор $R(x, \lambda)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1.2.1, $\|b(\lambda)\| = o(a^2(\lambda))$. Уравнение (1.2.41) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.1, причем $\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| \leq 1/(\gamma a(\lambda))$. $\square$

1.3 Усиление результатов параграфов 1 и 2 с помощью замены общего вида

Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — линейное нормированное пространство. В текущем параграфе будем рассматривать нелинейное операторное уравнение

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (1.3.1)$$

где $B(\lambda)$ — замкнутый линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения, не зависящей от параметра λ . Нелинейный

оператор $R(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ в окрестности точки $(0,0)$, $R(0,0) = 0$. Функция $b(\lambda)$ со значениями в Y непрерывна в нуле, $b(0) = 0$.

Будем полагать, что

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ для } \forall \lambda \in S, \quad (1.3.2)$$

где $a(\lambda)$ положительный функционал, непрерывный в окрестности нуля, $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$, т.е. $a(0) = 0$; $S \subset \Lambda$, S – секториальная окрестность нуля.

Требуется построить минимальную ветвь малого решения $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ уравнения (1.3.1).

В этом параграфе, следуя методу предыдущих результатов, искомая минимальная ветвь решений тоже строится в секториальной окрестности особой точки (в частности, точки ветвления решений) методом последовательных приближений. Теоремы этого параграфа применимы в некоторых случаях к более широкому классу уравнений.

Прежде мы строили решение, предполагая, что оно имеет вид $x = a(\lambda)V$, где $a(\lambda)$ определялся из оценок аналогов для (1.3.2). Соответственно, возникает вопрос, обязательно ли искать решение в виде $x = a(\lambda)V$? Что если не ограничиваться и сделать более общее предположение, а конкретные условия определить уже из необходимости удовлетворить условия принципа сжимающих отображений. Например, искать решение в виде $x = \nu(\lambda)V$, где на $\nu(\lambda)$ не накладывается никаких ограничений, кроме как что $\nu(\lambda) > 0$ при $\lambda \in S$ и $\nu(0) = 0$.

В теоремах 1.3.1, 1.3.2 этого параграфа доказано, что в ряде случаев при условии (1.3.2) эффективной оказывается замена $x = a(\lambda)^{\frac{1}{l-1}}y(\lambda)$, где l – определенное число, $l > 1$.

Теорема 1.3.1. Пусть в секториальной окрестности нуля S для уравнения (1.3.1) выполнено условие (1.3.2) и пусть:

1) существует непрерывная функция $\nu(\lambda) : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\nu(0) = 0$ такая, что в шаре $\|x\| \leq r$ при $\lambda \in S$ выполнено неравенство

$$\|R(\nu(\lambda)x_1, \lambda) - R(\nu(\lambda)x_2, \lambda)\| \leq C \cdot \nu^l(\lambda) \cdot r \|x_1 - x_2\|,$$

где $l > 1$, $C > 0$ – постоянная;

2) имеет место оценка $\|b(\lambda)\| = o(a^{\frac{1}{l-1}}(\lambda))$.

Тогда в некоторой окрестности нуля $\|x\| \leq r_0 \leq r$ для $\forall \lambda \in S_0 \subseteq S$ существует малое решение уравнения (1.3.1) $x^*(\lambda)$, которое является минимальной ветвью. Это решение можно найти по формуле $x = a^{\frac{1}{l-1}}(\lambda)y$, где y является пределом последовательности

$$y_n = \left(\frac{1}{a(\lambda)} \right)^{1/(l-1)} \cdot B^{-1}(\lambda) \left[R(a^{\frac{1}{l-1}}(\lambda) y_{n-1}, \lambda) + b(\lambda) \right], \quad y_0 = 0.$$

При этом не исключено существование в области S и других малых решений.

Доказательство. Поскольку в области S оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный, то, используя замену $x = \nu(\lambda)y$, где $\nu(\lambda)$ некоторый непрерывный функционал, не обращающийся в ноль при $\lambda \in S$, приведем уравнение (1.3.1) к эквивалентному виду:

$$y = \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) [R(\nu(\lambda)y, \lambda) + b(\lambda)].$$

Обозначим оператор в правой части последнего выражения через $\Phi(y, \lambda)$. Тогда наше уравнение примет вид

$$y = \Phi(y, \lambda). \quad (1.3.3)$$

Выясним условия на $\nu(\lambda)$, при которых оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием. Учитывая, что мы производим оценку в окрестности нуля $\|y\| \leq r$ и условие 1) теоремы, имеем:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| = \\ & = \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) \left[R(\nu(\lambda)y_1, \lambda) + b(\lambda) \right] - \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) \left[R(\nu(\lambda)y_2, \lambda) + b(\lambda) \right] \right\| = \\ & = \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) \left[R(\nu(\lambda)y_1, \lambda) - R(\nu(\lambda)y_2, \lambda) \right] \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{\nu(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|R(\nu(\lambda)y_1, \lambda) - R(\nu(\lambda)y_2, \lambda)\| \leq \\ & \leq \frac{1}{\nu(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot C \cdot \nu^l(\lambda) \cdot r \cdot \|y_1 - y_2\| = \end{aligned}$$

$$= \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot C \cdot \nu^{l-1}(\lambda) \cdot r \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Выберем $\nu(\lambda)$ так, чтобы при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ имела место оценка $\nu(\lambda) = O(a^{1/(l-1)}(\lambda))$. Тогда $\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot C \cdot \nu^{l-1}(\lambda) \leq C_1$, где $C_1 > 0 - const$. Фиксируем $0 < q < 1$ и выбираем радиус шара $r_0 \leq r$, в котором мы исследуем уравнение (1.3.3) так, чтобы

$$r_0 = \min \left\{ \frac{q}{C_1}, r \right\}.$$

Получим, что оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием в шаре $\|y\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$ с коэффициентом сжатия q .

Следующим шагом убедимся, что значения оператора $\Phi(y, \lambda)$ не выходят из шаров радиуса r_0 для всех элементов y таких, что $\|y\| \leq r_0$. Учитывая, что оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием, получаем:

$$\|\Phi(y, \lambda)\| \leq \|\Phi(y, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) b(\lambda) \right\|.$$

Так как $\nu(\lambda) = O(a^{1/(l-1)}(\lambda))$, $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(1/a(\lambda))$, то второе слагаемое в последнем выражении будет сколь угодно малой величиной при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, если $\|b(\lambda)\| = o(a^{l/(l-1)}(\lambda))$. То есть если $\|b(\lambda)\| = o(a^{l/(l-1)}(\lambda))$, то существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при любом $\lambda \in S_0$ для всех y в шаре $\|y\| \leq r_0$ будет выполнено неравенство

$$\|\Phi(y, \lambda)\| \leq qr_0 + (1 - q)r_0 = r_0.$$

□

Необходимо отметить, что в данной теореме не требуется условие существования производной Фреше оператора $R(x, \lambda)$, однако если такая производная существует и является непрерывной по x и λ в окрестности нуля, то получаем следующую теорему:

Теорема 1.3.2. Пусть для уравнения (1.3.1) в секториальной окрестности нуля S имеет место оценка (1.3.2) и пусть:

1) существует непрерывная в нуле производная Фреше по первому аргументу нелинейного оператора $R(x, \lambda)$, и имеет место оценка

$$\|R_x(x, \lambda)\| = O(\|x\|^l) \text{ при } \|x\| \rightarrow 0, l > 0;$$

2) имеет место оценка $\|b(\lambda)\| = o(a^{\frac{1}{l-1}}(\lambda))$.

Тогда в некоторой окрестности нуля $\|x\| \leq r_0 \leq r$ для $\forall \lambda \in S_0 \subset S$ существует малое решение уравнения (1.3.1) $x^*(\lambda)$, которое является минимальной ветвью. Это решение можно найти по формуле $x = a^{\frac{1}{l}}(\lambda)y$, где y является пределом последовательности

$$y_n = \left(\frac{1}{a(\lambda)}\right)^{1/l} \cdot B^{-1}(\lambda) \left[R(a^{\frac{1}{l}}(\lambda) y_{n-1}, \lambda) + b(\lambda) \right], \quad y_0 = 0.$$

При этом не исключено существование в области S и других малых решений уравнения (1.3.1).

Доказательство. Поскольку оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\forall \lambda \in S$, то уравнение (1.3.1) перепишем в следующем виде:

$$x = B^{-1}(\lambda)[R(x, \lambda) + b(\lambda)]. \quad (1.3.4)$$

Далее в уравнении (1.3.4) сделаем замену $x = \nu(\lambda)y$, где функция $\nu(\lambda)$ – непрерывна по $\lambda \in S$ и $\nu(0) = 0$. Условия на $\nu(\lambda)$ мы получим в процессе доказательства теоремы, которые будут вызваны необходимостью удовлетворить соответствующие условия принципа сжимающих отображений, требуемые для доказательства теоремы. Итак, в результате указанной замены, получим уравнение:

$$\nu(\lambda)y = B^{-1}(\lambda)[R(\nu(\lambda)y, \lambda) + b(\lambda)]$$

или

$$y = \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda)[R(\nu(\lambda)y, \lambda) + b(\lambda)]. \quad (1.3.5)$$

В (1.3.5) обозначим правую часть, как оператор $\Phi(y, \lambda)$. Тогда уравнение (1.3.5) примет вид:

$$y = \Phi(y, \lambda). \quad (1.3.6)$$

Далее покажем, что к уравнению (1.3.6) применим принцип сжимающих отображений. Параллельно определим условия на функцию $\nu(\lambda)$. Первым делом покажем, что существует $0 < r_0 \leq r$ такое, что для $\forall \lambda \in S$ в шаре $\|y\| \leq r_0$ оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжимающим. Действительно, применяя

оценку нормы произведения, интегральную теорему Лагранжа и первое условие текущей теоремы, получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| &= \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) [R(\nu(\lambda)y_1, \lambda) + b(\lambda)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) [R(\nu(\lambda)y_2, \lambda) + b(\lambda)] \right\| = \\
&= \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) [R(\nu(\lambda)y_1, \lambda) - R(\nu(\lambda)y_2, \lambda)] \right\| \leq \\
&\leq \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) \right\| \cdot \|R(\nu(\lambda)y_1, \lambda) - R(\nu(\lambda)y_2, \lambda)\| \leq \\
&\leq \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) \right\| \cdot \left\| \int_0^1 R_x(\nu(\lambda)(y_2 + \Theta(y_1 - y_2)), \lambda) d\Theta \cdot \nu(\lambda)(y_1 - y_2) \right\| \leq \\
&\leq \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) \right\| \cdot \int_0^1 \|R_x(\nu(\lambda)(y_2 + \Theta(y_1 - y_2)), \lambda)\| d\Theta \cdot \nu(\lambda) \|y_1 - y_2\| \leq \\
&\leq \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \int_0^1 C |\nu(\lambda)|^l \|y_2 + \Theta(y_1 - y_2)\|^l d\Theta \cdot \|y_1 - y_2\| \leq \\
&\leq C \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot |\nu(\lambda)|^l \int_0^1 [\|y_1\| + \Theta(\|y_1\| + \|y_2\|)]^l d\Theta \|y_1 - y_2\|.
\end{aligned}$$

Здесь C – некоторая константа, возникающая в силу оценки из условия 1) данной теоремы. Выберем в качестве $\nu(\lambda)$ любое выражение, удовлетворяющее условию $\nu(\lambda) = O(a^{1/l}(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$. Кроме того, воспользуемся тем, что все оценки производятся в шаре $\|y\| \leq r$. Получим:

$$\|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| \leq C_1 \cdot r^l \int_0^1 [1 + 2\Theta]^l d\Theta \|y_1 - y_2\|.$$

Константа C_1 появилась после сокращения выражений $\|B^{-1}(\lambda)\|$ и $|\nu(\lambda)|^l$, которые после введения условия на $\nu(\lambda)$ в виде оценки, зависящей от $a(\lambda)$, стали иметь порядки $O(1/a(\lambda))$ и $O(a(\lambda))$ соответственно. После вычисления интеграла получаем:

$$\|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| \leq C_1 \cdot r^l \cdot \frac{3^{l+1} - 1}{2(l+1)} \|y_1 - y_2\|.$$

Теперь пусть $0 < q < 1$ фиксированное, выберем радиус r_0 по правилу:

$$r_0 = \min \left\{ r, \frac{2q(l+1)}{C_1 \cdot r^{l-1} \cdot (3^{l+1} - 1)} \right\}.$$

Тогда оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжимающим в шаре $\|y\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$.

Следующим шагом убедимся, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что значения оператора $\Phi(y, \lambda)$ не выходят из шаров радиуса r_0 для всех элементов y таких, что $\|y\| \leq r_0$. Учитывая, что оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием, получаем:

$$\|\Phi(y, \lambda)\| \leq \|\Phi(y, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) b(\lambda) \right\|.$$

Так как $\nu(\lambda) = O(a^{1/(l-1)}(\lambda))$, $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(1/a(\lambda))$ и $\|b(\lambda)\| = o(a^{l/(l-1)}(\lambda))$, то второе слагаемое в последнем выражении будет сколь угодно малой величиной при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. То есть существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при любом $\lambda \in S_0$ для всех y в шаре $\|y\| \leq r_0$ будет выполнено неравенство

$$\left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) b(\lambda) \right\| \leq (1 - q)r_0,$$

что в свою очередь приводит к:

$$\|\Phi(y, \lambda)\| \leq qr_0 + (1 - q)r_0 = r_0.$$

После того, как мы показали, что к уравнению (1.3.6) можно применять принцип сжимающих отображений, будем искать решение в виде предела последовательности $\{y_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $y_n = \Phi(y_{n-1}, \lambda)$, а в качестве начального приближения выберем $y_0 = 0$ или любой другой элемент из шара $\|y\| \leq r_0$. То, что предел последовательности существует, гарантирует принцип сжимающих отображений. Поэтому решение уравнения (1.3.6) обозначим $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Но тогда решение уравнения (1.3.1) будет иметь вид $x = a^{1/l}(\lambda)y$. Кроме указанного решения уравнения (1.3.1), в общем случае могут существовать и другие малые решения уравнения (1.3.1), поскольку уравнение (1.3.1) в силу оценки (1.3.2) не относится к регулярному случаю. Но из всех малых решений найденное нами решение будет минимальной ветвью. $\square$

Пример 1.3.1. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \int_a^b K(x, s) u(t, s) ds = f(u(t, x), t, x, \lambda), \\ u(t, x)|_{t=0} = u(t, x)|_{t=1} = 0. \end{cases}$$

Параметр λ — является элементом пространства действительных чисел $\mathbb{R}$; $t, x \in \mathbb{R}$; $u(t, x)$ — непрерывная, дважды непрерывно-дифференцируемая по t функция, обращающаяся в ноль при $t = 0$ и $t = 1$; f — нелинейная непрерывная функция.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} Bu &= \int_a^b K(x, s) u(t, s) ds, \\ Cu &= \begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}, \\ u(t, x)|_{t=0} = u(t, x)|_{t=1} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть ядро $K(x, s)$ оператора B удовлетворяет условию

$$\int_a^b K(x, z) K(z, t) dz = 0, \quad (1.3.7)$$

тогда оператор B является нильпотентным и удовлетворяет условию $B^2 = 0$. Примером оператора, удовлетворяющего условию (1.3.7), может служить, например, функция вида $K(x, s) = \cos x \cdot \sin s$ при $a = 0$, $b = \pi$.

Краевая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = m(t, x), \\ u(t, x)|_{t=0} = u(t, x)|_{t=1} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное непрерывное решение вида

$$u(t, x) = \int_0^1 G(t, s) m(s, x) ds,$$

где функция Грина имеет вид

$$G(t, x) = \begin{cases} t(s - 1), & 0 \leq t \leq s, \\ (t - 1)s, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно, оператор C имеет ограниченный обратный оператор вида

$$C^{-1}u = \int_0^1 G(t, s)u(s, x) ds,$$

перестановочный с оператором B .

Согласно введенным выше обозначениям, исходное уравнение имеет вид:

$$(\lambda C + B)u = f. \quad (1.3.8)$$

Из леммы 1.1.3 следует, что оператор $\lambda C + B$, стоящий в левой части данного уравнения, имеет ограниченный обратный, для которого выполнена оценка

$$\|(\lambda C + B)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-2}).$$

Пусть функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 1.3.2, а именно, пусть функция $f(u(t, x), t, x, \lambda)$ имеет непрерывную производную по первому аргументу, для которой выполняется:

$$\|f_u(u(t, x), t, x, \lambda)\| = O(\|u(t, x)\|^l) \text{ при } \|u(t, x)\| \rightarrow 0, l > 0,$$

а также пусть имеет место оценка:

$$\|f(0, t, x, \lambda)\| = o(\lambda^{\frac{l}{l-1}}).$$

Тогда будут выполнены все условия теоремы 1.3.2, и в некотором шаре $\|u\| \leq r_0$ для любого λ из проколотой окрестности нуля S_0 существует малое решение данного уравнения, которое является минимальной ветвью из всех малых решений. Укажем формулу для поиска этого решения методом последовательных приближений. Для этого найдем в явном виде выражение для оператора $(\lambda C + B)^{-1}$, для чего воспользуемся формулой, полученной в лемме 1.1.3. Поскольку в нашем случае $n = 2$, то данная формула будет иметь вид:

$$u = \lambda^{-1}C^{-1}f - \lambda^{-2}C^{-2}Bf. \quad (1.3.9)$$

Согласно конкретному виду операторов C^{-1} и B , имеем

$$C^{-2}u = \int_0^1 G(t, s) \int_0^1 G(s, z)u(z, x) dz ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 G(t, s) G(s, z) ds \right) u(z, x) dz = \int_0^1 G_1(t, z) u(z, x) dz, \\
C^{-2} B f u &= \int_0^1 G_1(t, z) \int_a^b K(x, s) f(u(z, s), z, s, \lambda) ds dz, \\
C^{-1} f u &= \int_0^1 G(t, s) f(u(s, x), s, x, \lambda) ds dz.
\end{aligned}$$

Тогда, согласно формуле (1.3.9), исходное уравнение примет вид

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 G(t, s) f(u(s, x), s, x, \lambda) ds - \\
&- \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 G_1(t, z) \int_a^b K(x, s) f(u(z, s), z, s, \lambda) ds dz,
\end{aligned}$$

и по теореме 1.3.2 минимальную ветвь можно найти по формуле $u(t, x) = \lambda^{\frac{1}{l}} v(t, x)$, где $v(t, x)$ является пределом последовательности:

$$\begin{aligned}
v_n(t, x) &= \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{1+1/l} \int_0^1 G(t, s) f(\lambda^{1/l} v_{n-1}(s, x), s, x, \lambda) ds - \\
&- \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{2+1/l} \int_0^1 G_1(t, z) \int_a^b K(x, s) f(\lambda^{1/l} v_{n-1}(z, s), z, s, \lambda) ds dz, \quad v_0 = 0.
\end{aligned}$$

□

Глава 2

Минимальные ветви решений нелинейных уравнений в случае фредгольмова оператора

Пусть теперь уравнение (1.1.1) имеет вид:

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda). \quad (2.0.1)$$

Замкнутый линейный оператор $B(\lambda)$ имеет плотную в банаховом пространстве X область определения, не зависящую от параметра λ , являющегося элементом линейного нормированного пространства Λ . $B(0)$ — фредгольмов оператор, $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в подпространстве нулей $N(B(0))$, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в дефектном подпространстве $N^*(B(0))$. Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ непрерывен по x и λ в окрестности нуля, $R(0, 0) = 0$. При значениях параметра λ из секториальной окрестности нуля $S \subset \Lambda$ имеет место неравенство:

$$\|R(\tau x_1, \lambda) - R(\tau x_2, \lambda)\| \leq L(r) \cdot \tau^l \cdot \|x_1 - x_2\|, \quad (2.0.2)$$

где x_1, x_2 элементы из шара $\|x\| \leq r$, $L(r) = O(r)$, τ — величина, не зависящая от x_1 и x_2 . Функция $b(\lambda) : \Lambda \rightarrow Y$ определена и непрерывна в окрестности точки $\lambda = 0$, $b(0) = 0$. Так как $B(0)$ — фредгольмов оператор, то нетрудно указать способ проверки условия (1.2.2) построением обратного оператора $B^{-1}(\lambda)$. Действительно, согласно обобщенной лемме Шмидта ([73], §21, п.21.4), ограниченный оператор Треногина имеет вид:

$$\Gamma = \left(B(0) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}.$$

Здесь $\langle \varphi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $\langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$.

Введем обозначение

$$A(\lambda) \stackrel{def}{=} B(0) - B(\lambda). \quad (2.0.3)$$

Пусть при $x \in D(B(0))$:

$$\text{I. } \|A(\lambda)x\| \leq c(\lambda)(\|x\| + b\|B(0)x\|),$$

где $c(\lambda) : S \subset \Lambda \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывный функционал, $c(0) = 0$, $b \geq 0$.

Заметим, что в силу условия I и ограниченности оператора $\Gamma \lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} A(\lambda)\Gamma = 0$, и оператор $I - A(\lambda)\Gamma$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S_0 \subseteq S$, где $\|A(\lambda)\Gamma\| \leq q < 1$, по теореме Банаха об обратном операторе.

Пусть

$$\text{II. } \left| \det \left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda)\varphi_i, \psi_k \right\rangle_{i,k=\overline{1,n}} \right| = \Delta(\lambda),$$

где $\Delta(\lambda) \sim a(\lambda)$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, $a(\lambda)$, как и в предыдущих главах, положительный непрерывный функционал, $a(0) = 0$.

Лемма 2.0.1. Пусть $B(0)$ — фредгольмов оператор, и выполнены условия I, II. Тогда оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, и выполнена оценка (1.2.2).

Доказательство. Будем искать решение линейного уравнения

$$B(\lambda)x = f \quad (2.0.4)$$

при $\lambda \in S$ в виде

$$x = \Gamma u + \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i, \quad (2.0.5)$$

где $\langle u, \psi_k \rangle = 0$, $k = \overline{1, n}$ [7, стр. 336–341].

Подставим (2.0.5) в уравнение (2.0.4):

$$B(\lambda)(\Gamma u + \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i) = f.$$

С учетом (2.0.3) получим

$$(B(0) - A(\lambda))(\Gamma u + \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i) = f.$$

Раскроем скобки

$$B(0)\Gamma u + B(0) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i - A(\lambda)\Gamma u - A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i = f.$$

Поскольку $\varphi_i \in N(B)$, $i = \overline{1, n}$, то второе слагаемое равно нулю. Перенесем все слагаемые, не зависящие от u , в правую часть:

$$B(0)\Gamma u - A(\lambda)\Gamma u = f + A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i.$$

Преобразуем оператор $B(0)$, прибавляя и вычитая оператор $\sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$:

$$(B(0) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i)\Gamma u - A(\lambda)\Gamma u = f + A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i.$$

Тогда, учитывая вид оператора Γ , получим:

$$u - \sum_{i=1}^n \langle \Gamma u, \gamma_i \rangle z_i - A(\lambda)\Gamma u = f + A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i.$$

Поскольку $\langle u, \psi_k \rangle = 0$, $k = \overline{1, n}$ и $\Gamma^* \gamma_i = \psi_i$, то

$$\langle \Gamma u, \gamma_i \rangle = \langle u, \Gamma^* \gamma_i \rangle = \langle u, \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, уравнение примет вид:

$$u - A(\lambda)\Gamma u = f + A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i$$

или

$$(I - A(\lambda)\Gamma)u = f + A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i.$$

Как было замечено выше, оператор $I - A(\lambda)\Gamma$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S_0 \subseteq S$. Тогда

$$u = (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} (f + A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i).$$

При этом вектор $g = (g_1, \dots, g_n)$ определится при $\lambda \in S_0$ из условия $\langle u, \psi_k \rangle = 0$, $k = \overline{1, n}$, что приведет нас к следующей системе относительно g :

$$\left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} (f + A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i), \psi_k \right\rangle = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

или, перенеся в правую часть слагаемые, не зависящие от g :

$$\left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i, \psi_k \right\rangle = - \left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} f, \psi_k \right\rangle, \quad k = \overline{1, n}$$

или, после внесения под знак суммы операторов $A(\lambda)$ и $(I - A(\lambda)\Gamma)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n \left[(I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda) g_i \varphi_i \right], \psi_k \right\rangle = \\ = - \left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} f, \psi_k \right\rangle, \quad k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

или в силу линейности:

$$\sum_{i=1}^n \left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda) g_i \varphi_i, \psi_k \right\rangle = - \left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} f, \psi_k \right\rangle, \quad k = \overline{1, n}.$$

Так как g_i — являются числами, то в итоге приходим к следующей системе:

$$\sum_{i=1}^n \left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda) \varphi_i, \psi_k \right\rangle g_i = - \left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} f, \psi_k \right\rangle, \quad k = \overline{1, n}.$$

Полученная система алгебраических уравнений относительно вектора $g = (g_1, \dots, g_n)$ согласно условию II имеет невырожденную матрицу и, следовательно, имеет единственное решение, для которого в силу того же условия II имеет место оценка $\|g\| = O(\frac{1}{a(\lambda)})$. $\square$

Далее пусть $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$,

где $\|B_1 x\| \leq \alpha (\|x\| + \beta \|B_0 x\|)$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, B_0 — фредгольмов оператор, $c(0) = 0$.

Пусть ([7], гл.9)

III. Элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p_i}$ образуют полный B_1 — жорданов набор фредгольмова оператора B_0 , а функционалы $\{\psi_i^{(k)}\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p_i}$ образуют полный B_1^* — жорданов набор оператора B_0^* .

Напомним ([7], гл.9), что не ограничивая общности в условии III далее можно считать $\varphi_i^{(k)} = (\Gamma B_1)^{k-1} \varphi_i^{(1)}$, $\psi_i^{(k)} = (\Gamma^* B_1^*)^{k-1} \psi_i^{(1)}$, $k = \overline{2, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, $\langle B_1 \varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} \rangle = \delta_{ik}$, $\langle B_1^* \psi_i^{(p_i)}, \varphi_k^{(1)} \rangle = \delta_{ik}$, $\Gamma = \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}$, $\gamma_i = B_1^* \psi_i^{(p_i)}$, $z_i = B_1 \varphi_i^{(p_i)}$.

Определение 2.0.1. *Линейный оператор $\Gamma(\lambda)$ называется левым асимптотическим регуляризатором оператор-функции $B(\lambda)$, если*

$$\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} \Gamma(\lambda) B(\lambda) x = x \text{ при } \forall x \in D(B).$$

Аналогично вводится правый асимптотический регуляризатор $B(\lambda)$.

Если $\lambda = 0$ является изолированной особой фредгольмовой точкой оператор-функции $B(\lambda)$, то асимптотические регуляризаторы можно построить в явном виде.

Лемма 2.0.2. Пусть $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$, и условие III выполнено. Тогда в окрестности $0 < |c(\lambda)| < \varepsilon$ существуют ограниченный обратный оператор $B^{-1}(\lambda)$, а также левый и правый регуляризаторы $\Gamma_l(\lambda)$ и $\Gamma_r(\lambda)$ оператора $B(\lambda)$, определяемые формулами:

$$\Gamma_l(\lambda) = \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \left\langle \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \right\rangle \varphi_i^{(1)}, \quad (2.0.6)$$

$$\Gamma_r(\lambda) = \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \left\langle \cdot, \psi_i^{(1)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-s)}. \quad (2.0.7)$$

При этом

$$B^{-1}(\lambda) = \Gamma_r(\lambda)(I - c(\lambda)B_1\Gamma)^{-1}, \quad (2.0.8)$$

где $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(1/c^p(\lambda))$, $p = \max(p_1, \dots, p_n)$.

Если B_1 — ограниченный оператор и $0 < |c(\lambda)| < 1/(\|\Gamma\|\|B_1\|)$, то будут справедливы операторные тождества:

$$B^{-1}(\lambda) = (I - c(\lambda)\Gamma B_1)^{-1}\Gamma_l(\lambda) = \Gamma_r(\lambda)(I - c(\lambda)B_1\Gamma)^{-1}. \quad (2.0.9)$$

Доказательство. Существование обратного оператора $B^{-1}(\lambda)$ в окрестности $0 < |c(\lambda)| < \varepsilon$ при выполнении условия III установлено ранее ([7], с.428).

Докажем справедливость операторного тождества:

$$\Gamma_l(\lambda)(B_0 - c(\lambda)B_1) = I - c(\lambda)\Gamma B_1. \quad (2.0.10)$$

Согласно формуле (2.0.6) для оператора $\Gamma_l(\lambda)$, имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_l(\lambda)B(\lambda) &= \left[\Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \left\langle \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \right\rangle \varphi_i^{(1)} \right] B(\lambda) = \\ &= \Gamma B(\lambda) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \left\langle B(\lambda) \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \right\rangle \varphi_i^{(1)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$, продолжаем выкладки:

$$\Gamma_l(\lambda)B(\lambda) = \Gamma B(\lambda) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) < B_0 - c(\lambda)B_1, \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)}.$$

Разбиваем двойную сумму на две в силу линейности:

$$\begin{aligned} \Gamma_l(\lambda)B(\lambda) &= \Gamma B(\lambda) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) < B_0, \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s+1}(\lambda) < B_1, \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)}. \end{aligned}$$

Переходим от операторов B_0 и B_1 к их сопряженным B_0^* и B_1^* :

$$\begin{aligned} \Gamma_l(\lambda)B(\lambda) &= \Gamma B(\lambda) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) < \cdot, B_0^* \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s+1}(\lambda) < \cdot, B_1^* \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)}. \end{aligned}$$

Последнюю двойную сумму мы разбиваем на две части следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_l(\lambda)B(\lambda) &= \Gamma B(\lambda) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) < \cdot, B_0^* \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} c^{-s+1}(\lambda) < \cdot, B_1^* \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^n c^0(\lambda) < \cdot, B_1^* \psi_i^{(p_i)} > \varphi_i^{(1)}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся тождеством $B_0^* \psi_i^{(k)} = B_1^* \psi_i^{(k-1)}$, $k = \overline{2, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, известным из теории жордановых цепочек [52, стр. 49-50]:

$$\begin{aligned} \Gamma_l(\lambda)B(\lambda) &= \Gamma B(\lambda) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) < \cdot, B_0^* \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} c^{-s+1}(\lambda) < \cdot, B_0^* \psi_i^{(p_i+2-s)} > \varphi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^n < \cdot, B_1^* \psi_i^{(p_i)} > \varphi_i^{(1)}. \end{aligned}$$

Сделаем замену коэффициента суммирования s во второй двойной сумме так, чтобы суммирование начиналось с единицы:

$$\begin{aligned} \Gamma_l(\lambda)B(\lambda) &= \Gamma B(\lambda) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) < \cdot, B_0^* \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i-1} c^{-s}(\lambda) < \cdot, B_0^* \psi_i^{(p_i+1-s)} > \varphi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^n < \cdot, \gamma_i > \varphi_i^{(1)}. \end{aligned}$$

Теперь разобьем первую двойную сумму на две части следующим образом:

$$\begin{aligned}\Gamma_l(\lambda)B(\lambda) &= \Gamma B(\lambda) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i-1} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, B_0^* \psi_i^{(p_i+1-s)} \rangle \varphi_i^{(1)} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n c^{-p_i}(\lambda) \langle \cdot, B_0^* \psi_i^{(1)} \rangle \varphi_i^{(1)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i-1} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, B_0^* \psi_i^{(p_i+1-s)} \rangle \varphi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i^{(1)}.\end{aligned}$$

Обе двойные суммы приводятся, а третье слагаемое есть нуль, так как $B_0^* \psi_i^{(1)} = 0$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому получаем:

$$\Gamma_l(\lambda)B(\lambda) = \Gamma B(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i^{(1)}.$$

Теперь распишем первое слагаемое:

$$\Gamma_l(\lambda)B(\lambda) = \Gamma(B_0 - c(\lambda)B_1) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i^{(1)}.$$

Добавим и отнимем выражение $\sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$. Получим:

$$\begin{aligned}\Gamma_l(\lambda)B(\lambda) &= \Gamma \times \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i - c(\lambda)B_1 \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i^{(1)}.\end{aligned}$$

Учитывая структуру оператора Γ , раскроем скобки:

$$\Gamma_l(\lambda)B(\lambda) = I - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \Gamma z_i - c(\lambda)\Gamma B_1 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i^{(1)}.$$

Поскольку $z_i^{(1)} = B_1 \varphi_i^{(p_i)}$, $i = \overline{1, n}$, имеем:

$$\Gamma_l(\lambda)B(\lambda) = I - c(\lambda)\Gamma B_1 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i^{(1)} - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle (\Gamma B_1) \varphi_i^{(p_i)}.$$

Так как $(\Gamma B_1) \varphi_i^{(p_i)} = \varphi_i^{(1)}$, $i = \overline{1, n}$, то получаем подобные слагаемые, которые приводятся:

$$\Gamma_l(\lambda)B(\lambda) = I - c(\lambda)\Gamma B_1 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i^{(1)} - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i^{(1)} =$$

$$= I - c(\lambda)\Gamma B_1.$$

Таким образом, мы доказали справедливость операторного тождества (2.0.10), а следовательно, справедливость формулы (2.0.6).

Теперь докажем справедливость формулы:

$$(B_0 - c(\lambda)B_1)\Gamma_r(\lambda) = I - c(\lambda)B_1\Gamma. \quad (2.0.11)$$

Действительно, учитывая формулу (2.0.7), имеем:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = B(\lambda)\Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle (c^{-s}(\lambda)B_0\varphi_i^{(p_i+1-s)} - c^{-s+1}(\lambda)B_1\varphi_i^{(p_i+1-s)}).$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned} B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) &= B(\lambda)\Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0\varphi_i^{(p_i+1-s)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s+1}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_1\varphi_i^{(p_i+1-s)}. \end{aligned}$$

Вторую двойную сумму разбиваем на две суммы:

$$\begin{aligned} B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) &= B(\lambda)\Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0\varphi_i^{(p_i+1-s)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} c^{-s+1}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_1\varphi_i^{(p_i+1-s)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n c^0(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_1\varphi_i^{(p_i)}. \end{aligned}$$

В силу справедливости формул $B_0\varphi_i^{(k)} = B_1\varphi_i^{(k-1)}$, $k = \overline{2, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, имеем:

$$\begin{aligned} B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) &= B(\lambda)\Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0\varphi_i^{(p_i+1-s)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} c^{-s+1}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0\varphi_i^{(p_i+2-s)} + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_1\varphi_i^{(p_i)}. \end{aligned}$$

Поскольку $B_1\varphi_i^{(p_i)} = z_i$, $i = \overline{1, n}$, то получаем:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = B(\lambda)\Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0\varphi_i^{(p_i+1-s)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} c^{-s+1}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0 \varphi_i^{(p_i+2-s)} + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Сделаем замену коэффициента суммирования s во второй двойной сумме так, чтобы суммирование начиналось с единицы. Это позволит преобразовать выражение под знаком суммы таким образом, чтобы потом можно было привести подобные. Получаем:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = B(\lambda)\Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0 \varphi_i^{(p_i+1-s)} + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i-1} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0 \varphi_i^{(p_i+1-s)} + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Выделяем из первой двойной суммы группу слагаемых следующим образом:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = B(\lambda)\Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i-1} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0 \varphi_i^{(p_i+1-s)} - \\ - \sum_{i=1}^n c^{-p_i}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0 \varphi_i^{(1)} + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i-1} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle B_0 \varphi_i^{(p_i+1-s)} + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Второе и четвертое слагаемые приводятся, а третье слагаемое равно нулю, поскольку $B_0 \varphi_i^{(1)} = 0$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому получаем:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = B(\lambda)\Gamma + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Распишем первое слагаемое:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = (B_0 - c(\lambda)B_1)\Gamma + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Сделаем эквивалентное преобразование в первой скобке, добавляя и вычитая выражение $\sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i - c(\lambda)B_1 \right) \Gamma + \\ + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Раскроем скобки, учитывая вид оператора Γ :

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = I - \sum_{i=1}^n \langle \Gamma, \gamma_i \rangle z_i - c(\lambda)B_1\Gamma + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Оператор Γ заменим на его сопряженный Γ^* :

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = I - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \Gamma^* \gamma_i \rangle z_i - c(\lambda)B_1\Gamma + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Так как $\gamma_i = B_1^* \psi_i^{(p_i)}$, $i = \overline{1, n}$, получаем:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = I - c(\lambda)B_1\Gamma + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \Gamma^* B_1^* \psi_i^{(p_i)} \rangle z_i.$$

Учитывая справедливость формул $\Gamma^* B_1^* \psi_i^{(p_i)} = \psi_i^{(1)}$, $i = \overline{1, n}$, имеем:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = I - c(\lambda)B_1\Gamma + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i.$$

Два последних слагаемых приводятся, и окончательно получаем:

$$B(\lambda)\Gamma_r(\lambda) = I - c(\lambda)B_1\Gamma.$$

Таким образом, мы доказали справедливость формулы (2.0.11), а следовательно, и формулы (2.0.7).

Далее, поскольку формулы (2.0.10) и (2.0.11) справедливы, то автоматически получаем, что справедливы формулы (2.0.8) и (2.0.9). $\square$

Левые и правые регуляризаторы для оператора $L(\partial/\partial t)B_0 - B_1$ с дифференциальным оператором при фредгольмовом операторе B_0 вводились в [66]. Подобные регуляризаторы использовались при численном решении алгебро-дифференциальных уравнений [75].

Левые и правые регуляризаторы можно использовать при построении решений уравнения (2.0.1), как это сделано в следующей теореме.

Теорема 2.0.1. Пусть оператор $B(\lambda)$ имеет вид $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$, и выполнено условие III, причем $\max(p_1, \dots, p_n) = p$, B_1 – ограниченный оператор. Пусть $\|b(\lambda)\| \leq \xi(\lambda) \cdot c^m(\lambda)$, где $\xi(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, $\|R(x, \lambda)\| \leq C \cdot \|x\|^l$, где $l \geq 2$, C – const, $m \geq \frac{p \cdot l}{l-1}$. Пусть при любом λ в секториальной окрестности

нуля S имеет место неравенство:

$$0 < c(\lambda) \leq \frac{q}{\|\Gamma\| \cdot \|B_1\|},$$

где $0 < q < 1$. Пусть выполнено условие (2.0.2)

Тогда уравнение (2.0.1) при $\forall \lambda \in S_0 \subseteq S$, где S_0 – секториальная окрестность нуля, имеет минимальную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$. Ветвь $x(\lambda)$ удовлетворяет оценке $\|x(\lambda)\| = o(c(\lambda)^{p/(l-1)})$, последовательность $x_n(\lambda)$, где

$$x_n = c(\lambda)\Gamma B_1 x_{n-1} + \Gamma_l(\lambda)(R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)), \quad (2.0.12)$$

$x_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$, сходится при $\lambda \in S_0$ к этой ветви.

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения (2.0.1) оператор $\Gamma_l(\lambda)$, который согласно лемме 2.0.2 существует, и его ядро содержит только нулевой элемент, что в свою очередь гарантирует эквивалентность полученного после умножения уравнения. Имеем уравнение:

$$\Gamma_l(\lambda)B(\lambda)x = \Gamma_l(\lambda)[R(x, \lambda) + b(\lambda)].$$

Учитывая условие (2.0.6), доказанное в лемме 2.0.2, а также условие текущей теоремы, что $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$, получим:

$$(I - c(\lambda)\Gamma B_1)x = \Gamma_l(\lambda)[R(x, \lambda) + b(\lambda)]. \quad (2.0.13)$$

Уравнение (2.0.13) с помощью замены

$$x = c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V \quad (2.0.14)$$

приведем к виду:

$$(I - c(\lambda)\Gamma B_1)c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V = \Gamma_l(\lambda)[R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V, \lambda) + b(\lambda)]$$

или

$$V - c(\lambda)\Gamma B_1V = c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\Gamma_l(\lambda)[R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V, \lambda) + b(\lambda)]$$

или

$$V = c(\lambda)\Gamma B_1V + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\Gamma_l(\lambda)[R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V, \lambda) + b(\lambda)]. \quad (2.0.15)$$

Обозначим правую часть уравнения (2.0.15) как оператор $\Phi(V, \lambda)$, тогда уравнение (2.0.15) примет вид:

$$V = \Phi(V, \lambda). \quad (2.0.16)$$

Уравнение (2.0.16) в силу условий доказываемой теоремы в окрестности точки $\lambda = 0$, $V = 0$ удовлетворяет всем условиям принципа сжимающих отображений. Убедимся, что оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим. Действительно, учитывая, что за $\Phi(V, \lambda)$ мы обозначили правую часть уравнения (2.0.15), получим:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| = \\ & = \|c(\lambda)\Gamma B_1 V_1 + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\Gamma_l(\lambda)[R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_1, \lambda) + b(\lambda)] - \\ & - c(\lambda)\Gamma B_1 V_2 - c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\Gamma_l(\lambda)[R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_2, \lambda) + b(\lambda)]\| = \\ & = \|c(\lambda)\Gamma B_1(V_1 - V_2) + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\Gamma_l(\lambda)[R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_1, \lambda) - R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_2, \lambda)]\|. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся неравенством треугольника и оценкой нормы произведения:

$$\begin{aligned} & \|c(\lambda)\Gamma B_1(V_1 - V_2) + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\Gamma_l(\lambda)[R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_1, \lambda) - R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_2, \lambda)]\| \leq \\ & \leq c(\lambda)\|\Gamma\| \cdot \|B_1\| \cdot \|V_1 - V_2\| + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\|\Gamma_l(\lambda)\| \cdot \|R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_1, \lambda) - R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_2, \lambda)\|. \end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой (2.0.2):

$$\begin{aligned} & c(\lambda)\|\Gamma\| \cdot \|B_1\| \cdot \|V_1 - V_2\| + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\|\Gamma_l(\lambda)\| \cdot \|R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_1, \lambda) - R(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}}V_2, \lambda)\| \leq \\ & \leq c(\lambda)\|\Gamma\| \cdot \|B_1\| \cdot \|V_1 - V_2\| + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}}\|\Gamma_l(\lambda)\| \cdot \|L(r)\| \cdot c(\lambda)^{\frac{lp}{l-1}} \cdot \|V_1 - V_2\| = \\ & = c(\lambda)\|\Gamma\| \cdot \|B_1\| \cdot \|V_1 - V_2\| + c(\lambda)^p \cdot \|\Gamma_l(\lambda)\| \cdot \|L(r)\| \cdot \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

Вынесем общий множитель $\|V_1 - V_2\|$ за скобку:

$$\begin{aligned} & c(\lambda)\|\Gamma\| \cdot \|B_1\| \cdot \|V_1 - V_2\| + c(\lambda)^p \cdot \|\Gamma_l(\lambda)\| \cdot \|L(r)\| \cdot \|V_1 - V_2\| = \\ & = \left[c(\lambda)\|\Gamma\| \cdot \|B_1\| + c(\lambda)^p \cdot \|\Gamma_l(\lambda)\| \cdot \|L(r)\| \right] \cdot \|V_1 - V_2\|. \end{aligned}$$

Согласно условиям теоремы $c(\lambda)\|\Gamma\| \cdot \|B_1\| \leq q$ при любом $\lambda \in S$, $0 < q < 1$; $\|\Gamma_l(\lambda)\| = O(\frac{1}{c^p(\lambda)})$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, следовательно:

$$c^p(\lambda) \cdot \|\Gamma_l(\lambda)\| \leq C,$$

где C - *const*, $C > 0$. Далее, поскольку $L(r) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, то существует число $r_0 : 0 < r_0 \leq r$ такое, что при любом $\lambda \in S$

$$C \cdot L(r_0) \leq \frac{1-q}{2}.$$

То есть

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq (q + \frac{1-q}{2}) \cdot \|V_1 - V_2\| = \frac{1+q}{2} \cdot \|V_1 - V_2\|,$$

где $0 < \frac{1+q}{2} < 1$ в силу $0 < q < 1$. А это означает, что оператор $\Phi(V, \lambda)$ является сжимающим при любом $\lambda \in S$ в шаре $\|V\| \leq r_0$.

Теперь проверим, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при любом $\lambda \in S_0$ значения оператора $\Phi(V, \lambda)$ не выходит из шаров $\|V\| \leq r_0$, то есть, что $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$. Действительно:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda)\| &= \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda) + \Phi(0, \lambda)\| \leq \\ &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq q\|V\| + \|c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}} \cdot b(\lambda)\| \leq \\ &\leq qr_0 + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}} \cdot \|b(\lambda)\| \leq qr_0 + c(\lambda)^{-\frac{p}{l-1}} \xi(\lambda) c^m(\lambda) = \\ &= qr_0 + c(\lambda)^{m-\frac{p}{l-1}} \xi(\lambda). \end{aligned}$$

Согласно условиям текущей теоремы имеет место неравенство:

$$m - \frac{p}{l-1} \geq \frac{l \cdot p}{l-1} - \frac{p}{l-1} = p \frac{l-1}{l-1} = p \geq 1.$$

Таким образом, существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$, в которой при любом λ :

$$c(\lambda)^{m-\frac{p}{l-1}} \xi(\lambda) \leq (1-q)r_0,$$

что, в свою очередь, приводит нас к оценке:

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq qr_0 + (1-q)r_0 = r_0.$$

То есть уравнение (2.0.16) согласно принципу сжимающих отображений имеет в шаре $\|V\| \leq r_0$ при любом $\lambda \in S_0$ единственное решение. Последовательность

$$V_n = \Phi(V_{n-1}), \quad V_0 = 0,$$

сходится к этому решению. Учитывая замену (2.0.14), получаем, что и последовательные приближения (2.0.12) сходятся к искомой ветви, и имеет место оценка $\|x(\lambda)\| = o(c(\lambda)^{\frac{p}{l-1}})$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ $\square$

Следствие 2.0.1. Пусть в условиях теоремы 2 $\langle B_1 \varphi_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$, $i, k = \overline{1, n}$. Тогда последовательность x_n , где x_n определяется единственным образом из линейного уравнения

$$\begin{aligned} & \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right) x_n = \\ & = \left(I - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i \right) (R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)) + c(\lambda) B_1 x_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.0.17)$$

где $x_0 = 0$, $\gamma_i = B_1^* \psi_i$, $z_i = B_1 \varphi_i$, сходится к минимальной ветви решения уравнения (2.0.1)

Доказательство. Так как $\langle B_1 \varphi_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$, то максимальная длина жордановой цепочки $p = 1$, и левый регуляризатор (2.0.6) будет иметь вид:

$$\Gamma_l(\lambda) = \Gamma - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i. \quad (2.0.18)$$

Подставляя (2.0.18) в формулу (2.0.12), получим:

$$x_n = c(\lambda) \Gamma B_1 x_{n-1} + \left(\Gamma - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i \right) (R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)), \quad (2.0.19)$$

$x_0 = 0$. Умножим обе части уравнения (2.0.19) на оператор

$$\Gamma^{-1} = \left(B_0 + \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle z_j \right)$$

слева, получим:

$$\begin{aligned} & \Gamma^{-1} x_n = c(\lambda) \Gamma^{-1} \Gamma B_1 x_{n-1} + \\ & + \left(\Gamma^{-1} \Gamma - \frac{1}{c(\lambda)} \Gamma^{-1} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i \right) (R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)) \end{aligned}$$

или

$$\left(B_0 + \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle z_j \right) x_n = c(\lambda) B_1 x_{n-1} + \left(I - \frac{1}{c(\lambda)} B_0 \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i - \right.$$

$$-\frac{1}{c(\lambda)} \sum_{j=1}^n \left\langle \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i, \gamma_j \right\rangle z_j \Big) \Big(R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda) \Big).$$

Учитывая равенства $B_0 \varphi_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, получим в конечном итоге уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(B_0 + \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle z_j \right) x_n = \\ & = c(\lambda) B_1 x_{n-1} + \left(I - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i \right) \Big(R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda) \Big). \end{aligned}$$

□

Пример 2.0.1. Покажем, что в некоторой области $0 < \lambda \leq \rho$ интегральное уравнение

$$u(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos s \cdot [(1 + \lambda)u(s) - s \cdot u^3(s)] ds = \lambda^3 \cos x$$

имеет единственную минимальную ветвь.

Решение. Построим асимптотики малых решений одним из известных способов, чтобы убедиться, что данное уравнение действительно имеет единственную минимальную ветвь. Уравнение перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & u(x) - \frac{1}{\pi} (1 + \lambda) \cos x \int_0^{2\pi} \cos s \cdot u(s) ds + \\ & + \frac{1}{\pi} \cos x \int_0^{2\pi} \cos s \cdot s \cdot u^3(s) ds - \lambda^3 \cos x = 0. \end{aligned} \quad (2.0.20)$$

Введем обозначения:

$$C_1 = \int_0^{2\pi} \cos s \cdot u(s) ds, \quad C_2 = \int_0^{2\pi} \cos s \cdot s \cdot u^3(s) ds. \quad (2.0.21)$$

Тогда уравнение (2.0.20) примет вид:

$$u(x) = \left[\frac{1}{\pi} (1 + \lambda) \cdot C_1 - \frac{1}{\pi} \cdot C_2 + \lambda^3 \right] \cos x. \quad (2.0.22)$$

Для определения констант C_1 и C_2 будем подставлять $u(x)$, данное формулой (2.0.22), в каждое из равенств (2.0.21), заменив предварительно x на s . В

результате получим следующую алгебраическую систему для определения C_1 и C_2 .

$$\begin{cases} C_1 = \left[\frac{1}{\pi}(1 + \lambda) \cdot C_1 - \frac{1}{\pi} \cdot C_2 + \lambda^3 \right] \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 s \, ds \\ C_2 = \left[\frac{1}{\pi}(1 + \lambda) \cdot C_1 - \frac{1}{\pi} \cdot C_2 + \lambda^3 \right]^3 \cdot \int_0^{2\pi} s \cos^4 s \, ds \end{cases} \quad (2.0.23)$$

Интегралы в правых частях системы (2.0.23) легко считаются [11]:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} s \cos^4 s \, ds = \frac{3\pi}{4}.$$

В итоге система (2.0.23) примет вид:

$$\begin{cases} 0 = \lambda C_1 - C_2 + \pi \lambda^3 \\ 4\pi C_2 = 3 \left[(1 + \lambda) C_1 - C_2 + \pi \lambda^3 \right]^3. \end{cases} \quad (2.0.24)$$

Из первого уравнения системы (2.0.24) получаем:

$$C_2 = \pi \lambda^3 + \lambda C_1. \quad (2.0.25)$$

Подставим C_2 во второе уравнение, получим алгебраическое уравнения третьей степени:

$$3C_1^3 - 4\pi \lambda C_1 - 4\pi^2 \lambda^3 = 0. \quad (2.0.26)$$

Малые решения $C_1(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ будем искать методом диаграмм Ньютона ([73], стр. 421). Поскольку нам достаточно определить главный член решения уравнения (2.0.26), то решения будем искать в виде асимптотик $C_1 = C_\varepsilon \lambda^\varepsilon + o(\lambda^\varepsilon)$.

Диаграмма Ньютона будет состоять из трёх точек $A(3, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 3)$ и двух отрезков AB и BC , соединяющих эти точки. Поскольку ε считается как $\operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона отрезка диаграммы с отрицательным направлением оси абсцисс, то получаем два значения для ε : $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1/2$. Для определения коэффициента C_ε при главном члене будем подставлять в уравнение (2.0.26) $C_1 = z(\lambda) \lambda^\varepsilon$, где $z(0) \neq 0$.

Для ε_1 подстановка будет иметь вид: $C_1 = z(\lambda) \lambda^2$. В результате получим:

$$3z^3(\lambda) \lambda^6 - 4\pi \lambda^3 z(\lambda) - 4\pi^2 \lambda^3 = 0.$$

Поделим уравнение на λ^3 :

$$3z^3(\lambda)\lambda^3 - 4\pi z(\lambda) - 4\pi^2 = 0.$$

Положим $\lambda = 0$:

$$-4\pi z(0) - 4\pi^2 = 0 \Rightarrow z(0) = -\frac{4\pi^2}{4\pi} = -\pi.$$

Следовательно, первая асимптотика для C_1 будет иметь вид: $C_1^1 = -\pi\lambda^2 + o(\lambda^2)$.

Для ε_2 подстановка будет иметь вид: $C_1 = z(\lambda)\lambda^{1/2}$. В результате получим:

$$3z^3(\lambda)\lambda^{3/2} - 4\pi\lambda z(\lambda)\lambda^{1/2} - 4\pi^2\lambda^3 = 0.$$

Поделим всё уравнение на $\lambda^{3/2}$:

$$3z^3(\lambda) - 4\pi z(\lambda) - 4\pi^2\lambda^{3/2} = 0.$$

Положим $\lambda = 0$:

$$3z^3(0) - 4\pi z(0) = 0 \Rightarrow z(0)(3z^2(0) - 4\pi) = 0.$$

Следовательно, вторая и третья асимптотики для C_1 будут иметь вид: $C_1^{2,3} = \pm\sqrt{\frac{4\pi\lambda}{3}} + o(\lambda^{1/2})$.

Теперь, зная C_1 , определим C_2 из соотношения (2.0.24):

$$C_2^1 = o(\lambda^3), \quad C_2^{2,3} = \pm 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\lambda^{3/2} + o(\lambda^{3/2}).$$

Найдем асимптотики решений нашего уравнения из формулы (2.0.22), подставляя найденные C_1 и C_2 :

$$u^1(x) = -\lambda^2 \cos x + o(\lambda^2),$$

$$u^{2,3}(x) = \pm 2\sqrt{\frac{\lambda}{3\pi}} \cos x + o(\lambda^{1/2}).$$

Как мы видим, наше уравнение имеет три малых решения, первое из которых является минимальной ветвью.

Теперь применим к нашему уравнению следствие 2.0.1. Соответствующие обозначения:

$$B_0 u = u(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos su(s) ds,$$

$$\begin{aligned}
B_1 u &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos su(s) ds, \\
R(u, \lambda) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos ssu^3(s) ds, \\
b(\lambda) &= \lambda^3 \cos x.
\end{aligned}$$

Найдем все ненулевые линейно-независимые решения уравнения $B_0 \varphi = 0$. Они же будут решениями уравнения $B_0^* \psi = 0$ в силу симметричности ядра оператора B_0 . Получим уравнение:

$$u(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos su(s) ds = 0.$$

Положим $\int_0^{2\pi} \cos su(s) ds = C$, тогда получим $u(x) = \frac{1}{\pi} \cos x C$. Определим C :

$$C = \int_0^{2\pi} \cos s \frac{1}{\pi} \cos s C ds \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow C - \text{любое.}$$

В качестве φ выберем $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$, где C мы выбрали равным $C = \sqrt{\pi}$, чтобы $\|\varphi\|_{L_2[0, 2\pi]} = 1$.

Убедимся, что $\langle B_1 \varphi, \psi \rangle = 1$. Действительно

$$\begin{aligned}
\langle B_1 \varphi, \psi \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos s \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos s ds \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x dx = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 s ds \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \cdot \frac{1}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{\pi^2} = 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, элемент φ имеет B_1 жорданову цепочку длины 1 и $p = 1$.

Далее $c(\lambda) = \lambda$. Проверим, что выполняются оценки на $\|b(\lambda)\|$ и $\|R(x, \lambda)\|$, требуемые по условию следствия 2.0.1:

$$\|b(\lambda)\| = \|\lambda^3 \cos x\| = \lambda \cdot \lambda^2 \cdot \|\cos x\|,$$

где в качестве $\xi(\lambda)$ выступает $\xi(\lambda) = \lambda \cdot \|\cos x\|$ и $m = 2$;

$$\begin{aligned}
\|R(x, \lambda)\| &= \left\| -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot s \cdot u^3(s) ds \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \|\cos x\| \cdot \left\| \int_0^{2\pi} \cos s \cdot s \cdot u^3(s) ds \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \|\cos x\| \cdot \int_0^{2\pi} \|\cos s\| \cdot \|s\| \cdot \|u^3(s)\| ds \leq \frac{1}{\pi} \|\cos x\|^2 \cdot \|s\| \cdot \|u^3(s)\| \cdot 2\pi,
\end{aligned}$$

где в качестве C выступает выражение $C = 2\|\cos x\|^2 \cdot \|s\|$, $l = 3 \geq 2$.

Теперь проверим, что выполняется условие $m \geq \frac{p \cdot l}{l-1}$. Поскольку $m = 2$, $p = 1$, $l = 3$, то получаем неравенство $2 \geq \frac{1 \cdot 3}{3-1}$, которое верно.

Далее посчитаем, чему равны z и γ .

$$\begin{aligned}
z = B_1 \varphi &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos s ds = \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}} \cos x \int_0^{2\pi} \cos^2 s ds = \frac{\pi}{\pi^{3/2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x.
\end{aligned}$$

Далее $z = \gamma$, так как $B_1^* = B_1$ в силу симметричности ядра оператора B_1 . Поэтому $z = \gamma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$.

Теперь найдем оператор Γ :

$$\begin{aligned}
\Gamma u &= B_0 u + \langle u, \gamma \rangle z = u(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot u(s) ds + \\
&+ \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos s \cdot u(s) ds \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x = u(x).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\Gamma = I$, где I – тождественный оператор.

Далее необходимо убедиться, что справедливо неравенство:

$$0 < c(\lambda) \leq \frac{q}{\|\Gamma\| \cdot \|B_1\|}, \text{ где } 0 < q < 1.$$

Для этого нам понадобится оценка на $\|B_1\|$. Определим её:

$$\|B_1 u\| = \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot u(s) ds \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \|\cos x\| \cdot \|\cos s\| \cdot \|u(s)\| ds = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} \cdot 2\pi \cdot \|u(x)\| = 2\pi \cdot \|u(s)\|.
\end{aligned}$$

Здесь $\|\cos x\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx} = \sqrt{\pi}$. Следовательно, $\|B_1\| \leq 2\pi$. Теперь выберем в качестве секториальной окрестности нуля S интервал $(0, \frac{q}{2\pi})$, где $0 < q < 1$, тогда при любом $\lambda \in S$ будет иметь место неравенство:

$$0 < c(\lambda) \leq \frac{q}{2\pi} \leq \frac{q}{\|\Gamma\| \cdot \|B_1\|},$$

поскольку $\|B_1\| \leq 2\pi$, $\|\Gamma\| = 1$, $c(\lambda) = \lambda$ и $\lambda \in (0, \frac{q}{2\pi})$.

Проверим условие (2.0.2):

$$\begin{aligned}
&\|R(\tau x_1, \lambda) - R(\tau x_2, \lambda)\| = \\
&= \left\| -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot s \cdot \tau^3 \cdot x_1^3(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot s \cdot \tau^3 \cdot x_2^3(s) ds \right\| = \\
&= \frac{1}{\pi} \left\| - \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot s \cdot \tau^3 \cdot (x_1^3(s) - x_2^3(s)) ds \right\| = \\
&= \frac{1}{\pi} \left\| \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot s \cdot \tau^3 \cdot (x_1^3(s) - x_2^3(s)) ds \right\| = \\
&= \frac{1}{\pi} \tau^3 \left\| \cos x \int_0^{2\pi} \cos s \cdot s \cdot (x_1(s) - x_2(s)) \cdot (x_1^2(s) + x_1(s) \cdot x_2(s) + x_2^2(s)) ds \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \tau^3 \|\cos x\| \int_0^{2\pi} \|\cos s \cdot s \cdot (x_1(s) - x_2(s)) \cdot (x_1^2(s) + x_1(s) \cdot x_2(s) + x_2^2(s))\| ds \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \tau^3 \|\cos x\| \int_0^{2\pi} \|\cos s\| \cdot \|s\| \cdot \|x_1(s) - x_2(s)\| \times \\
&\quad \times \left(\|x_1(s)\|^2 + \|x_1(s)\| \cdot \|x_2(s)\| + \|x_2(s)\|^2 \right) ds.
\end{aligned}$$

Поскольку, как было выяснено ранее, $\|\cos x\| = \sqrt{\pi}$ и

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} x^2 dx} = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}},$$

то в шаре $\|x\| \leq r$ оценка получается следующая:

$$\begin{aligned} \|R(\tau x_1, \lambda) - R(\tau x_2, \lambda)\| &\leq \frac{1}{\pi} \tau^3 \sqrt{\pi} \sqrt{\pi} \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}} r^2 \cdot 3 \cdot 2\pi \|x_1(s) - x_2(s)\| = \\ &= \tau^3 \cdot r^2 \sqrt{3} \cdot 4\pi^2 \sqrt{2\pi} \|x_1(s) - x_2(s)\|, \end{aligned}$$

здесь $l = 3$, $L(r) = 4\pi^2 \sqrt{6\pi} \cdot r^2$ и $L(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Таким образом, мы только что убедились, что для заданного уравнения все условия следствия 2.0.1 выполнены. Тогда, согласно заключению следствия, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} u_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot u_n(s) ds + \int_0^{2\pi} u_n(s) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos s ds \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x = \\ = \left(I - \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} [\cdot] \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos s ds \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \right) \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot s \cdot u_{n-1}^3(s) ds + \right. \\ \left. + \lambda^3 \cos x \right) + \lambda \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot u_{n-1}(s) ds \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \lambda \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot u_{n-1}(s) ds - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot s \cdot u_{n-1}^3(s) ds + \lambda^3 \cos x + \\ &+ \frac{1}{\pi \cdot \lambda} \cos x \int_0^{2\pi} \cos^2 s ds \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cos s \cdot s \cdot u_{n-1}^3(s) ds - \\ &- \lambda^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 s \cdot \cos x ds \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos s \cdot \left[\lambda u_{n-1}(s) - s \cdot u_{n-1}^3(s) + \frac{s}{\lambda} u_{n-1}^3(s) \right] ds + \\ &\quad + \lambda^3 \cos x - \lambda^2 \cos x, \\ u_0(x) &= 0. \end{aligned}$$

□

Глава 3

Построение малых решений различных порядков малости нелинейных уравнений в секториальных окрестностях векторного параметра

Пусть X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное уравнение

$$Bu = F(u, \alpha(\lambda), \beta(\lambda)), \quad (3.0.1)$$

где $F(u, \alpha, \beta) = F_T(u, \alpha, \beta) + R(u, \alpha, \beta)$, $F_T = \sum_{i+k+j=1}^T F_{i,k,j}(u) \alpha^k \beta^j$, $F_{1,0,0} = 0$. Замкнутый фредгольмов оператор B действует из X в Y и имеет плотную область определения в X . Предполагается, что $\{\varphi_i\}_1^n$ – базис в подпространстве нулей $N(B)$, $\{\psi_i\}_1^n$ – базис в дефектном подпространстве $N^*(B)$, $F_{i,k,j}(u)$ – i – степенные операторы [7, стр. 345]. Оператор R непрерывен, дифференцируем по u в смысле Фреше и удовлетворяет оценке $R(u, \alpha, \beta) = O((\|u\| + |\alpha| + |\beta|)^{T+1})$, $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ – непрерывные функционалы, определенные на открытом множестве $\Omega \subset \Lambda$, $0 \in \partial\Omega$, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. Область Ω является секториальной окрестностью нуля.

Целью этой главы является построение асимптотических последовательных приближений непрерывных решений $u(\lambda) \rightarrow 0$ при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$.

Определение 3.0.1. Будем называть функцию $u_1(\lambda)$ бесконечно малой более высокого порядка малости относительно функции $u_2(\lambda)$, если функции $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$ являются бесконечно малыми при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|u_1(\lambda)\|}{\|u_2(\lambda)\|} = 0$.

Ранее в секториальных окрестностях нуля последовательными приближениями строились минимальные ветви малых решений. В этой главе на основе результатов работы [62] предложен метод последовательных приближений, позволяющий в секториальных окрестностях строить решения с различными порядками малости уравнений с векторным параметром. В основе метода лежат результаты аналитической теории решений нелинейных уравнений [73, гл. 9].

3.1 Униформизация ветвей и последовательные приближения

Пусть выполнено условие

A. Существуют $\nu = r/s$, $\Theta = (r + m)/s$, где r , s , m – натуральные числа, такие что

$$F_T(\alpha^\nu V, \alpha, 0) = \alpha^\Theta \sum_{i\nu+k=\Theta} F_{i,k,0}(V) + Q(V, \alpha), \quad (3.1.1)$$

где $\|Q(V, \alpha)\| = o(\alpha^\Theta)$, $\Theta \leq T$.

В конкретных случаях числа r , s , m легко вычислить, нанеся на координатную плоскость точки (i, k) , отвечающие ненулевым членам $F_{i,k,0}$, и построив соответствующую диаграмму Ньютона. Искомое ν полагается равным $\tan \gamma$, где γ – угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси i . Соответствующее Θ будет равно ординате точки пересечения этого отрезка с осью k .

Так как диаграмма может иметь несколько отрезков, то выбор чисел r , s , m в представлении (3.1.1) может оказаться неоднозначным.

Пусть в окрестности точки $u = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ выполнена оценка Липшица

B.

$$\|F(u, \alpha, \beta) - F(u, \alpha, 0)\| \leq L(\|u\|, |\alpha|, |\beta|)|\beta|,$$

где $L(\|u\|, |\alpha|, |\beta|) = O((\|u\| + |\alpha| + |\beta|)^l)$, $l \geq 0$.

Пусть функционал $\beta(\lambda)$ в секториальной окрестности Ω удовлетворяет при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$ оценке

C.

$$\beta(\lambda) = o(\alpha(\lambda)^\Theta).$$

Замечание 3.1.1. Если в условии $\mathbf{B}$ $l \geq (r + m) \max(1/r, 1/s)$, то условие $\mathbf{C}$ можно заменить на более слабое условие $\beta(\lambda) = o(\alpha(\lambda)^{\Theta/(1+l)})$.

То есть в этом случае $\beta(\lambda)$ может быть в области Ω бесконечно малой более низкого порядка, чем требуется в условии $\mathbf{C}$.

Пусть, кроме того, выполняется условие:

D. Система алгебраических уравнений

$$l_j(c) \equiv \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F_{i,k,0}(c\varphi), \psi_j \right\rangle = 0, \quad (3.1.2)$$

где $j = \overline{1, n}$, $c\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, имеет простое решение c^* .

Справедлива следующая

Теорема 3.1.1. Пусть выполнены условия $\mathbf{A-D}$.

Тогда существует открытая область $\Omega_1 \subset \Omega$ такая, что $0 \in \partial\Omega_1$, и при $\lambda \in \Omega_1$ уравнение (3.0.1) имеет решение

$$u(\lambda) = \alpha(\lambda)^\nu (c^* \varphi + d(\lambda)), \quad (3.1.3)$$

где c^* – простой корень алгебраической системы (3.1.2), функция $d(\lambda)$ имеет оценку $d(\lambda) = o(1)$ при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$ и определяется единственным образом последовательными приближениями.

Доказательство. Регуляризатор В.А. Треногина [73, с. 221] имеет вид:

$$\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1},$$

где $\langle \varphi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $\langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$.

Будем для построения в области Ω искомых малых решений уравнения (3.0.1) использовать униформизацию

$$u = \Gamma V + c(\lambda) \varphi \alpha(\lambda)^\nu, \quad (3.1.4)$$

где $c(0) = c^*$. Неизвестная функция $V(\lambda)$ удовлетворяет равенствам

$$\langle V, \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

и оценке $\|V(\lambda)\| = o(\alpha(\lambda)^\nu)$ при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$.

С помощью замены (3.1.4) уравнение (3.0.1) приводится к виду

$$V = F(\Gamma V + c\varphi\alpha^\nu, \alpha, \beta). \quad (3.1.5)$$

Дополним его равенствами

$$\alpha^{-\Theta} \langle F(\Gamma V + c\varphi\alpha^\nu, \alpha, \beta), \psi_j \rangle = 0, \quad (3.1.6)$$

$$j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, задача построения ветви вида (3.1.4) свелась к отысканию функций $V(\lambda)$ и $c(\lambda) = (c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda))'$ из системы (3.1.5), (3.1.6).

Будем искать при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$ функции $c(\lambda) \rightarrow c^*$ и $V(\lambda) \rightarrow 0$ с порядком $\|V(\lambda)\| = o(\alpha^\nu)$.

Систему (3.1.5), (3.1.6) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$\Phi(W, \lambda) = 0 \quad (3.1.7)$$

относительно абстрактной функции $W = (V(\lambda), c(\lambda))$ из прямой суммы $X \oplus \mathbb{R}^n$.

Введем банахово пространство E элементов W , зависящих от параметра λ , с нормой

$$\|w\| = \max_{\lambda \in \bar{\Omega}_1} (\|V(\lambda)\|_X + \|c(\lambda)\|_{\mathbb{R}^n}),$$

где Ω_1 секториальная окрестность точки $\lambda = 0$, $\Omega_1 \subseteq \Omega$, $0 \in \bar{\Omega}_1$. Тогда нелинейное отображение Φ , зависящее от λ из Ω_1 , будет действовать из E в E .

В силу выбора чисел r, s, m и выше указанных асимптотических согласований поведения функционалов $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ (см. условие **С**), оператор Φ будет непрерывен по W и λ при $\lambda \in \Omega_1$ в окрестности точки $W_0 = (0, c^*)$.

Более того,

$$\lim_{W \rightarrow W_0} \Phi(W, \lambda) = 0, \quad \Omega \ni \lambda \rightarrow 0.$$

Оператор Φ имеет непрерывную производную Фреше по W при $\lambda \in \Omega$ в окрестности точки W_0 . При этом

$$\Phi_W(W_0, 0) = \begin{bmatrix} I, & 0 \\ l, & \mathcal{A} \end{bmatrix}.$$

Здесь I – тождественный оператор из Y в Y , 0 – нулевой оператор из $\mathbb{R}^n$ в Y , $l = (l_1, \dots, l_n)'$,

$$l_j = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{i,k}(c^* \varphi) \Gamma \cdot, \psi_j \right\rangle, \quad j = \overline{1, n} -$$

– линейный функционал, определенный на Y ,

$$\mathcal{A} = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{i,k}(c^* \varphi) \varphi_l, \psi_j \right\rangle \Big|_{l,j=\overline{1,n}} -$$

– матрица $n \times n$.

Так как в силу простоты корня c^* матрица $\mathcal{A}$ обратима, то линейный ограниченный оператор $\Phi_W(W_0, 0) \in \mathcal{L}(E \rightarrow E)$ и имеет ограниченный обратный

$$[\Phi_W(W_0, 0)]^{-1} = \begin{bmatrix} I, & 0 \\ -\mathcal{A}^{-1}l, & \mathcal{A}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при $\lambda \in \Omega$ операторное уравнение (3.1.7) в окрестности точки W_0 удовлетворяет условиям теоремы о неявном операторе [73, с. 411]. Поэтому существует область $\Omega_1 \subseteq \Omega$, $0 \in \partial\Omega$ такая, что искомое решение $W \rightarrow (0, c^*)$ при $\Omega_1 \ni \lambda \rightarrow 0$ можно найти последовательными приближениями

$$W_n = W_{n-1} - [\Phi_W(W_0, 0)]^{-1} \Phi(W_{n-1}, \lambda),$$

где $W_0 = (0, c^*)$, $W_n = (V_n(\lambda), c_n(\lambda))$, $\|V_n(\lambda)\| = o(\alpha^\nu)$, $n = 1, 2, \dots$ □

3.2 Построение решений краевой задачи об изгибе стержня в нерегулярном случае

При изучении поведения стержней под действием сжимающей силы возникают краевые задачи вида

$$y^{(4)}(x) + 2py^{(2)}(x) + y = f(y, \beta), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \quad y(\pi) = 0, \\ y^{(2)}(0) &= 0, \quad y^{(2)}(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где $f(y, \beta)$ – нелинейная функция, зависящая от малого параметра β . Технические задачи такого рода рассматривались многими авторами (см. [81], [18,

с. 322-345], [15] и др.). Например, в работе [68] изучались задачи на собственные значения таких уравнений при $f(y, \beta) = y^3(x) - 2py_0^{(2)}(x)\beta$, где $y(x)$ описывает малый прогиб стержня, $p(\lambda)$ – величина осевого сжатия, $y_0(x)$ – начальная форма, β – амплитуда.

Для определенности далее будем полагать в уравнении (3.2.1) $f(y, \beta) = y^3(x) + a(x)\beta$, где $a(x)$ заданный функционал, $\beta(\lambda)$ – малый параметр. Требуется построить решение задачи (3.2.1), (3.2.2) при достаточно малой амплитуде β .

Введем линейный оператор

$$A(p) = \frac{d^4}{dx^4} + 2p\frac{d^2}{dx^2} + 1,$$

действующий из пространства $C_{[0,\pi]}^{0(4)}$ четырежды дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (3.2.2), в пространство $C_{[0,\pi]}$.

Точки $p_k = 1/2(k^2 + 1/k^2)$ являются его изолированными фредгольмовыми особыми точками, а функции $\sin(kx)$ соответствующими собственными функциями. Точки p_k будем далее называть критическими.

Если $\beta = 0$, то задача (3.2.1), (3.2.2) при любых p имеет тривиальное решение $y = 0$. Вблизи этого решения при малых $|\beta|$ и малых отклонениях p от p^* может существовать одно (p^* не является критическим) или несколько равновесных форм стержня (p^* – критическое). Соответственно, если p^* не является критическим и $|\beta|$ достаточно мал, то задача (3.2.1), (3.2.2) имеет единственное решение.

Рассмотрим более сложный случай вычисления решения задачи (3.2.1), (3.2.2), когда p^* – критическое.

Пусть для определенности $k = 1$, т.е. $p^* = 1$. Тогда $\sin x$ собственная функция оператора $A(1)$, размерность подпространства нулей $\dim N(A(1)) = 1$. Согласно обозначениям в уравнении (3.0.1) имеем

$$By = A(1)y,$$

$$F(y, \lambda, \beta) = y^3 + 2\lambda\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\beta,$$

где малый параметр $\lambda = 1 - p$, $X = C_{[0,\pi]}^{0(4)}$, $Y = C_{[0,\pi]}$. Таким образом, задача (3.2.1), (3.2.2) переписана в виде (3.0.1), где $\alpha = \lambda$, $\beta = \beta(\lambda)$. Диаграмма Ньютона такого оператора $F(y, \lambda, 0)$ состоит из одного отрезка, проходящего через точки $(3, 0)$, $(1, 1)$. Поэтому $r = 1$, $s = 2$, $m = 2$. Оператор $\widehat{B}$ имеет вид

$$\widehat{B} = \frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin s [\cdot] ds.$$

В соответствии с обобщенной леммой Шмидта [73, с. 221] оператор $\widehat{B}$ имеет ограниченный обратный интегральный оператор, действующий из $C_{[0,\pi]}$ в $C_{[0,\pi]}^{0(4)}$, отвечающий на основании [81] обобщенной функции Грина

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}(x^2 + (s - \pi)^2 - \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{3}{2}) \sin s \sin x + \frac{x}{2\pi} \sin s \cos x - \\ - \frac{s-\pi}{2\pi} x \cos s \cos x + \frac{s-\pi}{2\pi} \cos s \sin x, & 0 \leq x \leq s \leq \pi, \\ \frac{1}{4\pi}(s^2 + (x - \pi)^2 - \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{3}{2}) \sin x \sin s + \frac{s}{2\pi} \sin x \cos s - \\ - \frac{x-\pi}{2\pi} s \cos x \cos s + \frac{x-\pi}{2\pi} \cos x \sin s, & 0 \leq s \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Согласно условию **D** введем алгебраическое уравнение:

$$l(c) \equiv c^3 \int_0^\pi \sin^4 x dx - 2c \int_0^\pi \sin^2 x dx = 0.$$

Оно имеет ровно три простых решения $c_{1,2} = \pm 2\sqrt{2/3}$, $c_3 = 0$. Следовательно, при $\beta = o(\lambda^{3/2})$ и достаточно малых $|\lambda|$ задача (3.2.1), (3.2.2) имеет ровно три решения:

$$y_{1,2} = \pm 2\sqrt{2\lambda/3} \sin x + d_{1,2}(\lambda),$$

$$y_3 = d_3(\lambda),$$

где $d_i(\lambda) = o(|\lambda|^{1/2})$, $i = 1, 2, 3$.

Очевидно, что при $\lambda > 0$ решения y_1, y_2 будут вещественными. Решение y_3 является минимальной ветвью.

Заключение

В первой главе работы получены достаточные условия существования минимальной непрерывной ветви малого решения для нелинейного операторного уравнения вида $F(x, \lambda) = 0$, заданного в банаховых пространствах, с необратимым оператором в главной части (теорема о неявном операторе не выполняется). Малый параметр λ является элементом произвольного линейного нормированного пространства. Приведены итерационные формулы поиска минимальной непрерывной ветви малого решения методом последовательных приближений в секториальной окрестности нуля. В качестве начального приближения берется нулевой элемент. Выделены некоторые классы интегральных уравнений фредгольма первого и второго рода, для которых применимы полученные результаты.

Во второй главе для уравнения вида $B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda)$, где оператор $B(\lambda)$ является линейным, а точка $\lambda = 0$ является фредгольмовской точкой для оператора $B(\lambda)$, получены достаточные условия существования и единственности минимальной ветви в секториальной окрестности нуля параметра λ . Даны итерационные формулы для поиска решения методом последовательных приближений, сходящимся при нулевом начальном приближении. Для оператора $B(\lambda)$ построены левый и правый асимптотические регуляризаторы, используемые в доказательстве сходимости метода.

В третьей главе предложен метод последовательных приближений, позволяющий в секториальных окрестностях строить решения с различными порядками малости для уравнений $F(u, \alpha(\lambda), \beta(\lambda)) = 0$ с функционалами $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ от векторного параметра. В качестве приложения этого класса уравнений исследована краевая задача об изгибе стержня в нерегулярном случае.

Литература

- [1] *Абдуллин, В.Р.* Сплетаемые уравнения разветвления в теории ветвления решений нелинейных уравнений: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / ИДСТУ СО РАН. Иркутск, 2002. — 73 с.
- [2] *Арутюнов, А.В.* Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа / А.В. Арутюнов // Успехи математических наук. — 2012. — Т. 67, вып. 3(405). — С. 3–62.
- [3] *Арутюнов, А.В.* Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки / А.В. Арутюнов // Математический сборник. — 2000. — Т. 191, № 1. — С. 3–26.
- [4] *Белолипецкий, А.А.* Об асимптотических свойствах решений смешанной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности / А.А. Белолипецкий, А.М. Тер-Крикоров // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 6. — С. 1296–1299.
- [5] *Брюно, А.Д.* Общий подход к асимптотическому нелинейному анализу / А.Д. Брюно // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 1996. — № 6. — С. 24–27.
- [6] *Брюно, А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях / А.Д. Брюно. — М.: Наука. Физматлит, 1998. — 288 с.
- [7] *Вайнберг, М.М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
- [8] *Васильева, А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.

- [9] *Васильева, А.Б.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. — М.: Физматлит, 2003. — 432 с.
- [10] *Гельман, А.Е.* О простых решениях операторных уравнений в случае ветвления / А.Е. Гельман // ДАН СССР. — 1963. — Т. 152, № 5. — С. 1042–1044.
- [11] *Двайт, Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. — М.: Наука, 1966. — 228 с.
- [12] *Дмитрук, А.В.* О нелокальной метрической регулярности нелинейных операторов / А.В. Дмитрук // Материалы международной конференции «Тихонов – 100». — 2006. — Т. 1. — С. 57–58.
- [13] *Иванов, В.К.* Избранные научные труды. Математика / В.К. Иванов. — М.: Физматлит, 2008. — 552 с.
- [14] *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
- [15] *Коллатц, Л.* Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. — М.: Наука, 1968. — 503 с.
- [16] *Красносельский, М.А.* Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рунтцкий, В.Я. Стеценко. — М.: Наука, 1969. — 418 с.
- [17] *Красносельский, М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. — М.: Гостехиздат, 1956. — 392 с.
- [18] *Крейн, С.Г.* Функциональный анализ / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
- [19] *Лаврентьев, М.М.* Теория операторов и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. — 702 с.

- [20] *Леонтьев, Р.Ю.* Униформизация и последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром / Р.Ю. Леонтьев, Н.А. Сидоров // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. — 2011. — Т. 4, № 3. — С. 116–123.
- [21] *Леонтьев, Р.Ю.* Минимальные ветви решений нелинейных уравнений в секториальных квазиокрестностях / Р.Ю. Леонтьев // Сборник статей III Международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем». — Пенза: Приволжский Дом знаний, 2008. — С. 19–21.
- [22] *Леонтьев, Р.Ю.* О малых решениях нелинейных уравнений в секториальной окрестности нуля / Р.Ю. Леонтьев // Материалы конференции «Ляпуновские чтения & презентации информационных технологий». — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2010. — С. 27.
- [23] *Леонтьев, Р.Ю.* О малых решениях нелинейных уравнений в секториальной окрестности нуля / Р.Ю. Леонтьев // Материалы конференции «Ляпуновские чтения & презентации информационных технологий». — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2011. — С. 32.
- [24] *Леонтьев, Р.Ю.* О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». — Ч. 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами. — Самара: СамГТУ, 2010. — С. 167–170.
- [25] *Леонтьев, Р.Ю.* О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных окрестностях / Р.Ю. Леонтьев // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 36–41.
- [26] *Леонтьев, Р.Ю.* О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных окрестностях / Р.Ю. Леонтьев // Труды XV Байкальской

международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — Т. 3: Оптимальное управление. — 2011. — С. 71–75.

- [27] *Леонтьев, Р.Ю.* О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных окрестностях / Р.Ю. Леонтьев // Тезисы II Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2010. — С. 46.
- [28] *Леонтьев, Р.Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений / Р.Ю. Леонтьев // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. — Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2009. — Вып. 9. — С. 77–83.
- [29] *Леонтьев, Р.Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений / Р.Ю. Леонтьев // Материалы конференции «Ляпуновские чтения & презентации информационных технологий». — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2008. — С. 29.
- [30] *Леонтьев, Р.Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений / Р.Ю. Леонтьев // Тезисы докладов Международной научно-образовательной конференции «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования». — М.: РУДН, 2009. — С. 276–278.
- [31] *Леонтьев, Р.Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений в секториальной окрестности нуля / Р.Ю. Леонтьев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2011. — Вып. 7, № 4[221]. — С. 66–70.
- [32] *Леонтьев, Р.Ю.* О малых решениях нелинейных уравнений в секториальной окрестности нуля / Р.Ю. Леонтьев // Тезисы III Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2012. — С. 30.

- [33] *Леонтьев, Р.Ю.* Теорема о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений / Р.Ю. Леонтьев // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. — Улан-Удэ: Изд-во Бурятского государственного университета, 2008. — Вып. 9. — С. 76–79.
- [34] *Леонтьев, Р.Ю.* Теорема о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений / Р.Ю. Леонтьев // Вестник Иркутского университета: Ежегодная научно-теоретическая конференция аспирантов и студентов: материалы. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2008. — С. 129–131.
- [35] *Леонтьев, Р.Ю.* Теорема о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Вестник Иркутского университета: Ежегодная научно-теоретическая конференция аспирантов и студентов: материалы. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2007. — С. 109–110.
- [36] *Леонтьев, Р.Ю.* Теорема о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Материалы конференции «Ляпуновские чтения & презентации информационных технологий». — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2007. — С. 20.
- [37] *Леонтьев, Р.Ю.* Теорема о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Труды III межвузовской зональной конференции, посвящённой памяти профессора Б.А. Бельтюкова «Математика и проблемы её преподавания в вузе». — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. пед. ун-та, 2007. — С. 59–60.
- [38] *Леонтьев, Р.Ю.* Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений / Р.Ю. Леонтьев // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2008. — № 15(115), вып. 1. — С. 37–41.

- [39] *Леонтьев, Р.Ю.* Теоремы о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. — 2009. — Т. 2, № 1. — С. 320–323.
- [40] *Леонтьев, Р.Ю.* Теоремы о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Материалы регион. науч.-практ. конф. «Интеллектуальные и материальные ресурсы Сибири». — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2008. — С. 33–38.
- [41] *Леонтьев, Р.Ю.* Теоремы о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Материалы конференции «Ляпуновские чтения & презентации информационных технологий». — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2009. — С. 30.
- [42] *Леонтьев, Р.Ю.* Теоремы о неявном операторе в секториальных окрестностях / Р.Ю. Леонтьев // Вестник Иркутского университета: Ежегод. науч.-теорет. конф. аспирантов и студентов: материалы. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2009. — С. 139–140.
- [43] *Логинов, Б.В.* Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации / Б.В. Логинов, Н.А. Сидоров // Матем. сборник. — 1991. — Т. 182, № 5. — С. 681–691.
- [44] *Логинов, Б.В.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой симметрии / Б.В. Логинов. — Ташкент: ФАН, 1985. — 184 с.
- [45] *Логинов, Б.В.* Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия / Б.В. Логинов // Вестник СамГУ. — 1998. — № 4(10). — С. 15–70.
- [46] *Люстерник, Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — М: Наука, 1965. — 520 с.

- [47] *Макаренко, Н.И.* О неединственности сопряженных течений / Н.И. Макаренко // Прикладная механика и техническая физика. — 2004. — Т. 45, № 2. — С. 68–74.
- [48] *Марканова, Д.Ю.* Итерационный метод построения разветвляющихся решений в случае квазилинейного уравнения разветвления: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. / Иркутский государственный университет. Иркутск, 1999. — 100 с.
- [49] *Назаров, Н.Н.* Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна / Н.Н. Назаров // Труды Ср.-Азиат ун-та. Сер. 5: Математика. — Ташкент, 1941. — Вып. 33. — С. 1–79.
- [50] *Некрасов, А.И.* Точная теория волн устоявшегося вида на поверхности тяжелой жидкости / А.И. Некрасов. — М.:Гостехиздат, 1951. — 95 с.
- [51] Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / под ред. В.А. Треногина, А.Ф. Филиппова. — М.:Физматлит, 2003. — 464 с.
- [52] *Романова, О.А.* Псевдообращения линейных операторов и их приложения / О.А. Романова. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1997. — 72 с.
- [53] *Свешников, А.Г.* Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных / А.Г. Свешников, М.О. Корпусов, А.Б. Альшин. — М.:Научный Мир, 2008. — 400 с.
- [54] *Сидоров, Д.Н.* Асимптотические приближения решений нелинейных краевых задач с векторным параметром в окрестности точки бифуркации / Д.Н. Сидоров, Н.А. Сидоров, Р.Ю. Леонтьев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2011. — № 3. — С. 16–22.
- [55] *Сидоров, Н.А.* Сплетающие уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений / Н.А. Сидоров, В.Р. Абдуллин. — Иркутск: Иркутский госуниверситет, 1999. — 36 с.

- [56] *Сидоров, Н.А.* Итерационные методы в окрестности точки ветвления решений нелинейных уравнений / Н.А. Сидоров, В.Р. Ермилова. — Иркутск: Иркутский госуниверситет, 1993. — 46 с.
- [57] *Сидоров, Н.А.* О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях / Н.А. Сидоров, Р.Ю. Леонтьев, А.И. Дрегла // Математические заметки. — 2012. — Т. 91, вып. 1. — С. 120–135.
- [58] *Сидоров, Н.А.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях / Н.А. Сидоров, Р.Ю. Леонтьев // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 226–237.
- [59] *Сидоров, Н.А.* Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях / Н.А. Сидоров, Р.Ю. Леонтьев // Школа-семинар: Нелинейный анализ и экстремальные задачи: тезисы. — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2008. — С. 63.
- [60] *Сидоров, Н.А.* Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений / Н.А. Сидоров, Р.Ю. Леонтьев // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 3. Вычислительная математика. — Иркутск-Северобайкальск, 2008. — С. 158–163. — Режим доступа: <http://www.sei.irk.ru/baikal2008/volume3.pdf>
- [61] *Сидоров, Н.А.* Последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром в нерегулярном случае / Н.А. Сидоров, Д.Н. Сидоров, Р.Ю. Леонтьев // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2012. — Т. XV, № 1(49). — С. 132–137.
- [62] *Сидоров, Н.А.* О решении интегрального уравнения гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н.А. Сидоров, Д.Н. Сидоров // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, № 2. — С. 404–409.

- [63] *Сидоров, Н.А.* Точки бифуркации нелинейных уравнений / Н.А. Сидоров, В.А. Треногин // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / под ред. В.А. Треногина, А.Ф. Филиппова. — М.: Физматлит, 2003. — С. 5–49.
- [64] *Сидоров, Н.А.* Регуляризация простых решений нелинейных уравнений в окрестности точки ветвления / Н.А. Сидоров, В.А. Треногин // Сиб. мат. журнал. — 1978. — Т. 19, № 1. — С. 180–185.
- [65] *Сидоров, Н.А.* Регуляризация линейных уравнений на основе теории возмущений Н.А. Сидоров, В.А. Треногин // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 11. — С. 2039–2049.
- [66] *Сидоров, Н.А.* Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н.А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. — Донецк: Институт прикладной математики и механики, 2004. — Вып. 14. — С. 161–164.
- [67] *Сидоров, Н.А.* N-ступенчатый итерационный метод в теории ветвления решений нелинейных уравнений / Н.А. Сидоров // Сибирский математический журнал. — 1997. — Т. 38, № 2. — С. 383–395.
- [68] *Сидоров, Н.А.* Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982. — 312 с.
- [69] *Сидоров, Н.А.* О явной параметризации решений нелинейных уравнений в окрестности точки ветвления / Н.А. Сидоров // Доклады академии наук. — 1994. — Т. 336, № 5. — С. 592–594.
- [70] *Сидоров, Н.А.* Параметризация простых разветвляющихся решений полного ранга и итерации в нелинейном анализе / Н.А. Сидоров // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2001. — № 9(472). — С. 59–65.
- [71] *Сидоров, Н.А.* Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами / Н.А. Сидоров // Матем. сборник. — 1995. — Т. 182, № 2. — С. 129–141.

- [72] *Тихонов, А.Н.* Некорректно поставленные задачи / А.Н. Тихонов, В.К. Иванов, М.М. Лаврентьев // Дифференциальные уравнения с частными производными. — М.: Наука, 1970. — С. 224–238.
- [73] *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Физматлит, 2002. — 488 с.
- [74] *Урысон, П.С.* Об одном типе нелинейных интегральных уравнений / П.С. Урысон // Матем. сб. — 1923. — Т. 31, № 2. — С. 236–255.
- [75] *Чистяков, В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1996. — 278 с.
- [76] *Юдович, В.И.* О бифуркации вращательных течений жидкости / В.И. Юдович // ДАН СССР. — 1966. — Т. 169, № 2. — С. 306–309.
- [77] *Dmitruk, A.V.* On a nonlocal metric regularity of nonlinear operators / A.V. Dmitruk // Control and Cybernetics. — 2005. — V. 34, №. 3. — P. 723–746.
- [78] *Hammerstein, A.* Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Mathematica, 54, 1930. P. 117–176.
- [79] *Iglisch, R.* Existenz- und Eindeutigkeitssatze bei nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann, 108, 1933. P. 161–189.
- [80] *Keller, H.B.* Numerical solutions of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems / H.B. Keller // Applications of bifurcation theory. — New York: Acad. Press, 1977. — P. 359–384.
- [81] *Keener, J.P.* Buckling imperfection sensitivity of columns and spherical caps / J.P. Keener // Quart. appl. Math. 32. 1974. P. 173–188.
- [82] *Langford, W.F.* Numerical solution of bifurcation problems for ordinary differential equations / W.F. Langford // Numer. Math. — 1977. — V. 28, No 2. — P. 71–190.

- [83] *Lyapunov, A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène donnée d'un mouvement de rotation / A.M. Lyapunov. — С.-Петербург: Зап. Акад. наук, 1906. — С. 1–225.
- [84] *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications* / N. Sidorov [et al.] Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 2002. 548 p.
- [85] *Moore, G.* The numerical treatment of non-trivial bifurcation points / G. Moore // Numer. Funct. Anal. Optim. 1980. — V. 2, No 6. — P. 441–472.
- [86] *Sattinger, D.H.* Topics in stability and bifurcation theory. Lecture Notes Math. 1973. Vol. 309. 190 p.
- [87] *Schmidt, E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Teil 3, Über die Auflösungen der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen, Math. Ann. 65. 1908. P. 370–399.
- [88] *Sidorov, N.A.* On Small Solutions of Nonlinear Equations with Vector Parameter in Sectorial Neighborhoods / N.A. Sidorov, R.Yu. Leont'ev, A.I. Dreglya // Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 91, № 1. — P. 90–104.
- [89] *Sidorov, N.A.* Successive approximations to the solutions to nonlinear equations with a vector parameter in a nonregular case / N.A. Sidorov, D.N. Sidorov, R.Yu. Leont'ev // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2012. — Vol. 6, № 3. — P. 387–392.
- [90] *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Inverse and ill-posed problems series / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. — Utrecht [u.a.]: VSP, 2003. — 216 p.
- [91] *Westseich, P.* Numerical bifurcation at simple eigenvalue / P. Westseich, Y.L. Varol // SIAM J. Numer. Anal. 1979. — V. 16, № 3. — P. 538–546.