

На правах рукописи

НАГУЛ НАДЕЖДА ВЛАДИМИРОВНА

**Метод логико-алгебраических уравнений
в анализе динамических систем**

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации
(в технике, экологии и экономике)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск — 2008

Работа выполнена в Институте динамики систем и теории управления
Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН).

Научный руководитель: академик РАН,
доктор физико-математических наук
Васильев Станислав Николаевич.

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук
Гончаров Сергей Савостьянович,

кандидат физико-математических
наук, доцент
Абдуллин Рафаэль Зинатович.

Ведущая организация: **Иркутский государственный
университет.**

Защита состоится 17 апреля 2008 г. в 13.30 на заседании диссертацион-
ного совета Д 003.021.01 в ИДСТУ СО РАН по адресу: 664033, г. Иркутск,
ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 17 марта 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н.

А.А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В математической теории систем хорошо известна продуктивность междисциплинарных исследований. В частности, в контексте данной диссертации, можно отметить исследования на стыке алгебры и логики (А.И. Мальцев, А. Тарский, Ю.Л. Ершов, Ю.И. Журавлев, С.С. Гончаров и др.), динамики систем и алгебры (С. Ли, Л.В. Овсянников, М.А. Арбиб и др.). Данная диссертация посвящена разработке на стыке динамики систем, алгебры и логики такого метода математической теории систем, который позволяет алгоритмически синтезировать критерии сохранения свойств систем при некоторых связывающих их отображениях типа морфизмов (эти и другие отображения, связывающие ту или иную рассматриваемую пару систем, далее называем *отображениями связи*, а априорно накладываемое на них условие — *условием связи*).

В качестве таких логико-алгебраических критериев назовем результаты о сохранении позитивных свойств алгебраических систем при гомоморфизмах (Р. Линдон, 1954), хотя, например, проблема сохранения свойства устойчивости при координатных преобразованиях систем дифференциальных уравнений известна еще с XIX века: устойчивость решения в одних переменных не означает его устойчивости в других переменных (А.М. Ляпунов, 1892). Одним из применений критериев сохранения явилось также сведение на их основе задачи изучения сложной модели к изучению более простой.

Метод сравнения, предложенный В.М. Матросовым¹ и развитый в его научной школе (Л.Ю. Анапольский, С.Н. Васильев, Р.И. Козлов и др.), обеспечивал алгоритмическое получение критериев сохранения поначалу простых свойств (так называемых свойств степени 1), но для довольно широкого класса динамических систем и в терминах отображений связи, именуемых вектор-функциями сравнения (ВФС). В развитие этого метода был предложен более общий метод сравнения — в форме логических уравнений (далее — *метод логических уравнений*² (ЛУ)), имевших структуру $\mathfrak{X} \& \mathfrak{M} \& \mathfrak{P}' \rightarrow \mathfrak{P}$, где $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}$ — известные члены уравнения, $\mathfrak{X}$ подлежит отысканию, $\mathfrak{P}$ — свойство, рассматриваемое в одной системе (S), $\mathfrak{P}'$ — свойство второй системы (S'), $\mathfrak{M}$ — условие связи, которое в случае метода В.М. Матросова является условием мажорирования ВФС вдоль процессов

¹Матросов В.М. Метод сравнения в динамике систем. I, II // Диф. уравнения. — 1974. — Т. 10, N 9; 1975. — Т. 11, N 3.

²Васильев С.Н. Метод сравнения в анализе систем. I–IV // Диф. уравнения. — 1981. — Т. 17, N 9; Т. 17, N 11; 1982. — Т. 18, N 2; Т. 18, N 6.

изучаемой системы S соответствующими процессами вспомогательной системы S' (более простой по замыслу и именуемой системой сравнения), но это могут быть и другие условия: условие типа того или иного морфизма, условие топологической эквивалентности S , S' и другие. Метод ЛУ пригоден для изучения свойств $\mathfrak{P}$ общего вида (произвольной степени), причем для разных математических моделей и их разных преобразований (отображений связи с разными условиями $\mathfrak{M}$: ВФС, морфизмов и др.). Следует подчеркнуть, что критерии, получаемые в терминах ВФС и в терминах морфизмов, вообще говоря, не сравнимы по силе: хотя само условие связи $\mathfrak{M}$ в случае морфизма жестче условия ВФС, прочие условия (условия $\mathfrak{X}$), входящие в критерий сохранения (и, вообще говоря, более сложные, чем требования типа сохранения операций или отношений), тем не менее оказываются мягче в случае морфизма. Кроме того, метод сравнения и метод ЛУ синтезируют искомые критерии гибко под конкретный вид изучаемого свойства. Еще более общий метод решения логических уравнений известен как *метод редукции*³, оперирующий с уравнениями вида $\mathfrak{X}(\{\mathfrak{C}_i : i = 1, 2, \dots, n\}) \rightarrow \mathfrak{P}$, где $n \geq 1$.

Для получения критериев сохранения, состоящих из условий, имеющих смысл условий типа сохранения операций или отношений (т.е. формулируемых в духе традиционных морфизмов), в развитие упомянутых результатов Р. Линдона в теории алгебраических систем, а также в развитие так называемых критериев переносимости термов и соотношений в теории структур Н. Бурбаки (1965), С.Н. Васильевым и С.В. Афанасьевой разработан *метод представимости* с применениями в динамике систем. Его особенностью является то, что каждый критерий, в отличие от критериев, получаемых методом ЛУ, обслуживает сразу целый класс свойств (например, как у Р. Линдона: все позитивные свойства сохраняются при гомоморфизме). При применении метода представимости изучаемую модель системы следует перевести в форму многоосновной алгебраической системы и представить определение изучаемого свойства в соответствующем классе свойств, для которого имеется критерий сохранения. К сожалению, задача представимости (эквивалентными преобразованиями) формулы изучаемого свойства в требуемом классе является, вообще говоря, алгоритмически неразрешимой. Поэтому оказывается привлекательным путем развития метода ЛУ избежать этой задачи представимости, а также совместить гибкость формирования критерия сохранения по конкретному виду изучаемо-

³Васильев С.Н. Метод редукции и качественный анализ динамических систем. I, II // Изв. РАН, ТиСУ. — 2006. — N 1; N 2.

го свойства с получением всех условий в духе традиционных морфизмов.

Эта задача была решена в случае одноосновных алгебраических систем (С.Н. Васильев, 1988). Логические уравнения при этом имеют вид $\mathfrak{X} \& \mathfrak{P}' \rightarrow \mathfrak{P}$, т.е. априорно никаких условий связи не задается, что полезно, так как тем самым повышается уровень алгоритмичности развиваемого аппарата. При этом для получения достаточно эффективных критериев сохранения повышается нагрузка на алгоритмы формирования условий $\mathfrak{X}$ в части сужения разнообразия скулемовских функций, отвечающих кванторам существования в условиях $\mathfrak{X}$. Применение этих алгоритмов для конкретных $\mathfrak{P}$ помогает и в неалгоритмическом формировании критериев сохранения целых классов свойств алгебраических систем. Между тем, например, именно случай морфизма динамических систем важен для тех процедур исследования устойчивости или других динамических свойств, когда требуется переход к новым переменным, поскольку надо гарантировать эквивалентность исследуемого свойства в старых и новых переменных или хотя бы однонаправленный его перенос⁴. Случай, когда отображения связи являются морфизмами, важен и в связи с решением задач стабилизации программных движений систем с управлением с помощью преобразования этих систем к некоторым эквивалентным каноническим формам⁵. В настоящее время морфизмы применяются в качественном исследовании динамических систем, в том числе с управлениями, и в ряде работ зарубежных авторов⁶. Однако в динамике систем предложенные алгоритмы не удобны, поскольку алгебраизация моделей динамических систем, осуществляемая для применения этих алгоритмов, приводит к многоосновным алгебраическим системам (основными множествами выступают пространство состояний, шкала времени и др.). Поэтому актуален вопрос о развитии метода ЛУ для многоосновного случая (в частности, без априорного задания условий связи), что и является предметом исследования в данной диссертации.

Следует также подчеркнуть, что в силу большей сложности, по характеру своих определений, тех математических объектов, которые изучаются в динамике систем, в сравнении с традиционными алгебраическими системами, требуется рассматривать такие многоосновные алгебраические системы (МАС), функции и отношения которых определены не просто на

⁴Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.

⁵Кавинов А.В., Крищенко А.П. Устойчивость решений в разных переменных // Диф.уравнения. — 2007. — Т. 43, N 11. — С. 1470–1473.

⁶Michel A.N., Kaining W.K., Bo H. Qualitative Theory of Dynamical Systems. — N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 2001. — 706 p.

базисных множествах или их декартовых произведениях, а на произвольных ступенях в смысле Н. Бурбаки и, более того, на ступенях с некоторыми дополнительными расширениями, вводимыми в диссертации (в частности, для охвата таких динамических систем, как дискретно-событийные системы). При этом в связи с такой общностью рассматриваемых МАС в логический язык вводятся дополнительные выразительные средства, и не только для представления схем и ступеней (образуемых по этим схемам), но также для представления канонических распространений отображений (КРО) основных множеств на ступени, ибо именно до класса таких функций — КРО — и сужается алгоритмически разнообразие упомянутых выше скулемовских функций, важных для эффективности получаемых критериев сохранения. Для специализации уравнений в таком расширенном (логико-алгебраическом) языке будем их называть *логико-алгебраическими уравнениями (ЛАУ)* и рассматривать два типа уравнений: $\mathcal{X} \& \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ и $\mathcal{X} \& \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ (второе уравнение соответствует изучению сохранения свойства в направлении, обратном направлению отображения связи, действующего из S в S'). Эти уравнения являются частным случаем уравнений метода редукции, поэтому предлагаемые в диссертации алгоритмы могут частично обосновываться с применением метода редукции, но лишь частично, поскольку формирование решения $\mathcal{X}$ осуществляется с дополнительными процедурами сужения скулемовских функций и некоторыми другими, также отсутствующими в методе редукции, процедурами.

В качестве одного из примеров применения развиваемого метода рассматриваются *дискретно-событийные системы (ДСС)*, главной отличительной особенностью которых является моделирование эволюции системы путем учета наступления каких-либо *событий*. Потребность в ДСС обуславливается стремительным развитием производственных систем и сетей связи, транспортных сетей и других, в первую очередь антропогенных, систем. Кроме того, ДСС широко применимы в технике. С их помощью моделируются, например, автоматизированные отсеки сборки штоков поршней⁷, мультипроцессоры по производству полупроводников⁸, термостаты, перегонные колонны химического производства⁹, автономные мобильные

⁷Moody J.O., Antsaklis P.J. Petri Net Supervisors for DES with Uncontrollable and Unobservable Transitions // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2000. — Vol. 45, N 3. — P. 462–476.

⁸Balemi S., Hoffmann G.J., Gyugyi P., Wong-Toi H., Franklin G.F. Supervisory Control of a Rapid Thermal Multiprocessor // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1993. — Vol. 38, N 7. — P. 1040–1059.

⁹Stiver J.A., Antsaklis P.J., Lemmon M.D. A Logical DES Approach to the Design of Hybrid Control Systems // Math. Comput. Modelling. — 1996. — N 23 (11/12). — P. 55–76.

роботы¹⁰ и др.

Вместе с тем, несмотря на значительное число работ, посвященных ДСС, пока не разработано общего аппарата их исследования, который со временем мог бы превратиться в некоторый аналог аппарата дифференциальных уравнений для динамических систем с непрерывными переменными. В диссертации предлагается способ исследования динамики ДСС и некоторых других динамических систем, базирующийся на предложенном автором методе решения указанных выше логико-алгебраических уравнений.

Цели работы:

- разработка метода алгоритмического синтеза критериев сохранения свойств многоосновных алгебраических систем;
- получение с помощью этого метода критериев сохранения свойств динамических систем, в частности, представление дискретно-событийных систем в виде многоосновных алгебраических систем и получение критериев сохранения различных динамических свойств ДСС в их собственных терминах;
- применение полученных результатов в анализе свойств модели сети общественного транспорта и некоторых других динамических систем.

Методика исследования. В работе использованы методы математической логики, теории алгебраических систем, теории устойчивости и метод сравнения в математической теории систем.

Научная новизна. В работе впервые решена задача алгоритмического синтеза критериев сохранения свойств многоосновных алгебраических систем как в направлении, совпадающем с направлением действующих между системами отображений, так и в противоположном направлении. Изучены некоторые свойства дискретно-событийных систем. Для представления ДСС в виде МАС произведено расширение понятия ступени Н. Бурбаки с использованием дополнительной операции образования последовательностей. Исследована модель сети общественного транспорта. Все результаты диссертации являются новыми и снабжены строгими доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы

¹⁰Kosecka J., Bajcsy R. Discrete Event Systems for Autonomous Mobile Agents // J. of Robotics and Autonomous Systems. — 1994. — N 12. — P. 187–198.

в дальнейших исследованиях дискретно-событийных систем и многоосновных алгебраических систем. Работа выполнена по программе фундаментальных исследований СО РАН N 2.4 “Математическая теория управления”, при финансовой поддержке в Программе N 19 Президиума РАН, N 2005-ИТ-12.1.002 ФЦНТП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям науки и техники”, Программе фундаментальных исследований N 22 Президиума РАН и грантом Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации НШ-9508.2006.1.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на II Всероссийской конференции “Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы” ИКВТС’06 (пос. Энхалук, 1–4 июля 2006 г.), конференции “Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий” (г. Иркутск, 14–15 декабря 2006 г.), XII Байкальской Всероссийской конференции с международным участием “Информационные и математические технологии в науке и управлении” (оз. Байкал, г. Иркутск, 2–10 июля 2007 г.), а также неоднократно докладывались на семинарах Института динамики систем и теории управления СО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [7].

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 129 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 78 наименований, включая работы диссертанта.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается обоснование актуальности темы исследований и приводится краткое содержание работы.

В **первой главе** представлен обзор литературы по теме диссертации, начиная с объектов динамического анализа и кончая методами анализа. П. 1.1 посвящен описанию известных результатов использования логических уравнений, а также проблематике изучения вопросов сохранения свойств при отображениях систем. В п. 1.2 приводится краткий обзор литературы, касающейся традиционных многоосновных алгебраических систем. В п. 1.3 дан анализ некоторой литературы, посвященной ДСС, а в п. 1.4 приводятся соответствующие базовые понятия и терминология, используемые в главе 3.

Дискретно-событийной системой называется пятерка $G = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, \{f_e\}_{e \in \mathcal{E}}, g, E_v)$. Здесь $\mathcal{X}$ — множество состояний системы; $\mathcal{E}$ — множество событий; $\{f_e\}_{e \in \mathcal{E}}$ — операторы перехода, $f_e : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ для всех $e \in \mathcal{E}$; $g : \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{E}} \setminus \{\emptyset\}$ — *функция возможностей*, т.е. $g(x)$ есть множество событий, которые могут произойти, если система находится в состоянии $x \in \mathcal{X}$. Рассматривается дискретная шкала “времени” как шкала значений счетчика событий $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, и $x_k \in \mathcal{X}$ представляет собой состояние в момент $k \in N$. Если в этот момент происходит событие $e_k \in g(x_k)$, то состояние x_{k+1} задается применением оператора f_{e_k} , т.е. $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$.

Любая последовательность $\mathbf{x} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\} \in \mathcal{X}^N$ такая, что для всех k $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$, где $e_k \in g(x_k)$, называется *траекторией состояний* (*фазовой траекторией*). Множество всех событийных траекторий, обозначаемое E ($E \subset \mathcal{E}^N$), состоит из тех последовательностей $\mathbf{e} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, \dots\} \in \mathcal{E}^N$, для которых существуют траектории состояний $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^N$ такие, что для всех k $e_k \in g(x_k)$. Здесь выражение B^A для любых множеств A и B обозначает множество всех отображений из A в B .

Через $E_v \subset E \subset \mathcal{E}^N$ обозначается множество *действительных событийных траекторий*, т.е. таких, которые физически возможны в системе.

В п. 1.5 описана известная модель сети общественного транспорта, свойства которой изучаются в главе 3.

Вторая глава посвящена разработке метода логико-алгебраических уравнений для алгоритмизации синтеза критериев сохранения свойств вводимых в главе общих многоосновных алгебраических систем конечного типа (ОМАСК).

Для определения ОМАСК в п. 2.1 сначала вводится следующее понятие *схемы ступеней* (далее часто для краткости — просто *схемы*). Рассмотрим множество из k символов $\sigma_a = \{a_\lambda | \lambda = \overline{1, k}\}$ ($k > 0$) и сигнатуру $\sigma_0 = \{\sqcup \times \sqcup, \mathcal{P}, \mathcal{N}\}$. Определим множество *схем ступеней над σ_a* следующим образом:

- 1) для всех $\lambda = \overline{1, k}$ a_λ есть схема;
- 2) если S_1, S_2 — схемы, то $(S_1 \times S_2)$ — схема;
- 3) если S — схема, то $\mathcal{P}(S)$ и $\mathcal{N}(S)$ — схемы;
- 4) выражение является схемой только в том случае, когда это следует из правил 1–3.

Множество всех схем ступеней $S[\sigma_a]$ над σ_a обозначим $St[\sigma_a]$.

Если имеется семейство множеств $A = \{A_\lambda | \lambda = \overline{1, k}\}$, то для любой схемы ступеней $S[\sigma_a] \in St[\sigma_a]$ индукцией по построению схемы $S[\sigma_a]$ очевидным образом и однозначно определяется множество $S[A]$ — *ступень над семейством A* (по схеме S). При этом символы $a_\lambda \in \sigma_a$ интерпретируются как множества $A_\lambda \in A$ ($\lambda = \overline{1, k}$), бинарный символ $\sqcup \times \sqcup \in \sigma_0$ — как операция образования декартова произведения, т.е. для схем $S_1, S_2 \in St[\sigma_a]$ полагаем $(S_1 \times S_2)[A] = S_1[A] \times S_2[A]$, функциональный символ $\mathcal{P} \in \sigma_0$ — как операция образования булеана, т.е. для схемы $\mathcal{P}(S) \in St[\sigma_a]$ полагаем $\mathcal{P}(S)[A] = 2^{S[A]}$, символ $\mathcal{N} \in \sigma_0$ — как операция образования множества последовательностей, т.е. для схемы $\mathcal{N}(S) \in St[\sigma_a]$ полагаем $\mathcal{N}(S)[A] = (S[A])^N$. Таким образом, классические понятия схемы и ступени Бурбаки¹¹ расширено введением в σ_0 дополнительного символа $\mathcal{N}$ и указанной интерпретацией схем.

Далее вводится язык первого порядка $\mathcal{L}$ — термов и формул, интерпретируемых естественным образом. Для каждой схемы $S_i = S_i[\sigma_a] \in St[\sigma_a]$ вводятся индивидные переменные $u_{i1}, u_{i2}, \dots$ — переменные сорта $S_i[\sigma_a]$. Рассматривается сигнатура $\sigma = \sigma_P \cup \sigma_F \cup \sigma_E$. Здесь:

$\sigma_F = \{F_\beta^{n_\beta}, \beta = \overline{1, k_F}, n_\beta \in \{1, 2, \dots\}\}$ — множество функциональных символов, причем с каждым символом $F_\beta^{n_\beta}$ связываются схемы в количестве $n_\beta + 1$, обозначаемые $S_{1\beta}[\sigma_a], S_{2\beta}[\sigma_a], \dots, S_{n_\beta\beta}[\sigma_a], S_{n_\beta+1,\beta}[\sigma_a] \in St[\sigma_a]$, при этом последняя схема в интерпретации символа $F_\beta^{n_\beta}$ n_β -местной функции $\mathbf{F}_\beta^{n_\beta}$ позволит фиксировать область значений этой функции, а остальные схемы — области значений аргументов этой функции;

$\sigma_P = \{P_\gamma^{n_\gamma}, \gamma = \overline{1, k_P}, n_\gamma \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ — множество предикатных символов со связанными с ними схемами $T_{1\gamma}[\sigma_a], \dots, T_{n_\gamma\gamma}[\sigma_a] \in St[\sigma_a]$, $\gamma = \overline{1, k_P}$;

¹¹Бурбаки Н. Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 465 с.

$\sigma_E = \{E_\delta, \delta = \overline{1, k_E}\}$ — множество символов выделенных элементов со связанными с ними схемами $U_\delta[\sigma_a] \in St[\sigma_a]$, $\delta = \overline{1, k_E}$.

Используются также знаки “=” (равенства) и $\langle \sqcup, \sqcup \rangle$ (упорядоченной пары). Хотя эти символы могут связывать элементы различных пар схем $S_i[\sigma_a]$ и $S_j[\sigma_a]$, используются одни и те же символы для любой такой пары.

Определяется множество правильно построенных выражений, обозначающих объекты и называемых *термами*; одновременно для термов вводится понятие *сорта*:

1) всякая индивидуальная переменная u_{ij} есть терм; сортом этого терма, как условлено, называется схема $S_i[\sigma_a]$ переменной u_{ij} , и для сорта вводится обозначение $|u_{ij}| = S_i[\sigma_a]$;

2) всякий символ E_δ выделенного элемента есть терм, $|E_\delta| = U_\delta[\sigma_a]$;

3) если t_1, t_2 — термы сортов $|t_1|, |t_2|$, соответственно, то $\langle t_1, t_2 \rangle$ является термом сорта $|t_1| \times |t_2|$;

4) если $t = \langle \dots \langle \langle t_1, t_2 \rangle, t_3 \rangle, \dots t_{n_\beta} \rangle$ и $|t_i| = S_{i\beta}[\sigma_a]$, $i = \overline{1, n_\beta}$, то $F_\beta^{n_\beta}(t_1, \dots, t_{n_\beta})$ является термом сорта $S_{n_\beta+1, \beta}[\sigma_a]$ ($\beta = \overline{1, k_F}$);

5) выражение является термом только в том случае, когда это следует из правил 1–4.

Для формулировки утверждений об объектах определяются правильно построенные выражения, называемые *формулами*:

1) если t_1, t_2 — термы и $|t_1| = |t_2|$, то выражение $t_1 = t_2$ является формулой;

2) если $t_1, \dots, t_{n_\gamma}$ — термы, $|t_1| = T_{1\gamma}[\sigma_a], \dots, |t_{n_\gamma}| = T_{n_\gamma\gamma}[\sigma_a]$ и $P_\gamma^{n_\gamma}$ — предикатный символ, с которым связаны схемы $T_{1\gamma}[\sigma_a], \dots, T_{n_\gamma\gamma}[\sigma_a]$, то $P_\gamma^{n_\gamma}(t_1, \dots, t_{n_\gamma})$ — формула;

3) если $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ — формулы, то выражения $\neg(\mathfrak{F}_1)$, $(\mathfrak{F}_1 \& \mathfrak{F}_2)$, $(\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2)$, $(\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2)$ являются формулами;

4) если $\mathfrak{F}$ — формула, $\tilde{\omega}_\alpha$ — типовый квантор (ТК) вида $\hat{\omega}_\alpha \stackrel{df}{=} \forall z_\alpha : Z_\alpha \stackrel{df}{=} \forall z_\alpha (Z_\alpha \rightarrow \sqcup)$ (ТК всеобщности) или вида $\check{\omega}_\alpha \stackrel{df}{=} \exists z_\alpha : Z_\alpha \stackrel{df}{=} \exists z_\alpha (Z_\alpha \& \sqcup)$ (ТК существования), где Z_α — формула, то выражения $\hat{\omega}_\alpha \mathfrak{F} = \forall z_\alpha (Z_\alpha \rightarrow \mathfrak{F})$, $\check{\omega}_\alpha \mathfrak{F} = \exists z_\alpha (Z_\alpha \& \mathfrak{F})$ — формулы; здесь z_α — индивидуальные переменные u_{ij} ;

5) выражение является формулой только в том случае, когда это следует из правил 1–4.

Формулы, построенные по правилам 1 и 2, называются *атомарными*.

Общей многоосновной алгебраической системой конечного типа сигнатуры σ называется объект $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, состоящий из семейства основных множеств $A = \{A_\lambda | \lambda = \overline{1, k}\}$ и отвечающих множествам

σ_F , σ_P и σ_E следующих множеств: множества функций $\Omega_F = \{\mathbf{F}_\beta^{n_\beta} | \mathbf{F}_\beta^{n_\beta} : S_{1\beta}[A] \times S_{2\beta}[A] \times \dots \times S_{n_\beta\beta}[A] \rightarrow S_{n_\beta+1,\beta}[A], \beta = \overline{1, k_F}\}$, множества отношений $\Omega_P = \{\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma} | \mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma} \subseteq T_{1\gamma}[A] \times \dots \times T_{n_\gamma\gamma}[A], \gamma = \overline{1, k_P}\}$ и множества выделенных элементов $\Omega_E = \{\mathbf{E}_\delta | \mathbf{E}_\delta \in U_\delta[A], \delta = \overline{1, k_E}\}$. Благодаря обобщению понятия схемы и ступени Н. Бурбаки, в форме ОМАСК легко представить разные модели динамических систем и, в частности, ДСС.

Для любого семейства отображений $\varphi = \{\varphi_\lambda | \varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda, \lambda = \overline{1, k}\}$ и любой ступени $S[A] \in St[A]$ определяется *каноническое распространение отображений (КРО)* φ_λ на $S[A]$, т.е. $\langle \varphi \rangle^{S[A]} : S[A] \rightarrow S[A']$ (оно обобщает определение Н. Бурбаки на расширенную шкалу ступеней). При этом используются обозначения: $\psi_1 * \psi_2$ — КРО ψ_1, ψ_2 на $A_1 \times A_2$, $\hat{\psi}_1$ — КРО ψ_1 на 2^{A_1} , $\psi_1|^N$ — КРО ψ_1 на A_1^N (аналогичны обозначения для произвольных отображений с произвольной ступенью $S_1[A]$ вместо A_1 и $S_2[A]$ вместо A_2).

Пусть $\mathcal{F}(\bar{x}) \stackrel{df}{=} \mathcal{F}(x_1, \dots, x_p)$ — произвольная формула сигнатуры σ в языке $\mathcal{L}$ с переобозначенными через x_μ для удобства всеми ее свободными переменными u_{ij} , $\mu = \overline{1, p}$, $p \geq 0$. Не ограничивая общности, считаем, что переменных, одновременно связанных и свободных, нет, что отсутствуют ТК с одинаковыми кванторными переменными z_α и что $\mathcal{F}$ является формулой, образованной из литер (заключительных формул) $\mathcal{F}'$, т.е. из атомарных формул $\mathcal{F}'_+$ или их отрицаний $\mathcal{F}'_-$, с помощью связок $\&$, $\vee$ и ТК $\hat{\omega}_\alpha$ или $\check{\omega}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, n}$, $\nu = \overline{1, M}$. Такие формулы, в отличие от позитивных формул, используемых, например, в общей теории алгебраических систем, названы *обобщенными позитивными формулами*.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ — ОМАСК сигнатуры σ с семействами основных множеств $A = \{A_\lambda | \lambda = \overline{1, k}\}$ и $A' = \{A'_\lambda | \lambda = \overline{1, k}\}$, соответственно.

Формула $\mathcal{F}(\bar{x})$ определяет на системе $\mathfrak{A}$ p -арный формульный предикат $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ (в отличие от традиционного определения¹², $\mathcal{F}$ называется свойством ОМАСК даже при $p \neq 0$). В п. 2.2 предлагается способ синтеза условий $\mathfrak{X}$ сохранения истинностных значений предиката $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ относительно отображений $\varphi = \{\varphi_\lambda | \varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda, \lambda = \overline{1, k}\}$. Иначе говоря, алгоритмизировано получение нетривиальных условий $\mathfrak{X}$, при которых из выполнимости на системе $\mathfrak{A}$ формулы $\mathcal{F}$ при каких-либо фиксированных значениях $c_1, \dots, c_p$ переменных $x_1, \dots, x_p$ вытекает выполнимость $\mathcal{F}$ на $\mathfrak{A}'$ и соответствующих значениях КРО $\langle \varphi \rangle^{S_1[A]}(c_1), \dots, \langle \varphi \rangle^{S_p[A]}(c_p)$, где $S_\mu[A]$ — сорт переменной x_μ , $\mu = \overline{1, p}$.

$\mathfrak{X}$ ищется как формула языка первого порядка, расширяющего $\mathcal{L}$. Обо-

¹²Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 329 с.

значим $\sigma^* = \sigma \cup \sigma' \cup \{f_\lambda\}$, где сигнатура σ' выбирается так, чтобы $\sigma' \cap \sigma = \emptyset$, и состоит из дубликатов сигнатуры σ в новых обозначениях. Функциональные символы f_λ интерпретируются в дальнейшем на множествах однозначных и всюду определенных на основных множествах A_λ функций $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda$, $\lambda = \overline{1, k}$. Пусть язык $\mathcal{L}^*$ построен естественным образом на базе σ^* , как $\mathcal{L}$ — на базе σ , с ранее указанными внесигнатурными символами, к которым добавим символы $\sqcup \bullet \sqcup$, $B(\sqcup)$, $\sqcup ||^N$ операций образования КРО, интерпретируемые как $\sqcup * \sqcup$, $\hat{\sqcup}$, $\sqcup ||^N$, соответственно. Естественным образом определяется терм $f^{S[\sigma_a]}$, образованный из символов f_λ с помощью символов этих трех операций по схеме $S[\sigma_a]$ построения КРО.

Развивается метод формирования нетривиальных решений логико-алгебраического уравнения

$$\mathfrak{X} \& \mathcal{F}(x_1, \dots, x_p) \rightarrow \mathcal{F}'(f^{|x_1|}(x_1), \dots, f^{|x_p|}(x_p)). \quad (1)$$

Условия $\mathfrak{X}$ будут иметь вид $\mathfrak{C} \& \mathfrak{C}' \& \mathfrak{R}_1$ и формируются по следующим алгоритмам.

Если $\sigma_F \cup \sigma_E \neq \emptyset$, то формула $\mathcal{F}$ преобразуется в формулу Ψ так, чтобы ее заключительные формулы Ψ^ν не содержали вхождений символов из $\sigma_F \cup \sigma_E$ (если все $\mathcal{F}^\nu$ не содержат элементов из $\sigma_F \cup \sigma_E$, то $\mathcal{F} = \Psi$). Это требуется для построения в дальнейшем на базе $\mathfrak{R}_1$ более просто проверяемых условий, т.к. функциональные и предикатные символы не будут одновременно фигурировать ни в одной ее заключительной (атомарной) формуле. Описываемая ниже процедура и позволяет в дальнейшем от $\mathfrak{R}_1$ переходить к конъюнкции условий, в совокупности достаточных для $\mathfrak{R}_1$, каждое из которых выражает условие сохранения единственного сигнатурного символа — функционального или предикатного, в полном соответствии с традиционными определениями морфизмов алгебраических систем.

Преобразование определяется следующим образом: сначала в $\mathcal{F}^\nu$, $\nu = \overline{1, M}$, отыскивается терм t_1 либо а°) вида E_1 , либо вида б°) с одним сигнатурным, а именно, функциональным символом F_1 , т.е. терм вида $F_1(s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n_1})$, где $F_1 \in \sigma_F$, s_{1i} — переменные x_μ или z_α , $i = \overline{1, n_1}$, $n_1 > 0$ (переменные s_{1i} могут быть разного сорта, поэтому, хотя они являются индивидуальными переменными, ранее обозначавшимися u_{ij} , осуществлено переименование). Из числа переменных z_α , входящих в t_1 , если таковые найдутся, выделяется переменная $s_{\alpha 1}$, квантор по которой $\tilde{\omega}_{\alpha 1}$ имеет наименьшую область действия $\mathcal{D}_1$, и по определению

$$\Phi_1 \stackrel{df}{=} \begin{cases} \mathcal{F}(\hat{\omega}_{\alpha 1} \forall y_1 (y_1 = t_1 \rightarrow \mathcal{D}_1(y_1/t_1)) / \hat{\omega}_{\alpha 1} \mathcal{D}_1), & \text{если } \tilde{\omega}_{\alpha 1} = \hat{\omega}_{\alpha 1}; \\ \mathcal{F}(\check{\omega}_{\alpha 1} \exists y_1 (y_1 = t_1 \& \mathcal{D}_1(y_1/t_1)) / \check{\omega}_{\alpha 1} \mathcal{D}_1), & \text{если } \tilde{\omega}_{\alpha 1} = \check{\omega}_{\alpha 1}. \end{cases}$$

Здесь $\mathcal{D}_1(y_1/t_1)$ — результат одновременной замены в $\mathcal{D}_1$ всех вхождений термина t_1 на ранее нигде не встречавшуюся в $\mathcal{F}$ переменную y_1 .

Если же среди переменных s_{1i} отсутствуют переменные z_α (что заведомо имеет место в случае $t_1 = E_1$), то

$$\Phi_1 \stackrel{df}{=} \exists y_1 (y_1 = t_1 \& \mathcal{F}(y_1/t_1)).$$

Те выражения, в которые переходят литеры $\mathcal{F}^\nu$ в процессе последовательного преобразования формулы $\mathcal{F}$, называются *следами* этих литер (в отличие от добавляемых литер, например, $y_1 = t_1$).

Продолжая, если необходимо, этот процесс, приходим к формуле $\Psi(\bar{x}) = \Psi(x_1, \dots, x_p)$, уже не содержащей символов $E \in \sigma_E$ и $F \in \sigma_F$ в следах литер $\mathcal{F}^\nu$, $\nu = \overline{1, M}$.

Пусть y_{ε^*} — последняя из введенных переменных y_ε , т.е. $\varepsilon = \overline{1, \varepsilon^*}$. Через $\hat{y}_\varepsilon$ (соотв. $\check{y}_\varepsilon$) обозначаются кванторы $\forall y_\varepsilon (y_\varepsilon = t_\varepsilon \rightarrow \sqcup)$ (соотв. $\exists y_\varepsilon (y_\varepsilon = t_\varepsilon \& \sqcup)$). Для любой формулы Θ через $|\Theta, e|$ обозначается слово, составленное из всех кванторов, управляющих в формуле Θ элементом e , а через $||\Theta, e||$ — это же слово, в котором все кванторы существования заменены на соответствующие кванторы всеобщности. Через $H\Theta$ обозначается результат вычеркивания из Θ всех несущественных кванторов (т.е. таких, кванторные переменные которых не входят в область действия квантора). Вводятся также следующие обозначения:

$$\mathfrak{C} = \&\{H||\Psi, \check{y}_\varepsilon||\exists y_\varepsilon (y_\varepsilon = t_\varepsilon) : \varepsilon = \overline{1, \varepsilon^*} \& \check{y}_\varepsilon \in \Psi\},$$

$$\mathfrak{C}' = \&\{H||\Psi', \hat{y}'_\varepsilon||\exists y'_\varepsilon (y'_\varepsilon = t'_\varepsilon) : \varepsilon = \overline{1, \varepsilon^*} \& \hat{y}'_\varepsilon \in \Psi'\},$$

где

$$\Psi'(\bar{x}') = \Psi'(x'_1, \dots, x'_p) = \Psi(P'/P, F'/F, E'/E, z'_\alpha/z_\alpha, x'_\mu/x_\mu, y'_\varepsilon/y_\varepsilon),$$

$t'_\varepsilon = t_\varepsilon(U'_\varepsilon/U_\varepsilon, z'_\alpha/z_\alpha, y'_\tau/y_\tau, f^{|x_\mu|}(x_\mu)/x_\mu)$ (подстановки по всем $P \in \sigma_P$, $F \in \sigma_F$, $E \in \sigma_E$, $\alpha = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{1, p}$, $\tau = \overline{1, \varepsilon^*}$, $\tau \neq \varepsilon$), $U_\varepsilon = E_\varepsilon$ или $U_\varepsilon = F_\varepsilon$ соответственно случаям а° и б°, $\varepsilon = \overline{1, \varepsilon^*}$. Пусть также

$$\Psi'(\overline{f(x)}) = \Psi'(f^{|x_1|}(x_1)/x'_1, \dots, f^{|x_p|}(x_p)/x'_p),$$

$$\mathcal{F}'(\overline{f(x)}) = \mathcal{F}'(f^{|x_1|}(x_1)/x'_1, \dots, f^{|x_p|}(x_p)/x'_p).$$

Лемма 1. $\mathfrak{C} \& \mathfrak{C}' \rightarrow ((\Psi(\bar{x}) \rightarrow \Psi'(\overline{f(x)})) \rightarrow (\mathcal{F}(\bar{x}) \rightarrow \mathcal{F}'(\overline{f(x)})))$.

Далее через Ψ^ν обозначается след литеры $\mathcal{F}^\nu$ в Ψ , $\nu = \overline{1, M}$, а через $\check{v}$ (соотв. $\hat{v}$) — типовый квантор $\check{w}_\alpha$ (соотв. $\hat{w}_\alpha$), если v — переменная z_α . Если

v — переменная y_ε , то под $\check{v}$ (соотв. $\hat{v}$) понимается квантор $\check{y}_\varepsilon$ (соотв. $\hat{y}_\varepsilon$). Аналогично используются обозначения $\Psi'_+, \Psi'_-, \Psi'_{+Q}, \Psi'_{-Q}, Q \in \sigma_P \cup \{=\}$, а также $\check{v}', \hat{v}'$ для кванторов по переменным v' формулы $\Psi'(\bar{x}')$.

Пусть также $V_j \stackrel{df}{=} (f^{|v_j|}(v_j) = v'_j), j = \overline{1, n^*} (n^* = n + \varepsilon^*),$

$$(\check{v}_j : V_j) = \begin{cases} \exists v_j(Z_\alpha \& V_j \& \sqcup), & \text{если } v_j \text{ — переменная } z_\alpha; \\ \exists y_\varepsilon(y_\varepsilon = t_\varepsilon \& V_j \& \sqcup), & \text{если } v_j \text{ — переменная } y_\varepsilon. \end{cases}$$

Аналогично понимаются выражения $(\check{v}'_j : V_j)$. Через Ξ'_{+Q} (соотв. Ξ'_{-Q}) обозначается импликация $\Psi'_{+Q} \rightarrow (\Psi')'_{+Q}$ (соотв. $(\Psi')'_{+Q} \rightarrow \Psi'_{+Q}$), где $(\Psi')'_{+Q}$ — литера из Ψ' , отвечающая литере Ψ'_{+Q} из Ψ ; когда не важно, каково Q , пишем Ξ'_+ и Ξ'_- .

Вводится преобразование формулы Ψ в формулу $\mathfrak{R}_1$:

1) рассматриваются максимальные цепочки одноименных соседних кванторов, т.е. максимальные цепочки $\hat{v}_1 \dots \hat{v}_m$ или $\check{v}_1 \dots \check{v}_m$ соседних кванторов, не разделенные в структуре формулы Ψ ни кванторами $\exists$ и $\forall$, соответственно, ни логическими связками $\&, \vee$; все эти цепочки заменяются на цепочки соответственно $\hat{v}'_1 \dots \hat{v}'_m(\check{v}_1 : V_1) \dots (\check{v}_m : V_m), \hat{v}_1 \dots \hat{v}_m(\check{v}'_1 : V_1) \dots (\check{v}'_m : V_m)$;

2) все связки $\vee$ заменяются на $\&$;

3) все литеры $\Psi'_{+Q}, \nu = \overline{1, M}$, заменяются на формулы Ξ'_{+Q} , а все литеры Ψ'_{-Q} — на формулы Ξ'_{-Q} ;

4) после выполнения преобразований из п.п. 1–3 все переменные x'_μ заменяются на $f^{|x_\mu|}(x_\mu)$, и результат принимается в качестве $\mathfrak{R}_1$.

Следующая лемма обосновывает корректность решения

$$\mathfrak{X} \stackrel{df}{=} \mathfrak{C} \& \mathfrak{C}' \& \mathfrak{R}_1$$

рассматриваемого нами логико-алгебраического уравнения (1).

Лемма 2. $\mathfrak{C} \& \mathfrak{C}' \rightarrow (\mathfrak{R}_1 \rightarrow (\mathcal{F}(\bar{x}) \rightarrow \mathcal{F}'(\overline{f(x)})))$.

В п. 2.3 построена модификация описанного алгоритма для построения условий $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ и $\mathfrak{R}_1$, которые являются достаточными условиями сохранения свойств ОМАСК в направлении, обратном направлению действующих между системами отображений:

$$\mathfrak{X} \& \mathcal{F}'(f^{|x_1|}(x_1), \dots, f^{|x_p|}(x_p)) \rightarrow \mathcal{F}(x_1, \dots, x_p).$$

Получаемые с помощью представленных алгоритмов условия сохранения свойств $\mathfrak{R}_1$ пока еще отличаются от условий морфизмов, традиционно используемых в теории алгебраических систем, в том числе в теории универсальных алгебр и теории моделей. Сильная перемежаемость в условии

$\mathfrak{R}_1$ кванторов одного смысла кванторами другого смысла ухудшает его проверяемость по сравнению с условиями, накладываемыми на стандартные морфизмы, поэтому в п. 2.4 ищутся условия $\mathfrak{R}$, достаточные для выполнимости $\mathfrak{R}_1$ и представляющие собой более привычные условия — типа условий морфизмов или очевидным образом вытекающие из них. Разработаны алгоритмы, аналогичные алгоритмам получения теорем сравнения из лемм сравнения^{13,14}. При этом $\mathfrak{R}_1$ разбивается на более простые формулы, каждая из которых содержит в некотором смысле “минимальное” число кванторов существования.

Первым преобразованием является расщепление формулы $\mathfrak{R}_1$ на части относительно ее заключительных формул. Получившиеся при этом формулы в общем случае допускают расщепление на конъюнкции более простых условий с помощью выделения из них подформул, соответствующих некоторым типовым кванторам существования. Конъюнкция получившихся формул и будет искомой формулой $\mathfrak{R}$. Обосновывается корректность этих алгоритмов.

Теорема 1. $\mathfrak{C} \& \mathfrak{C}' \rightarrow (\mathfrak{R} \rightarrow (\mathcal{F}(\bar{x}) \rightarrow \mathcal{F}'(\overline{f(x)})))$.

Аналогичная теорема формулируется для случая сохранения свойств в обратном направлении (с модифицированными алгоритмами синтеза $\mathfrak{R}$).

В **третьей главе** рассматриваются примеры использования разработанных алгоритмов синтеза условий сохранения свойств ОМАСК. В п. 3.1 рассматривается свойство устойчивости движения общей динамической системы (ОДС) S в смысле В.В. Немыцкого, определяемой на топологическом пространстве X и группе T ¹⁵. ОДС S обобщенно представима в форме МАС $\langle A, \Omega_F \rangle = \langle \{X, T\}, \{F : X \times T \rightarrow X\} \rangle$.

Вектор-функция $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, $\varphi_1 : X \rightarrow X'$, $\varphi_2 : T \rightarrow T'$, называется *гомоморфизмом* ОДС S и S' , если для любых $p \in X$, $t \in T$

$$\varphi_1(F(p, t)) = F'(\varphi_1(p), \varphi_2(t)).$$

Пусть X и X' — равномерные пространства с фильтрами окружений $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, соответственно, а φ_1 и φ_2 — биекции; тогда гомоморфизм систем S и S' называется *изоморфизмом*, если $\widehat{\varphi_1 * \varphi_1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$, т.е. φ_1 — изоморфизм равномерной структуры пространства X на равномерную структуру пространства X' .

¹³Матросов В.М. Метод сравнения в динамике систем. I, II // Диф. уравнения. — 1974. — Т. 10, N 9; 1975. — Т. 11, N 3.

¹⁴Vassilyev S.N. Machine Synthesis of Mathematical Theorems // J. of Logic Programming. — 1990. — Vol. 9, N 2, 3. — P. 235–266.

¹⁵Сибирский К.С. Введение в топологическую динамику. — Кишинев: РИО АН МССР, 1970. — 221 с.

Теорема 2. Если X, X' — равномерные пространства с фильтрами окружений $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, соответственно, $p'_0 = \varphi_1(p_0)$, а $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ — изоморфизм ОДС систем S и S' , то из устойчивости движения $F(p_0, t)$ системы S следует устойчивость движения $F'(p'_0, t')$ системы S' .

С помощью модифицированных алгоритмов (п.п. 2.3 и 2.4) получено, что при изоморфизме ОДС S и S' из устойчивости движения $F'(p'_0, t')$ также следует устойчивость движения $F(p_0, t)$. Объединение этих результатов дает аналог теоремы об устойчивости ОДС, полученной с помощью метода представимости¹⁶.

В п. 3.2 рассматривается модель динамической системы с управлением в автоматной форме

$$x(t+1) = F(x(t-m+1), x(t-m+2), \dots, x(t-1), x(t), u(t)), \quad (2)$$

где: $t \in T^\tau = \{0, 1, 2, \dots, \tau\}$, $\tau \in N = \{1, 2, \dots\}$; m фиксировано, $m \in N$; $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = x(t) \in W^n$, $n \in N$, W — абстрактное множество состояний $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$; $u(t) \in U$, U — множество допустимых значений управления u из некоторого класса допустимых управлений $\mathcal{U} \subseteq U^{T^\tau}$, $F : W^{nm} \times U \rightarrow W^n$.

Если в (2) задано начальное условие $x_0 = x(0)$, управление $u : T^\tau \rightarrow U$, а также значения $x^{-m+1} = x(-m+1) = x_0(-m+1)$, $\dots$, $x^{-1} = x(-1) = x_0(-1)$ из множества W^n , то в (2) $F = (F_1, \dots, F_n)$ единственным образом определяет процесс $x : T^\tau \rightarrow W^n$. Пусть задана “начальная” функция $x_0 : -m+1, \dots, -1 \rightarrow W^n$, расширяющая область определения x до множества $D = \{-m+1, \dots, -1\} \cup T^\tau$. Будем считать x_0 произвольной, но фиксированной, варьируя только начальное состояние x_0 и управление $u \in \mathcal{U}$.

Рассматриваются разные динамические свойства (2) и, в частности, существование управления $u \in \mathcal{U}$, обеспечивающего достижимость целевого множества $X_* \subset W^n$ из области начальных состояний $X_0 \subset W^n$ при фазовых ограничениях $X_1 \subset W^n$, а также пребывание в X_* в течение Δ тактов после первого момента t_1 попадания в X_* :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \exists u : \mathcal{U}(u) \quad & \forall x_0 : X_0(x_0) \quad ((\forall t > 0 \quad X_1(x(t, x_0, u))) \ \& \ \exists t_1 > 0 \\ & ((\forall t_2 < t_1 \quad \neg X_*(x(t_2, x_0, u))) \ \& \ X_*(x(t_1, x_0, u)) \ \& \\ & \ \& \ \forall t_3 > t_1 : t_3 \leq t_1 + \Delta \quad X_*(x(t_3, x_0, u))))). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь снова используется представление (2) в форме МАС. Изучается ана-

¹⁶Васильев С.Н. Метод представимости в логико-алгебраическом подходе к качественному анализу динамических систем // Оптимизация, управление, интеллект. — 2005. — N 3 (11). — С. 248–254.

логичная модель размерности k

$$x'(t+1) = F'(x'(t-m+1), x'(t-m+2), \dots, x'(t-1), x'(t), u'(t)), \quad (4)$$

где $t \in T^\tau$, $x'(t) \in W^k$, $u'(t) \in U'$, $u' \in \mathcal{U}'$, $F' : W^{km} \times U' \rightarrow W^k$. Вектор-функция (v, s) , где $v : W^n \rightarrow W^k$, $s : U \rightarrow U'$, называется *гомоморфизмом* для пары F, F' при управлении $u^* \in \mathcal{U}$, если для всех $x^l \in W^n$, $l = \overline{1, m}$, $t \in T^\tau$

$$v(F(x^1, \dots, x^m, u^*(t))) = F'(v(x^1), \dots, v(x^m), s(u^*(t))).$$

При этом заведомо выполняется условие *траекторного гомоморфизма* для (v, s) при $u^* \in \mathcal{U}$

$$v(x(t, x_0, u^*)) = x'(t, v(x_0), s \circ u^*)(t \in T^\tau, x_0 \in W).$$

Теорема 3. Пусть (v, s) — траекторный гомоморфизм систем (2) и (4) при фиксированном управлении $u^* \in \mathcal{U}$ и выполнены условия

- 1) $\forall j \in \{-m+1, \dots, -1\} \ v(x^j) = (x^j)'$,
- 2) $X'_0 \subseteq v(X_0)$, $v(X_1) \subseteq X'_1$, $v(X_*) \subseteq X'_*$,
- 3) $v(W^n \setminus X_*) \subseteq (W^k \setminus X'_*)$.

Тогда из наличия в системе (2) свойства (3) с управлением $u = u^*$ следует, что система (4) обладает тем же свойством с управлением $u'(t) = s(u^*(t))$.

В п. 3.3 исследуется вопрос о сохранении некоторых динамических свойств ДСС. Получены условия сохранения свойств:

- 1) оптимальной достижимости по быстродействию;
- 2) достижимости за ограниченное число шагов с пребыванием в целевом множестве не менее чем заданное число шагов;
- 3) оптимальной достижимости целевого множества при фазовых ограничениях и инвариантности целевого множества (ОДФИ).

Отметим, что в зависимости от свойства, ДСС G может иметь разное представление в виде ОМАСК. В частности, для свойства ОДФИ G рассматривается как общая трехосновная алгебраическая система конечного типа $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, где $A = \{\mathcal{X}, \mathcal{E}, N\}$, $\Omega_F = \{h\}$, $\Omega_P = \{\mathcal{X}, \mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1, N, \check{E}_v, \leq\}$, $\Omega_E = \emptyset$. Здесь $\mathcal{X}$ — унарный предикат, тождественно совпадающий со множеством состояний $\mathcal{X}$. Он необходим, чтобы “вложить” формулу, описывающую свойство ОДФИ, в построенный язык $\mathcal{L}$. Предикат $\mathcal{X}(x)$ истинен для любого $x \in \mathcal{X}$. Аналогично для предиката N , совпадающего с множеством N моментов “времени” (счетчиком состояний).

Предикат $\mathcal{X}_* \subset \mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_*(x)$ истинен тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{X}_*$. Подобным же образом определяется предикат $\mathcal{X}_1$. Для бинарного предиката $\check{E}_v$ пара $(x_0, \mathbf{e})$ принадлежит $\check{E}_v$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{e} \in E_v(x_0)$ ($\check{E}_v \in 2^{\mathcal{X} \times \mathcal{E}^N}$). Здесь $E_v(x_0) \subset E_v$ обозначает множество всех действительных событийных траекторий $\mathbf{e} \in E_v$, начинающихся из состояния $x_0 \in \mathcal{X}$. Функция $h : \mathcal{X} \times \mathcal{E}^N \times N \rightarrow \mathcal{X}$ определяет состояние $h(x_0, \mathbf{e}, k)$, в которое система перешла из начального состояния x_0 после того, как произошло k событий, принадлежащих действительной событийной траектории $\mathbf{e} \in E_v(x_0)$.

Семейство отображений $\varphi = \{\varphi_\lambda \mid \varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda, \lambda = \overline{1, k}\}$ называется *гомоморфизмом* ОМАСК $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, если

- 1) $\langle \varphi \rangle^{S_{n_\beta+1, \beta}[A]}(\mathbf{F}_\beta^{n_\beta}(z_1, \dots, z_{n_\beta})) = (\mathbf{F}_\beta^{n_\beta})'(\langle \varphi \rangle^{S_{1\beta}[A]}(z_1), \dots, \dots, \langle \varphi \rangle^{S_{n_\beta \beta}[A]}(z_{n_\beta}))$ ($\beta = \overline{1, k_F}, z_1 \in S_{1\beta}[A], \dots, z_{n_\beta} \in S_{n_\beta \beta}[A]$);
- 2) $\langle \varphi \rangle^{T_{1\gamma}[A] \times \dots \times T_{n_\gamma \gamma}[A]}(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma}) \subseteq (\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma})'$ ($\gamma = \overline{1, k_P}$);
- 3) $\langle \varphi \rangle^{U_\delta[A]}(\mathbf{E}_\delta) = \mathbf{E}'_\delta$ ($\delta = \overline{1, k_E}$).

Говорят, что φ — *мощный гомоморфизм* ОМАСК $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, если для всех $\lambda = \overline{1, k}$ φ_λ — сюръекции, выполняются условия 1), 3) определения гомоморфизма ОМАСК и для любых $z_{\alpha_1} \in T_{1\gamma}[A], \dots, z_{\alpha_{n_\gamma}} \in T_{n_\gamma \gamma}[A], \gamma = \overline{1, k_P}$,

$$(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma})'(\langle \varphi \rangle^{T_{1\gamma}[A]}(z_{\alpha_1}), \dots, \langle \varphi \rangle^{T_{n_\gamma \gamma}[A]}(z_{\alpha_{n_\gamma}})) = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma}(z_{\alpha_1}, \dots, z_{\alpha_{n_\gamma}}) = \mathbf{I}.$$

Теорема 4. Пусть для ДСС $G = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, \{f_e\}_{e \in \mathcal{E}}, g, E_v)$ существуют ДСС $G' = (\mathcal{X}', \mathcal{E}', \{f'_{e'}\}_{e' \in \mathcal{E}'}, g', E'_v)$ и вектор-функция $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$, где $\varphi_1 : X \rightarrow X', \varphi_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}', \varphi_3 : N \rightarrow N$, такие, что φ — гомоморфизм и мощный гомоморфизм ОМАСК, отвечающих системам G и G' . Тогда, если событийная траектория $\varphi_2|_N(\mathbf{e}^*)$ обеспечивает в системе G' свойство ОДФИ, то $\mathbf{e}^*$ обеспечивает его в системе G .

В п. 3.4 рассматривается особый подкласс ДСС, функционирование которых требует некоторую синхронизованность. Характерные примеры ДСС такого типа возникают при моделировании сетей общественного транспорта, например, железных дорог или метро. Событиями здесь являются отправления или прибытия поездов на станции, причем синхронизация вытекает из требования обеспечения для пассажиров возможности пересаживаться с поезда на поезд. Для решения этой задачи традиционно применяется так называемая $(\max, +)$ -алгебра $\langle A, \Omega_F \rangle = \langle \{R_\epsilon\}, \{\oplus, \otimes\} \rangle$, где $\epsilon = -\infty, R_\epsilon = R \cup \{\epsilon\}, R$ — множество действительных чисел, $a \oplus b = \max(a, b)$, $a \otimes b = a + b$. Распространение этих операций на матрицы определяются

следующим образом¹⁷:

1) если $A, B \in R_\epsilon^{m \times n}$, то

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n};$$

2) если $A \in R_\epsilon^{m \times p}$, $B \in R_\epsilon^{p \times n}$, то

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes b_{kj} = \max_{k=\overline{1, p}} \{a_{ik} + b_{kj}\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Рассматривается модель сети общественного транспорта¹⁸:

$$x(k+1) = A(k) \otimes x(k) \oplus d(k+1), \quad (5)$$

где

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T,$$

$$d(k) = (d_1(k), d_2(k), \dots, d_n(k))^T,$$

$A(k)$ — $(n \times n)$ -матрица (n — количество путей). Здесь $x_i(k)$ означает (астрономическое) время отправления k -го поезда по пути τ_i , $d_i(k)$ — время отправления k -го поезда по пути τ_i согласно расписанию, $a_{ij}(k)$ — время движения по пути τ_j k -го поезда, который продолжит затем движение по пути τ_i , причем в это время входит время, необходимое пассажирам для пересадки. При этом $a_{ij}(k) > 0$, если k -ый поезд по пути τ_j продолжает при $k+1$ движение по пути τ_i , и $a_{ij}(k) = \epsilon$ в противном случае, $i, j = \overline{1, n}$.

Если расписание регулярно, то

$$d(k+1) = \pi \otimes d(k), k = 1, 2, 3, \dots,$$

где π — *период* расписания, который в диссертации выбран единым для всех поездов. Расписание называется *выполнимым*, если справедливо неравенство

$$A(k) \otimes d(k) \leq d(k+1). \quad (6)$$

В п. 3.4 эта модель сети общественного транспорта представлена в форме ДСС со шкалой значений счетчика событий $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Пусть $X = R_0^n$ (векторы $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ с неотрицательными компонентами). При этом состояние системы x определено парой $(k, x) \in N \times X$, т.е. $\mathcal{X} = N \times X$.

¹⁷Cunningham-Green R. A. Minimax algebra // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. — Vol. 166. — Berlin: Springer-Verlag, 1979.

¹⁸Heidergott B., de Vries R. Towards a (Max, +) control theory for public transportation networks // Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications. — 2001. — N 11. — P. 371–398.

События в ДСС-модели G транспортной сети связываются с продолжительностями движения поездов по всем путям. С каждым событием ассоциируется множество соответствующих величин $a_{ij}(k)$. Таким образом, множество событий $\mathcal{E} \subset R_{\epsilon}^{n \times n}$, т.е. каждое событие $e \in \mathcal{E}$ является некоторой $(n \times n)$ -матрицей A , и в дальнейшем вместо e будем писать A .

Функция возможностей g вводится как отображение, которое для каждой пары $(k, x) \in \mathcal{X}$ определяет множество допустимых матриц, состоящих из значений величин $a_{ij}(k)$, которые, в частности, зависят от скорости движения поезда по пути τ_j , имеющей физические ограничения. Тогда g , например, может задаваться следующим образом: $g(k, x) = \{A \in \mathcal{E} : a_j(k, x) \leq a_{ij} \leq b_j(k, x) \text{ или } a_{ij} = \epsilon\}$ для $(k, x) \in \mathcal{X}$. Здесь $a_j(k, x)$ и $b_j(k, x)$ — время движения по пути τ_j с минимально и максимально возможной скоростью соответственно.

Операторы событий f_A для $A \in g(k, x)$ определяются уравнениями движения транспортной сети (5), т.е. $f_A(k, x) = (k + 1, A \otimes x \oplus d(k + 1))$.

В качестве множества E_v действительных событийных траекторий выбирается множество последовательностей $\{A(1), A(2), \dots\}$ таких, что для всех $A(k)$ выполняется неравенство (6), $k = 1, 2, 3, \dots$

Вводится множество

$$\mathcal{X}_m = \{(k, x^k) \in N \times \mathcal{X} : x_i^k = d_i(k), i = \overline{1, n}\},$$

содержащее фазовые состояния, которые отвечают отправлению k -ых поездов для каждого k в соответствии с расписанием (т.е. без опозданий). Множество $\mathcal{X}_m$ инвариантно относительно E_v (т.е. для любой событийной траектории $e \in E_v$ и соответствующей ей траектории состояний $x = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$, если $x_i \in \mathcal{X}_m$, то $x_j \in \mathcal{X}_m$, $j > i$).

Предложение 1. Для модели сети общественного транспорта (5) замкнутое инвариантное множество $\mathcal{X}_m$ устойчиво по Ляпунову относительно E_v .

Предложение 2. Для модели сети общественного транспорта (5) замкнутое инвариантное множество $\mathcal{X}_m$ может не быть асимптотически устойчивым в целом относительно E_v .

Обозначим $s_{ij}(k + 1) = d_i(k + 1) - a_{ij}(k) - d_j(k)$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = 2, 3, \dots$

Предложение 3. Если множество E_a состоит из последовательностей матриц $\{A(1), A(2), \dots\} \in E_v$, таких, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \min_{i, j = \overline{1, n}} \{s_{ij}(k)\}$$

расходится, то для модели сети общественного транспорта (5) замкнутое инвариантное множество $\mathcal{X}_m$ асимптотически устойчиво в целом относительно E_a .

Для анализа свойств рассматриваемой модели транспортной сети использованы предложенные алгоритмы. Рассматривается свойство достижимости множества $\mathcal{X}_m$ из некоторого множества начальных позиций $\mathcal{X}_0$ при фазовых ограничениях $\mathcal{X}_1$. При этом ДСС G рассматривается как общая трехосновная алгебраическая система конечного типа $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, где $A = \{X, \mathcal{E}, N\}$, $\Omega_F = \{h\}$, $\Omega_P = \{\mathcal{X}_0, \bar{\mathcal{X}}_m, \bar{\mathcal{X}}_1, \check{E}_v, N, <\}$, $\Omega_E = \emptyset$, причем $\bar{\mathcal{X}}_m = \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_m$, $\bar{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_1$. Считается, что $\mathcal{X}_0 = \{1\} \times X_0$, $X_0 \subseteq X$. Заметим, что $\mathcal{X}_0 \subset N \times X$, $\mathcal{X}_m \subset N \times X$, $\mathcal{X}_1 \subset N \times X$. Здесь N — унарный предикат, тождественно совпадающий с множеством N моментов “времени” (счетчиком состояний), $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Функция $h : \mathcal{X}_0 \times \mathcal{E}^N \times N \rightarrow \mathcal{X}$ определяет состояние $h(x_0, \mathbf{e}, k)$, в которое система перешла из начальной позиции $x_0 = (1, x_0)$ после того, как произошло k событий, принадлежащих действительной событийной траектории $\mathbf{e} \in E_v(x_0)$. Для бинарного предиката $\check{E}_v$ пара $(x_0, \mathbf{e})$ принадлежит $\check{E}_v$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{e} \in E_v(x_0)$, т.е. $\mathbf{e}$ является действительной траекторией, начинающейся из состояния x_0 (в интерпретации $\check{E}_v \in 2^{\mathcal{X}_0 \times \mathcal{E}^N}$).

Изучаемое свойство достижимости при фазовых ограничениях примет вид

$$\mathcal{F} = \forall x_0 : \mathcal{X}_0(x_0) \quad \forall \mathbf{e} : \check{E}_v(x_0, \mathbf{e}) \quad \exists k^* : N(k^*) \quad (\mathcal{X}_m(k^*, h(x_0, \mathbf{e}, k^*)) \ \& \ \forall k_1 : k_1 < k^* \quad \mathcal{X}_1(k_1, h(x_0, \mathbf{e}, k_1))). \quad (7)$$

Теорема 5. Если ДСС G' обладает свойством (7) и $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$, где $\varphi_1 : X \rightarrow X'$, $\varphi_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, $\varphi_3 : N \rightarrow N$, есть гомоморфизм соответствующих системам G и G' ОМАСК $\mathfrak{A}$ и однотипной ей ОМАСК $\mathfrak{A}'$, то ДСС G также обладает свойством (7).

Полученная теорема имеет, например, следующее приложение. Свойство (7) интерпретируется как способность системы (5) прийти к движению по расписанию при любых начальных опозданиях поездов по p путям τ_{v_i} (равным $z_{v_i}(1)$), $i = \overline{1, p}$, причем для любого k все поезда в сети опаздывают не более, чем на время, равное $\max_{i=\overline{1, p}} \{z_{v_i}(1)\}$. Ставится задача: найти условия, при которых в транспортную сеть (5) можно включить новый путь τ_{n+1} так, чтобы это не помешало расширенной транспортной сети придти к движению по расписанию. Для расширенной системы снова рассматривается свойство (7) в указанной интерпретации.

Пусть $I_i = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, $p \geq 1$, обозначает множество номеров путей, поезда по которым должны ждать прибытия поезда по пути τ_i , а $J_i =$

$\{j_1, j_2, \dots, j_q\}$, $q \geq 1$, — множество номеров путей, прибытия поездов по которым ждут, чтобы отправиться, поезда, следующие по пути τ_i .

Рассмотрим условие

$$d_{n+1}(k) \geq d_{i_m}(k), i_m \in I_{j_l}, j_l \in J_{n+1}. \quad (8)$$

Если период расписания π постоянен, оно эквивалентно условию

$$d_{n+1}(1) \geq d_{i_m}(1), i_m \in I_{j_l}, j_l \in J_{n+1}.$$

При выполнении условия (8) существует гомоморфизм из ОМАСК, описывающей транспортную сеть с новым путем, в ОМАСК, описывающую транспортную сеть (5). Поэтому из теоремы 5 следует

Теорема 6. *При выполнении условия (8) включение в модель транспортной сети (5) нового пути τ_{n+1} не меняет момент k выхода системы на режим движения по расписанию (без опозданий поездов).*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Выполнена алгоритмизация синтеза критериев сохранения свойств общих многоосновных алгебраических систем конечного типа относительно семейства отображений основных множеств в однотипные ОМАСК. Предложенный метод решения логико-алгебраических уравнений открывает новые возможности гибкого формирования условий сохранения свойств алгебраических систем при морфизмах с учетом специфики конкретного изучаемого свойства.
2. Построен модифицированный алгоритм, обеспечивающий синтез критериев сохранения свойств ОМАСК в направлении, противоположном направлению отображений.
3. С помощью указанных алгоритмов впервые получены критерии сохранения динамических свойств дискретно-событийных систем, представленных в виде ОМАСК, и на этой основе исследована модель сети общественного транспорта: сформулированы утверждения об устойчивости и некоторых других свойствах. Исследована динамика автоматных моделей некоторого класса. Продемонстрирована применимость предложенного аппарата к исследованию общих динамических систем (в смысле В.В. Немыцкого).

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Нагул Н.В. К вопросу сохранения свойств многоосновных алгебраических систем / Нагул Н.В. // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2007. — N 6 (56). — С. 223–241.
2. Нагул Н.В. Модель сети общественного транспорта как дискретно-событийная система / Нагул Н.В. // Материалы Всероссийской конференции с международным участием “Знания — Онтологии — Теории” (ЗОНТ-07). Новосибирск, 14–16 сентября 2007 г. — Новосибирск, 2007. — Т. 2. — С. 155–159.
3. Нагул Н.В. Новый подход к исследованию дискретно-событийных систем / Нагул Н.В. // Труды СВМО. — 2007. — Т. 9. — N 1. — С. 221–225.
4. Нагул Н.В. Дискретно-событийные системы в исследовании сложных искусственных систем / Нагул Н.В. // Труды XII Байкальской Всероссийской конференции “Информационные и математические технологии в науке и управлении”. Ч. I. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2007. — С. 91–96.
5. Нагул Н.В. О сохранении свойств многоосновных алгебраических систем / Нагул Н.В. // Вестник ТГУ. — 2006. — N 293. — С. 158–164.
6. Нагул Н.В. Устойчивость свойств многоосновных алгебраических систем / Нагул Н.В. // Материалы VIII Школы-семинара молодых ученых “Математическое моделирование и информационные технологии” (ММИТ’06). 8–12 июля 2006 г., пос. Энхалук — Иркутск: РИО ИГУ, 2006. — С. 122–126.
7. Нагул Н.В. Алгоритмизация получения критериев устойчивости свойств многоосновных алгебраических систем при отображениях типа морфизмов, I / Нагул Н.В. // Оптимизация, управление, интеллект. — 2005. — N 3 (11). — С. 268–281.

Редакционно-издательский отдел
Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
Подписано к печати 12.03.08
Формат бумаги 60 х 84 1/16, объем 0,8 п.л.
Заказ 3. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН