

На правах рукописи

ЛЕОНТЬЕВ РОМАН ЮРЬЕВИЧ

**О РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ
УРАВНЕНИЙ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОКРЕСТНОСТЯХ
НЕРЕГУЛЯРНОГО ЗНАЧЕНИЯ ВЕКТОРНОГО
ПАРАМЕТРА**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ИРКУТСК — 2012

Работа выполнена в Институте математики, экономики и информатики
ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет» (Министерство
образования и науки Российской Федерации).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Сидоров Николай Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
доцент
Казаков Александр Леонидович,
ИДСТУ СО РАН, главный науч. сотр.

доктор физико-математических наук,
профессор
Фёдоров Владимир Евгеньевич
ЧелГУ, зав. кафедрой;

Ведущая организация: **Ульяновский государственный
технический университет**
(г. Ульяновск)

Защита диссертации состоится 25 декабря 2012 г. в 14:00 на заседании
диссертационного совета Д 003.021.01 в Институте динамики систем и
теории управления Сибирского отделения Российской академии наук
(ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном
сайте www.idstu.irk.ru ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 23 ноября 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н.

Т.В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию вопросов существования и построения решений нелинейных операторных уравнений с параметром в нерегулярном случае, когда условия теоремы о неявном операторе не выполняются.

Актуальность темы. Начала теории ветвления решений функциональных уравнений были заложены в работах А.М. Ляпунова и Э. Шмидта в 1906–1908 годах. С тех пор аналитические методы исследования нелинейных уравнений развивались в работах П.С. Урысона, А.И. Некрасова, А. Гаммерштейна, Р. Иглиша, Н.Н. Назарова, М.А. Красносельского, М.М. Вайнберга, В.А. Треногина, Н.А. Сидорова, А.В. Арутюнова, Б.В. Логинова и др.

В теории ветвления решений нелинейных уравнений с параметрами выделяют два типа приближенных методов — асимптотические и итерационные. Последние методы обычно требуют меньшей гладкости операторов, чем асимптотические методы.

В развитие современных асимптотических методов в многомерном случае принципиальное продвижение внесли работы В.А. Треногина, методы группового анализа Б.В. Логинова и В.А. Треногина, методы степенной геометрии А.Д. Брюно. Асимптотическими методами были решены сложнейшие задачи гидродинамики, теории упругости в математической физике и других областях современной и прикладной математики (работы В.И. Юдовича, В.А. Треногина, А.М. Тер-Крикорова, Б.В. Логинова, Д. Толанда, Д. Сэттинджера, Н.И. Макаренко и др.).

Появление итерационных методов дало новый толчок к развитию приближенных методов в теории ветвления. В этом направлении были рассмотрены вопросы униформизации решений, в том числе явная и неявная параметризация, предложен N-ступенчатый итерационный метод поиска ветвящихся решений нелинейных уравнений. Некоторые результаты, полученные в общей теории ветвлений решений нелинейных уравнений и ее приложений в последнее время, отражены в монографиях^{1,2,3,4}.

Актуальность диссертационного исследования определяется недостаточной изученностью нелинейных операторных уравнений с векторным параметром, когда оператор в главной части не имеет ограничен-

¹Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982. — 312 с.

²Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. В.А. Треногина, А.Ф. Филиппова. — М.: Физматлит, 2003. — 464 с.

³Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov [et al.]. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. — 548 p.

⁴B. Buffoni, J. Toland. Analytic Theory of Global Bifurcation. — Princeton; Oxford: Princeton university press, 2002. — 169 p.

ного обратного. В литературе такой случай называют нерегулярным, в отличие от регулярного случая, когда применима теорема о неявном операторе, и уравнение имеет единственное решение в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки. Нерегулярный случай характеризуется множеством различных эффектов, в том числе непредсказуемым поведением решений, их количеством и другими особенностями. В силу этих и других сложностей нерегулярный случай рассматривается при дополнительных жестких ограничениях на уравнения. Например, хорошо изучен случай фредгольмова оператора в главной части уравнения, поскольку он часто встречается в приложениях.

Но даже при таких сильных ограничениях на операторы, входящие в уравнение, авторы исследований могут столкнуться с серьезными затруднениями, к примеру, с невозможностью обобщить метод на случай, когда параметр, входящий в уравнение, является не числовым, а векторным; в итерационных методах сложность может вызвать выбор начального приближения, при котором метод сходится.

В представленной работе выделены классы уравнений для нерегулярного случая, которые после эквивалентных преобразований и замены переменных начинают удовлетворять условиям принципа сжимающих отображений. Как результат такой техники мы получаем набор достаточных условий, при которых решение существует, может быть найдено методом последовательных приближений, начальное приближение метода может быть любым элементом из достаточно малой окрестности нуля, параметр может быть элементом произвольного линейного нормированного пространства.

Учитывая повышенный интерес к решению уравнений в нерегулярном случае, вызванный многочисленными приложениями, представленные в работе результаты с учетом их научной новизны являются актуальными как для прикладной математики, так и для теоретической.

Целью работы является выявление классов нелинейных интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и краевых задач, для которых в результате замены переменных и эквивалентных преобразований в достаточно малой секториальной окрестности нерегулярного значения векторного параметра применим принцип сжимающих отображений, и, как следствие, существует возможность поиска решения методом последовательных приближений.

Объектом исследования являются классы нелинейных интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и нелинейных краевых задач с векторными параметрами, интерпретируемые как операторно-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.

Методы исследования. В работе используются аналитические и функциональные методы теории интегральных и дифференциально-операторных уравнений, методы теории операторов в банаховых пространствах.

Научная новизна полученных в диссертации результатов заключается в том, что для широких классов нелинейных уравнений, для которых не выполняется теорема о неявном операторе, получены достаточные условия существования решения, и приведен способ его построения. Параметр, входящий в уравнение, является элементом произвольного линейного нормированного пространства, в отличие от множества работ, посвященных случаю вещественного параметра. Оператор в главной части уравнения не ограничивается условием нормальной разрешимости. Приведенные итерационные методы не обременены сложностью выбора начального приближения и работают одинаково эффективно при любом достаточно малом начальном приближении.

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обусловлена строгостью доказательств, использованием широко известных результатов из теории дифференциальных и операторных уравнений, а также обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации получены результаты, расширяющие рамки применимости современных методов анализа в теории интегральных и дифференциальных уравнений для случаев, где теорема о неявном отображении не выполняется. В том числе результаты могут быть применены для построения решений нелинейных интегральных уравнений Фредгольма 1 рода, нелинейных краевых задач в окрестности нерегулярных значений параметра. Векторный параметр, входящий в уравнение, может быть элементом произвольного линейного нормированного пространства; на операторы, входящие в уравнение, не накладывается жестких ограничений (нормальной разрешимости, к примеру).

Полученные результаты могут быть использованы при решении прикладных задач, что продемонстрировано на конкретных примерах: в третьей главе диссертации автором решена одна краевая задача об изгибе стержня под действием сжимающей силы, в статье [5] Д.Н. Сидоровым найдены малые ветви задачи о колебаниях спутника в плоскости его эллиптической орбиты, в статье [6] А.И. Дрегла исследовала краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения, возникающего в теории моделирования полимеров, на существование малого решения и указала формулу для поиска этого решения методом

последовательных приближений. Некоторые части работы включены в соответствующие спецкурсы и использовались студентами кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ИМЭИ ИГУ при написании курсовых и дипломных работ.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках следующих программ:

- тема НИР задания Федерального агентства по образованию (проект 091-08-102/1.2.08);
- Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы. Госконтракт по ФЦП «Кадры» П 696 от 20 мая 2010 года;
- индивидуальный исследовательский грант Иркутского государственного университета 111-09-001/А2.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности 01.01.02 в диссертации рассмотрены дифференциальные, интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи с необратимым оператором в главной части, трактуемые как нелинейные операторные уравнения в функциональных пространствах с векторным параметром. Исследованы вопросы существования решений, и предложен способ их построения. Общие результаты применены для решения конкретных интегральных уравнений и краевых задач, в том числе прикладного характера. Поэтому область исследования соответствует пункту 8 «теория дифференциально-операторных уравнений» в списке «области исследований», определенной специальностью 01.01.02.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на следующих научных конференциях, в том числе 6 международных, 2 всероссийских: III Международная научно-техническая конференция «Аналитические и численные методы моделирования естественных и социальных проблем» (г. Пенза, Пензенский госуниверситет, 2008); XIV Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» (г. Иркутск, Байкал, 2008); Международная научно-образовательная конференция «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования» (г. Москва, РУДН, 2009); II Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2010); XV Байкальская Международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутская область, п. Листвянка, 2011); III Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (г. Иркутск, ИДСТУ

СО РАН, 2012); Всероссийская конференция «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2009); Седьмая Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, СамГТУ, 2010); III Межвузовская зональная конференция, посвященная памяти профессора Б.А. Бельтюкова «Математика и проблемы ее преподавания в вузе» (г. Иркутск, Иркутский педуниверситет, 2007); региональная научно-практическая конференция «Интеллектуальные и материальные ресурсы Сибири» (г. Иркутск, БГУЭП, 2008); Школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2008); ежегодные научно-теоретические конференции студентов и аспирантов ИГУ (г. Иркутск, 2007–2010); ежегодные конференции ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения & презентация информационных технологий» (г. Иркутск, 2007–2011), а также на семинарах, проводимых на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений под руководством Н.А. Сидорова.

Публикации и личный вклад. Результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 15 работах, среди которых 6 статей [1–6] в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертаций.

Результаты главы 1 опубликованы в работах [1, 3, 6–15], главы 2 — в работах [1, 6], главы 3 — в работах [2, 4, 5].

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц. В работах [1, 2, 4–7] Н.А. Сидорову принадлежат постановки исследуемых задач. В работах [4, 5] Д.Н. Сидорову принадлежат построения решений интегрального уравнения и краевой задачи о колебании спутника. В работе [6] А.И. Дрегля принадлежат доказательство существования решения краевой задачи моделирования полимеров и вывод формулы для поиска решения этой задачи методом последовательных приближений.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 124 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, который содержит 91 наименование.

Автор выражает глубокую признательность профессору Н.А. Сидорову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** сформулирована цель и дана общая характеристика работы, отражена актуальность, практическая значимость и научная

новизна исследования. Перечислены прикладные задачи, которые были исследованы с помощью доказанных в диссертации теорем.

В **главе 1** рассмотрено нелинейное операторное уравнение при условиях, когда теорема о неявном операторе не выполняется. Приведены классы операторов, встречающихся в приложениях, для которых полученные результаты могут быть применены.

Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — линейное нормированное пространство.

Рассматривается нелинейное операторное уравнение вида

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (1)$$

где $F : X \times \Lambda \rightarrow Y$ и $F(0, 0) = 0$. Предполагается, что нелинейный оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ в окрестности нуля и имеет производную Фреше $F_x(x, \lambda)$, которая является непрерывной по x и λ в окрестности нуля.

Введено следующее определение секториальной окрестности нуля.

Определение 1. Секториальной окрестностью точки $0 \in \Lambda$ будем называть открытое множество $S \subset \Lambda$, такое что $0 \in \partial S$, где ∂S — граница множества S .

Предполагается, что оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет в секториальной окрестности нуля S ограниченный обратный оператор, для которого имеет место оценка

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \quad \forall \lambda \in S, \quad (2)$$

где положительный непрерывный функционал $a(\lambda)$ удовлетворяет условию $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$, т.е. $a(0) = 0$.

Вводится область

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\},$$

где число $r > 0$.

Дано следующее определение минимальной непрерывной ветви, изучению вопросов существования и построения которой посвящена работа.

Определение 2. Если найдутся числа $r_0 \in (0, r]$ и $\varepsilon > 0$ такие, что из всех малых решений уравнения (1), определенных в области Ω , только одно решение $x^*(\lambda)$ попадает в область

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S, 0 < \|\lambda\| < \varepsilon\},$$

то решение $x^*(\lambda)$ будем называть минимальным решением уравнения (1) в области S , непрерывным в точке $\lambda = 0$ (далее кратко «минимальной непрерывной ветвью»).

Требуется построить минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ в нерегулярном случае, когда теорема о неявном операторе не выполняется.

На основании доказанных в работе теорем искомая ветвь решения строится методом последовательных приближений, сходящимся в области $S_0 \subseteq S$ при нулевом начальном приближении.

Условие (2) на оператор $F_x^{-1}(0, \lambda)$ является важным для данного исследования и используется на протяжении всей работы. В силу этого условия теорема о неявном операторе не выполняется, однако оно позволяет производить оценки при доказательствах теорем существования и сходимости предлагаемых методов последовательных приближений. В работе выделено несколько широких классов уравнений, для которых оценка вида (2) имеет место.

Лемма 1. Пусть $X = Y = H$ — гильбертово пространство, B_0 — самосопряженный неотрицательный оператор, B_1 — самосопряженный положительный оператор, т.е. $\forall x \in H$:

$$(B_0 x, x) \geq 0, \quad (B_1 x, x) \geq \gamma(x, x), \quad \gamma \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{\gamma a(\lambda)}\right),$$

где $0 < a(\lambda) < \varepsilon$.

Лемма 2. Если элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $k = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, образуют полный B_1 -жорданов набор фредгольмова оператора B_0 и $p = \max_{i=\overline{1, n}} p_i$, тогда в некоторой области $0 < |a(\lambda)| < \varepsilon$ существует ограниченный обратный оператор $(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}$ и выполнена оценка

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{|a(\lambda)|^p}\right).$$

Лемма 3. Пусть нильпотентный оператор B удовлетворяет условию $B^n = 0$, а оператор C имеет ограниченный обратный оператор, перестановочный с оператором B , $0 < |a(\lambda)| < \varepsilon$. Тогда оператор $a(\lambda)C - B$ имеет ограниченный обратный оператор, для которого выполнена оценка

$$\|(a(\lambda)C - B)^{-1}\| = O\left(\left(\frac{1}{|a(\lambda)|}\right)^n\right).$$

Доказана следующая теорема, в которой для уравнения (1) с необратимым оператором в главной части приведены достаточные условия существования минимальной непрерывной ветви.

Теорема 1. Пусть в области Ω выполнены условия: 1) оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ и имеет частную производную Фреше $F_x(x, \lambda)$, непрерывную по x и λ ; 2) $F(0, 0) = 0$; оператор $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим при любом $\lambda \in S$, причем при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ имеет место оценка (2); 3) найдется некоторая константа $L > 0$ такая, что для каждого $\lambda \in S$ будет справедливо неравенство

$$\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L\|x\|;$$

4) имеет место оценка $\|F(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Тогда найдется число $r_0 \in (0, r]$ и секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1) будет иметь в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$, которую можно построить методом последовательных приближений.

Следует отметить, что уравнение (1) может иметь и другие малые решения, но в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ при $\lambda \in S_0$ согласно принципу сжимающих отображений решение единственно, причем порядок малости этого решения, как бесконечно малой в нуле, может оказаться выше порядка бесконечно малой величины $a(\lambda)$. Все остальные малые решения уравнения (1) будут находиться в области $\|x\| > a(\lambda)r_0$.

Далее доказана теорема 2, которая, в силу замены условия 4) теоремы 1 на более слабое, позволяет в некоторых случаях исследовать уравнения, для которых теорема 1 неприменима, что подтверждено в работе соответствующими примерами.

Теорема 2. Пусть в области Ω выполнены условия: 1) оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ и имеет частную производную Фреше $F_x(x, \lambda)$, непрерывную по x и λ ; 2) $F(0, 0) = 0$; оператор $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in S$, причем при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ имеет место оценка (2); 3) найдется некоторая константа $L > 0$ такая, что при любом $\lambda \in S$ будет справедливо неравенство

$$\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L\|x\|;$$

4) линейное уравнение $F_x(0, 0)x = F(0, \lambda)$, где $\lambda \in S$, имеет решение $x^*(\lambda)$, причем выполнены оценки $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ и $\|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| = O(a(\lambda))$ при $\lambda \in S$.

Тогда найдется число $r_0 \in (0, r]$ и секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1) будет иметь в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$, которую можно построить методом последовательных приближений.

Следующая теорема в отличие от первых двух теорем рассмотрена в малой окрестности точки $a(\lambda)V_0$, где элемент V_0 выбирается таким образом, чтобы линейное уравнение

$$F_x(0, \lambda)x = F(a(\lambda)V_0, \lambda) \quad (3)$$

имело решение $x^*(\lambda)$ порядка $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Далее будем полагать, что область Ω имеет вид:

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\},$$

где $r > 0$, S — секториальная окрестность нуля.

Теорема 3. Пусть выполнены условия: 1) оператор $F(x, \lambda)$ и его производная Фреше $F_x(x, \lambda)$ непрерывны на множестве Ω ; 2) линейный оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, и выполнена оценка (2); 3) имеет место оценка $\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L(\lambda)\|x\|$ при $\lambda \in S$, причем $L(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Тогда найдется секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при каждом $\lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r$ будет существовать единственное решение уравнения (1) вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \rightarrow V_0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$.

Поскольку поиск элемента V_0 , удовлетворяющего условию (3), может оказаться задачей непростой, ниже приведена лемма, дающая достаточные условия, при которых V_0 можно выбрать в виде $V_0 = (\bar{c}, \bar{\varphi})$, где выражение $(\bar{c}, \bar{\varphi})$ понимается в смысле скалярного произведения.

Для этого вводятся следующие дополнительные предположения. Пусть оператор $F(x, \lambda)$ имеет вид

$$F(x, \lambda) = B(\lambda)x + R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (4)$$

где $B(\lambda)$ — замкнутый линейный оператор, зависящий от параметра λ . Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ непрерывен по x и λ в окрестности нуля и непрерывно дифференцируем по x в смысле Фреше в окрестности нуля. Функция $b(\lambda) : \Lambda \rightarrow Y$ непрерывна по λ . Линейный оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, причем справедлива оценка

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \quad \forall \lambda \in S, \quad (5)$$

где $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$, т.е. $a(0) = 0$. Пусть имеет место представление $B(\lambda) = B + a(\lambda)A + \omega(\lambda)$, где $\omega(\lambda) = o(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$, B, A — замкнутые операторы, не зависящие от λ , с плотными областями определения в X и со значениями в Y .

Лемма 4. Пусть для оператора (4) в области Ω выполнены условия: 1) $b(\lambda) = a^2(\lambda)b_2 + \xi(\lambda)$, где $\|\xi(\lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$; 2) оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, для которого выполнена оценка (5); 3) уравнение $Bx = b_2 + A(\bar{c}, \bar{\varphi})$ имеет решение x_0 , где $\bar{\varphi} \in N(B)$, $\bar{c}$ — постоянный вектор; 4) $\|R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$; 5) $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, \lambda) = 0$, $b(0) = 0$.

Тогда уравнение (3) имеет требуемое решение при $V_0 = (\bar{c}, \bar{\varphi})$.

Далее в главе 1 доказаны теоремы, аналогичные представленным выше, но наличия производной Фреше для оператора $F(x, \lambda)$ не требуется. Затем доказанные теоремы обобщены на случай, когда вместо замены $x = a(\lambda)V$, где $a(\lambda)$ определяется видом оператора $F_x^{-1}(0, \lambda)$, используется замена вида $x = \nu(\lambda)V$, где $\nu(\lambda)$ изначально является произвольным функционалом. В процессе доказательства $\nu(\lambda)$ выбирается таким образом, чтобы условия принципа сжимающихся отображений гарантированно выполнялись. Такой подход позволяет более тонко исследовать уравнение по сравнению со случаем, когда замена определена заранее.

В главе 2 рассмотрена задача из главы 1 в предположении, что оператор в главной части исследуемого уравнения является фредгольмовым.

Исследуется уравнение вида

$$B(\lambda) = R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (6)$$

где замкнутый линейный оператор $B(\lambda)$ с плотной в банаховом пространстве X областью определения, не зависящей от параметра $\lambda \in \Lambda$, предполагается фредгольмовым в точке $\lambda = 0$, $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в подпространстве нулей $N(B(0))$, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в дефектном подпространстве $N^*(B(0))$. Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ непрерывен по x и λ в окрестности нуля, $R(0, 0) = 0$.

При значениях параметра λ из секториальной окрестности нуля $S \subset \Lambda$ имеет место неравенство

$$\|R(\tau x_1, \lambda) - R(\tau x_2, \lambda)\| \leq L(r) \cdot \tau^l \cdot \|x_1 - x_2\|, \quad (7)$$

где x_1, x_2 — элементы из шара $\|x\| \leq r$, $L(r) = O(r)$, τ — величина, не зависящая от x_1 и x_2 . Функция $b(\lambda) : \Lambda \rightarrow Y$ определена и непрерывна в окрестности точки $\lambda = 0$, $b(0) = 0$. Согласно обобщенной лемме

Шмидта ограниченный оператор Треногина строится следующим образом:

$$\Gamma = \left(B(0) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}.$$

Здесь $\langle \varphi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $\langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$.

Введем обозначение

$$A(\lambda) \stackrel{def}{=} B(0) - B(\lambda). \quad (8)$$

Пусть справедливы следующие условия:

I. При $x \in D(B(0))$ имеет место неравенство

$$\|A(\lambda)x\| \leq c(\lambda) (\|x\| + b \|B(0)x\|),$$

где $c(\lambda) : S \subset \Lambda \rightarrow (0, +\infty)$ — определенный в секториальной окрестности S нуля положительный непрерывный функционал, $c(0) = 0$, $b \geq 0$.

Заметим, что в силу условия I и ограниченности оператора Γ $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} A(\lambda)\Gamma = 0$, и оператор $I - A(\lambda)\Gamma$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S_0 \subseteq S$, где $\|A(\lambda)\Gamma\| \leq q < 1$, по теореме Банаха об обратном операторе.

$$\text{II. } \left| \det \left\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda)\varphi_i, \psi_k \right\rangle_{i,k=\overline{1,n}} \right| = \Delta(\lambda),$$

где $\Delta(\lambda) \sim a(\lambda)$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, $a(\lambda)$, как и в предыдущих главах — положительный непрерывный функционал, $a(0) = 0$.

Лемма 5. Пусть $B(0)$ — фредгольмов оператор и выполнены условия I, II. Тогда оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, и выполнена оценка (5).

Далее пусть $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$, где $\|B_1x\| \leq \alpha(\|x\| + \beta \|B_0x\|)$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, B_0 — фредгольмов оператор.

III. Элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $k = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, образуют полный B_1 -жорданов набор фредгольмова оператора B_0 , а функционалы $\{\psi_i^{(k)}\}$, $k = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, образуют полный B_1^* -жорданов набор оператора B_0^* .

Определение 3. Линейный оператор $\Gamma_l(\lambda)$ называется левым асимптотическим регуляризатором оператор-функции $B(\lambda)$, если $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} \Gamma_l(\lambda)B(\lambda)x = x \ \forall x \in D(B)$.

Аналогично введен правый асимптотический регуляризатор $B(\lambda)$.

Если $\lambda = 0$ является изолированной особой фредгольмовой точкой оператор-функции $B(\lambda)$, то асимптотические регуляризаторы можно построить в явном виде.

Лемма 6. Пусть $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$ и условие III выполнено. Тогда в окрестности $0 < |c(\lambda)| < \varepsilon$ существует ограниченный обратный оператор $B^{-1}(\lambda)$, а также левый и правый регуляризаторы $\Gamma_l(\lambda)$ и $\Gamma_r(\lambda)$ оператора $B(\lambda)$, определяемые формулами:

$$\Gamma_l(\lambda) = \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \left\langle \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \right\rangle \varphi_i^{(1)}, \quad (9)$$

$$\Gamma_r(\lambda) = \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \left\langle \cdot, \psi_i^{(1)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-s)}. \quad (10)$$

При этом

$$B^{-1}(\lambda) = \Gamma_r(\lambda)(I - c(\lambda)B_1\Gamma)^{-1}, \quad (11)$$

где $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(1/c^p(\lambda))$, $p = \max(p_1, \dots, p_n)$.

Если B_1 — ограниченный оператор и $0 < |c(\lambda)| < 1/(\|\Gamma\|\|B_1\|)$, то справедливы операторные тождества

$$B^{-1}(\lambda) = (I - c(\lambda)\Gamma B_1)^{-1}\Gamma_l(\lambda) = \Gamma_r(\lambda)(I - c(\lambda)B_1\Gamma)^{-1}. \quad (12)$$

Теорема 4. Пусть оператор $B(\lambda)$ имеет вид $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$ и выполнено условие III, причем $\max(p_1, \dots, p_n) = p$, B_1 — ограниченный оператор. Пусть $\|b(\lambda)\| \leq \xi(\lambda) \cdot c^m(\lambda)$, где $\xi(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, $\|R(x, \lambda)\| \leq C \cdot \|x\|^l$, где $l \geq 2$, C — const, $m \geq \frac{p \cdot l}{l-1}$. Пусть при любом λ в секториальной окрестности нуля S имеет место неравенство

$$0 < c(\lambda) \leq \frac{q}{\|\Gamma\| \cdot \|B_1\|},$$

где $0 < q < 1$. Пусть выполнено условие (7).

Тогда уравнение (6) при $\forall \lambda \in S_0 \subseteq S$, где S_0 — секториальная окрестность нуля, имеет единственную минимальную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$. Кроме того, ветвь $x(\lambda)$ удовлетворяет оценке $\|x(\lambda)\| = o(c(\lambda)^{p/(l-1)})$, а последовательность $x_n(\lambda)$, где

$$x_n = c(\lambda)\Gamma B_1 x_{n-1} + \Gamma_l(\lambda)(R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)), \quad (13)$$

$x_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$, сходится при $\lambda \in S_0$ к этой ветви.

В главе 3 предложен метод, который, в отличие от результатов главы 2, позволяет последовательными приближениями в секториальных окрестностях строить решения с различными порядками малости уравнений с векторным параметром.

Рассматривается нелинейное уравнение

$$Bu = F(u, \alpha(\lambda), \beta(\lambda)), \quad (14)$$

где $F(u, \alpha, \beta) = F_T(u, \alpha, \beta) + R(u, \alpha, \beta)$, $F_T = \sum_{i+k+j=1}^T F_{i,k,j}(u) \alpha^k \beta^j$, $F_{1,0,0} = 0$. Замкнутый фредгольмов оператор B действует из X в Y и имеет плотную область определения в X . Предполагается, что $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в подпространстве нулей $N(B)$, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в дефектном подпространстве $N^*(B)$, $F_{i,k,j}$ — i -степенные операторы. Оператор R непрерывен, дифференцируем по u в смысле Фреше и удовлетворяет оценке $R(u, \alpha, \beta) = O((\|u\| + |\alpha| + |\beta|)^{T+1})$, $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — непрерывные функционалы, определенные на открытом множестве $\Omega \subset \Lambda$, $0 \in \partial\Omega$, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. Область Ω является секториальной окрестностью нуля.

Целью этой главы является построение асимптотических последовательных приближений непрерывных решений $u(\lambda) \rightarrow 0$ при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$.

Пусть выполнены условия:

A. Существуют $\nu = r/s$, $\Theta = (r + m)/s$, где r, s, m — натуральные числа такие, что

$$F_T(\alpha^\nu V, \alpha, 0) = \alpha^\Theta \sum_{i\nu+k=\Theta} F_{ik0}(V) + Q(V, \alpha), \quad (15)$$

где $\|Q(V, \alpha)\| = o(\alpha^\Theta)$, $\Theta \leq T$.

Заметим, что в конкретных случаях числа r, s, m легко вычислить, нанеся на координатную плоскость точки (i, k) , отвечающие ненулевым членам $F_{i,k,0}$, и построив соответствующую диаграмму Ньютона. Искомое ν полагается равным $\tan \gamma$, где γ — угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси i . Соответствующее Θ будет равно ординате точки пересечения этого отрезка с осью k . Поскольку диаграмма может иметь несколько отрезков, то выбор чисел r, s, m в представлении (15) может оказаться неоднозначным.

B. В окрестности точки $u = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ выполнена оценка Липшица:

$$\|F(u, \alpha, \beta) - F(u, \alpha, 0)\| \leq L(\|u\|, |\alpha|, |\beta|)|\beta|,$$

где $L(\|u\|, |\alpha|, |\beta|) = O((\|u\| + |\alpha| + |\beta|)^l)$, $l \geq 0$.

C. Функционал $\beta(\lambda)$ в секториальной окрестности Ω удовлетворяет при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$ оценке

$$\beta(\lambda) = o(\alpha(\lambda)^\Theta).$$

Замечание 1. Если в условии **B** $l \geq (r + m) \max(1/r, 1/s)$, то условие **C** можно заменить на более слабое условие $\beta(\lambda) = o(\alpha(\lambda)^{\Theta/(1+l)})$. Другими словами, в этом случае $\beta(\lambda)$ может быть в области Ω бесконечно малой более низкого порядка, чем требуется в условии **C**.

D. Пусть, кроме того, система алгебраических уравнений

$$l_j(c) \equiv \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F_{i,k,0}(c\varphi), \psi_j \right\rangle = 0, \quad (16)$$

где $j = \overline{1, n}$, $c\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, имеет простое решение c^* .

Теорема 5. Пусть выполнены условия **A–D**.

Тогда существует открытая область $\Omega_1 \subseteq \Omega$ такая, что $0 \in \partial\Omega_1$, и при $\lambda \in \Omega_1$ уравнение (14) имеет непрерывное решение

$$u(\lambda) = \alpha(\lambda)^\nu (c^* \varphi + d(\lambda)), \quad (17)$$

где c^* — простой корень алгебраической системы (16), функция $d(\lambda)$ имеет оценку $d(\lambda) = o(1)$ при $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$ и определяется единственным образом последовательными приближениями.

В качестве приложения полученных теоретических результатов в главе 3 рассмотрена краевая задача об изгибе стержня под действием сжимающей силы в нерегулярном случае:

$$y^{(4)}(x) + 2py^{(2)}(x) + y = f(y, \beta), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \quad y(\pi) = 0, \\ y^{(2)}(0) &= 0, \quad y^{(2)}(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где $f(y, \beta)$ — нелинейная функция, зависящая от малого параметра β .

Для определенности предполагается $f(y, \beta) = y^3(x) + a(x)\beta$, где $a(x)$ — заданный функционал, $\beta(\lambda)$ — малый параметр. Построены асимптотики малых решений задачи (18), (19) при достаточно малых λ и амплитуде $\beta = o(|\lambda|^{3/2})$:

$$y_{1,2} = \pm 2\sqrt{2\lambda/3} \sin x + r_{1,2}(\lambda),$$

$$y_3 = r_3(\lambda),$$

где $r_i(\lambda) = o(|\lambda|^{1/2})$, $i = 1, 2, 3$.

Очевидно, что при $\lambda > 0$ решения y_1, y_2 будут вещественными. Решение y_3 является минимальной ветвью при $\lambda \rightarrow 0$.

В **заключении** резюмированы полученные в работе результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Получены новые достаточные условия существования решений для нелинейного уравнения вида $F(x, \lambda) = 0$ в секториальных окрестностях нерегулярных значений параметра, являющегося элементом линейного нормированного пространства, в которых условия теоремы о неявных отображениях не выполняются.

2. Предложены методы последовательных приближений для построения решений в секториальных окрестностях нерегулярных значений параметра, сходящиеся при нулевом начальном приближении.
3. Построены асимптотики решений нелинейных интегральных уравнений и ряда нелинейных краевых задач в окрестностях нерегулярных значений параметра с помощью предложенных методов последовательных приближений.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] Сидоров Н.А., Леонтьев Р.Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 226–237.
- [2] Леонтьев Р.Ю., Сидоров Н.А. Униформизация и последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 3. С. 116–123.
- [3] Леонтьев Р.Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений в секториальной окрестности нуля // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2011. Вып. 7, № 4 [221]. С. 66–70.
- [4] Сидоров Д.Н., Сидоров Н.А., Леонтьев Р.Ю. Асимптотические приближения решений нелинейных краевых задач с векторным параметром в окрестности точки бифуркации // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2011. № 3. С. 16–22.
- [5] Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н., Леонтьев Р.Ю. Последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром в нерегулярном случае // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. XV, № 1 (49). С. 132–137.
- [6] Сидоров Н.А., Леонтьев Р.Ю., Дрегля А.И. О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях // Математические заметки. 2012. Т. 91, вып. 1. С. 120–135.
- [7] Сидоров Н.А., Леонтьев Р.Ю. Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений // Тр. XIV Байкальской междунар.

школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 3: Вычислительная математика. Иркутск, 2008. С. 158–163. URL: <http://www.sei.irk.ru/baikal2008/volume3.pdf>.

- [8] Леонтьев Р.Ю. Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2008. № 15 (115), вып. 1. С. 37–41.
- [9] Леонтьев Р.Ю. Теорема о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика и информатика. 2008. Вып. 9. С. 76–79.
- [10] Леонтьев Р.Ю. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений в секториальных квазиокрестностях // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сб. статей III Междунар. науч.-техн. конф. Пенза: Приволжский Дом знаний, 2008. С. 19–21.
- [11] Леонтьев Р.Ю. Теоремы о неявном операторе в секториальных областях // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2009. Т. 2, № 1. С. 320–323.
- [12] Леонтьев Р.Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика и информатика. 2009. Вып. 9. С. 77–83.
- [13] Леонтьев Р.Ю. О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных областях // Тр. VII Всерос. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч. 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами. Самара: СамГТУ, 2010. С. 167–170.
- [14] Леонтьев Р.Ю. О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных окрестностях // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 36–41.
- [15] Леонтьев Р.Ю. О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных окрестностях // Тр. XV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. Т. 3. С. 71–75.