

На правах рукописи

СУРКОВ АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ

**СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2008

Работа выполнена в Институте динамики систем и теории управления
Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Финогенко Иван Анатольевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Тонков Евгений Леонидович
кандидат физико-математических наук,
доцент
Козлов Равиль Измайлович

Ведущая организация: **Институт математики и механики
УрО РАН** (г. Екатеринбург)

Защита состоится 25 декабря 2008 г. в 14.00 ч. на заседании диссертационного совета 003.021.01 при Институте динамики систем и теории управления СО РАН по адресу: 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 24 ноября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н.

А.А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Отдельные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом изучались более 200 лет назад (Кондорсе, 1771), но систематическое развитие теории таких систем началось значительно позднее. В период с 20-х до начала 40-х годов прошлого столетия Н. Минорский в своих работах, посвященных стабилизации курса корабля и автоматическому управлению его движением, ясно указал на важность рассмотрения запаздывания в механизме обратной связи. Большой интерес к теории автоматического регулирования в течение этих и последующих лет существенно способствовал быстрому развитию теории дифференциальных уравнений с запаздыванием. К результатам, которые также в значительной степени стимулировали теорию, можно отнести работы В. Вольтерра по исследованию модели “хищник-жертва”. В 50–60-х годах прошлого столетия А.Д. Мышкис ввел общий класс уравнений с запаздывающими аргументами и впоследствии заложил основы теории линейных систем¹. Развитие общей теории и многочисленные прикладные задачи инициировали интерес к качественной теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и особенно к проблемам устойчивости движений в системах, описываемых такими уравнениями (работы С.Н. Шиманова, Л.Э. Эсгольца, R.D. Driver² и многих других авторов).

Для обыкновенных дифференциальных уравнений основным подходом к исследованию вопросов устойчивости является метод функций Ляпунова. Применительно к дифференциальным уравнениям с последействием использование метода функций Ляпунова нашло свое выражение в теоремах Б.С. Разумихина. Однако в целом метод функций Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом не обладает такой же полнотой, как для дифференциальных уравнений без запаздывания. Более плодотворной оказалась концепция Н.Н. Красовского³, который предложил рассматривать в качестве области определения правой части дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом пространство непрерывных функций даже тогда, когда переменная

¹Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. — М.: Наука, 1972.

²Driver R.D. Ordinary and Delay Differential Equation / R.D. Driver. — N.Y.: Springer-Verlag, 1977.

³Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени / Н.Н. Красовский // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, вып. 3. — С. 315–327.

состояния представляет собой конечномерный вектор. Работы Н.Н. Красовского, а в последующем и других авторов прояснили функциональную природу дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, и в настоящее время этот подход является общепризнанным. С этой точки зрения дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом обычно называются функционально-дифференциальными уравнениями.

Однако, следует отметить, что при исследовании вопросов устойчивости для функционально-дифференциальных уравнений методом функционалов Ляпунова возникают проблемы, связанные с вычислением производных функционалов вдоль решений. Это лишает теорию конструктивности, так как требует знание самого решения. В приложениях и при исследовании конкретных систем эта трудность так или иначе разрешается. Многочисленные примеры показывают, что часто производная функционала вдоль решения разделяется на две части, одна из которых инвариантна относительно продолжения решения в последующие моменты времени, а другая может быть выражена через правую часть уравнения. Это свойство функционалов было формализовано в работах А.В. Кима⁴, где были введены понятия инвариантной производной и инвариантной дифференцируемости и разработан соответствующий аппарат для исследования функционально-дифференциальных уравнений на устойчивость.

Еще одно направление работ в данной диссертации связано с дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Общепризнанные подходы к исследованию таких уравнений основаны на теории дифференциальных включений. Существенным толчком к развитию этой теории послужила известная дискуссия на 1-ом конгрессе ИФАК по докладу А.Ф. Филиппова в 1961 г. Обзорный материал многочисленных исследований, сформировавших основные методы и направления развития теории разрывных систем в последующие годы, представлены в ряде книг и статей таких авторов, как А.Ф. Филиппов, М.А. Айзерман, Е.С. Пятницкий, В.И. Уткин. Здесь следует отметить, что многие задачи теории автоматического регулирования приводят к системам с разрывными обратными связями, и основные режимы функционирования таких систем представляют собой движения по пересечению поверхностей разрыва правых частей этих систем. Такие движения называ-

⁴Ким А.В. *i*-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения / А.В. Ким. — Екатеринбург: УрО РАН, 1996.

ются скользящими режимами. Если придерживаться функциональной концепции Н.Н. Красовского, то при описании “скользящих режимов” функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью возникают те же трудности, что и в теории устойчивости с применением функционалов Ляпунова, связанные с вычислением производных функционалов вдоль решений. Поэтому актуальной задачей является распространение результатов i -гладкого анализа, который базируется на понятии инвариантной дифференцируемости, на класс функционально-дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями. Это позволяет изучать “скользящие режимы” при соответствующем описании множеств разрывов правых частей систем в функциональном пространстве. Также эти исследования актуальны как дополнение существующей теоретической базы для решения многих прикладных задач в теории автоматического регулирования, механике, биологии, экономики и т.д., которые приводят к системам функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью при надлежащей идеализации реальных процессов. Так, например, в математических моделях стабилизации курса корабля важно учитывать запаздывание в механизме обратной связи, но эти обратные связи часто моделируются разрывными (релейного типа) функциями. Такие сочетания ранее практически не изучались.

Целью работы является распространение основных методов, подходов и результатов общей теории разрывных систем на функционально-дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями в рамках функциональной концепции, основанной на бесконечномерности области определения правых частей таких систем, а также развитие для них методов теории устойчивости с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, теории функционально-дифференциальных уравнений, теории дифференциальных включений, многозначного анализа, теории i -гладкого анализа и методов теории устойчивости.

Научная новизна. В работе разработаны более общие, чем известные ранее, подходы к доопределению правых частей функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов для описания множеств точек разрыва правых частей. Обоснованы новые теоремы

о существовании решений функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Предложены новые способы непрерывных аппроксимаций разрывных систем функционально-дифференциальных уравнений. Впервые исследована неявная форма функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Доказаны новые теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости тривиальных решений функционально-дифференциальных включений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова и обоснован принцип инвариантности Ла-Салля в автономном случае. Исследованы задачи стабилизации и быстрогодействия управляемых систем, представленных в форме функционально-дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты данной работы распространяют общую теорию систем функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью на случай бесконечномерного фазового пространства и могут быть использованы при исследовании устойчивости и стабилизации широкого класса реальных физических, биологических, экономических и др. процессов, представленных функционально-дифференциальными уравнениями.

Апробация работы. Результаты, излагаемые в диссертации, докладывались на следующих конференциях:

- III Школа-семинар молодых ученых “Математическое моделирование и информационные технологии: управление, искусственный интеллект, прикладное программное обеспечение и технологии программирования”, Иркутск–Ангасолка, 25–28 сентября 2003 г.
- Конференция ИДСТУ СО РАН “Ляпуновские чтения”, Иркутск, 1–3 декабря 2004 г.
- III Всероссийская конференция (с международным участием и молодежной секцией) “Математика, информатика, управление”, Иркутск, 29 июня – 1 июля 2004 г.
- V Школа-семинар молодых ученых “Математическое моделирование и информационные технологии: управление, искусственный интеллект, прикладное программное обеспечение и технологии программирования”, Иркутск–Ангасолка, 20–25 октября 2004 г.
- Всероссийская конференция с международным участием “Матема-

тика, ее приложения и математическое образование”, Улан-Удэ, 25–30 июня 2005 г.

- XIII Байкальская международная школа-семинар “Методы оптимизации и их приложения”, Северобайкальск, 2–8 июля 2005 г.
- Международный симпозиум “Обобщенные решения в задачах управления”, Улан-Удэ, 5–7 июля 2006 г.
- Международный конгресс “Нелинейный динамический анализ — 2007”, Санкт-Петербург, 4–10 июня 2007 г.
- IX Международная Четаевская конференция “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”, Иркутск, 12–16 июня 2007 г.
- Школа-семинар “Нелинейный анализ и экстремальные задачи”, Иркутск, 23–30 июня 2008 г.

Результаты диссертации неоднократно обсуждались на семинарах Института динамики систем и теории управления СО РАН и использовались при выполнении проектов ИНТАС-СО РАН (проект 06-1000013-9019) и РФФИ (проект 06-01-00247).

Публикации и личный вклад автора. По материалам диссертации опубликовано 8 работ, список которых приведен в конце автореферата. В число указанных работ входят статьи [7, 8] из “Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК РФ 2008 г.”. Из совместных статей [1–3] в диссертации используются только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем диссертации. Данная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, включающего 71 наименование. Общий объем диссертации составляет 93 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обозначен объект исследования, представлен обзор литературы по теме диссертации, обоснована актуальность темы диссертационной работы и сформулирована цель научного исследования.

Первая глава посвящена вопросам общей теории функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и состоит из

шести разделов.

В первом разделе вводятся общие способы доопределения разрывной правой части систем функционально-дифференциальных уравнений и дается определение решения для таких систем в смысле А.Ф. Филиппова⁵, М.А. Айзермана и Е.С. Пятницкого⁶.

Простейшее выпуклое доопределение в смысле Филиппова применяется к системам вида

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)), \quad (1)$$

где $x_t(\cdot) \in C_\tau$ — непрерывная функция, для каждого t определяемая равенством $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$, функция f определена, ограничена и непрерывна на множестве $\Omega \setminus M$, где $\Omega \subset R^1 \times C_\tau$ — некоторое открытое связное множество (область), $M \subset \bar{\Omega}$ — граничное множество. Пространство C_τ непрерывных на отрезке $[-\tau, 0]$ функций наделено обычной суп-нормой, пространство R^n наделено евклидовой нормой.

Пусть для любой точки $(t, \psi(\cdot)) \in \Omega$ множество $F(t, \psi(\cdot))$ — выпуклая оболочка всех предельных значений функции $f(t', \psi'(\cdot))$ при условии $(t', \psi'(\cdot)) \rightarrow (t, \psi(\cdot))$ и $(t', \psi'(\cdot)) \in \Omega \setminus M$.

Под решением системы (1), определенном на некотором отрезке $[t_0 - \tau, t_1]$, $t_1 > t_0$, понимается непрерывная функция $x(t)$, абсолютно непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$, удовлетворяющая начальному условию $x_{t_0}(\cdot) = \varphi_0(\cdot)$ с некоторой функцией $\varphi_0(\cdot) \in C_\tau$ и для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ удовлетворяющая дифференциальному включению

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t(\cdot)). \quad (2)$$

Доопределение в смысле Айзермана–Пятницкого применяется к управляемой системе

$$\dot{x} = f(t, x_t, u(t, x_t)), \quad (3)$$

где функция $f(t, \psi(\cdot), u)$ непрерывна по совокупности аргументов,

$$u(t, \psi(\cdot)) = (u_1(t, \psi(\cdot)), \dots, u_r(t, \psi(\cdot))),$$

а функции $u_i(t, \psi(\cdot))$ разрывны, каждая на своем множестве M_i , $0 \leq i \leq m \leq r$. Остальные функции $u_j(t, \psi(\cdot))$, $m + 1 \leq j \leq r$, предполагаются непрерывными. Обозначим через $F_1(t, \psi(\cdot))$ выпуклую оболочку

⁵Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985.

⁶Айзерман М.А. Основы теории разрывных систем / М.А. Айзерман, Е.С. Пятницкий // Избранные труды теории управления. — М.: Физматлит, 2004. — Т. 1.

множества

$$f(t, \psi(\cdot), U_1(t, \psi(\cdot)), \dots, U_m(t, \psi(\cdot)), u_{m+1}(t, \psi(\cdot)), \dots, u_r(t, \psi(\cdot))).$$

Под решением уравнения (3) понимается решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_1(t, x_t(\cdot)). \quad (4)$$

Во втором разделе приводится понятие инвариантно дифференцируемых функционалов (см. сноску 4) и определяется структура множеств точек разрыва кусочно-непрерывных функций, стоящих в правых частях функционально-дифференциальных уравнений. Записываются уравнения “скользящих режимов” в простейшем случае, а в общем случае рассматривается метод эквивалентного управления.

Пусть функция f является кусочно-непрерывной с множествами разрывов

$$D_i = \{(t, \psi(\cdot)) : W_i(t, \psi(0), \psi(\cdot)) = 0\},$$

где W_i — непрерывные и инвариантно дифференцируемые функционалы и $\nabla_x W_i \neq 0$ для всех i в точках $(t, \psi(\cdot)) \in D = \cup D_i$. Тогда D_i граничны, и для функционально-дифференциального уравнения (1) может быть применено доопределение в смысле Филиппова.

Движение по пересечению $\cap_i D_i$ будем называть “скользящим режимом”. Метод эквивалентного управления для разрывных систем без запаздывания развит в работах В.И. Уткина⁷. Он предназначен для исследования скользящих режимов в системах управления, которые при наличии последствий можно записать в виде

$$\dot{x} = f(t, x_t, u_1, \dots, u_r), \quad (5)$$

где $u_i(t, \psi(\cdot))$ — кусочно-непрерывные функции, каждая со своим множеством разрывов D_i . Суть метода состоит в том, что на пересечении множеств D_i разрывов управлений $u_i(t, \psi(\cdot))$, $1 \leq i \leq m \leq r$, вектор производной $\dot{x}$ выбирается так, чтобы он лежал на пересечении гиперплоскостей

$$Z_i = \{z \in R^n : \langle \nabla_x W_i(t, \psi(0), \psi(\cdot)), z \rangle + \sigma_i(t, \psi(\cdot)) = 0\}, \quad (6)$$

где $\sigma_i = \partial W_i / \partial t + \partial_\psi W_i$, $\partial_\psi W_i$ — инвариантная производная функционала W_i по переменной $\psi(\cdot)$. В точках, лежащих на пересечении множеств D_i ,

⁷ Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления / В.И. Уткин. — М.: Наука, 1981.

это достигается выбором эквивалентных управлений $u_i^{eq} = u_i^{eq}(t, \psi(\cdot))$ из системы уравнений

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x W_i, f(t, \psi(\cdot), u_1^{eq}, \dots, u_m^{eq}, u_{m+1}, \dots, u_r) \rangle + \\ + \sigma_i(t, \psi(\cdot)) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

В третьем разделе приводятся теоремы существования для функционально-дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, основанные на теории функционально-дифференциальных включений.

В четвертом разделе для функционально-дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями исследуется неявная форма записи и доказывается теорема о правосторонней единственности решений.

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение (1) с кусочно-непрерывной правой частью, терпящей разрыв на множествах

$$S_i = \{(t, \psi(\cdot)) : W_i(\psi(0), \psi(\cdot)) = 0\},$$

где W_i — инвариантно дифференцируемые функционалы. Обозначим через S объединение всех множеств S_i и через Ω_j — области непрерывности функции f , на которые разделена область Ω .

Для любого вектора $z \in R^n$ и числа $h \in (0, \tau)$ введем функцию $\psi_h^z(\tau)$:

$$\psi_h^z(\theta) = \begin{cases} \psi(h + \theta), & -\tau \leq \theta \leq -h; \\ \psi(0) + (h + \theta)z, & -h \leq \theta \leq 0, \end{cases}$$

и обозначим через $f(t, \psi(\cdot); z)$ предел функции $f(t, \psi_h^z(\cdot))$ при $h \rightarrow +0$.

В каждой фиксированной точке $(t, \psi(\cdot)) \in \Omega$ для любого вектора $z \in R^n$ определим множество $\tilde{F}(t, \psi(\cdot); z)$ как выпуклую оболочку предельных значений отображения

$$z' \rightarrow f(t, \psi(\cdot); z') \quad \text{при} \quad z' \rightarrow z,$$

$$z' \notin K_i = \{z \in R^n : \langle \nabla_x W_i(t, \psi(0), \psi(\cdot)), z \rangle + \partial_\psi W_i = 0\}.$$

Рассмотрим алгебраическое включение

$$z \in \tilde{F}(t, \psi(\cdot); z). \quad (7)$$

Из теоремы Какутани о неподвижных точках многозначных отображений вытекает, что множество решений этого включения не пусто. Обозначим его через $H(t, \psi(\cdot))$.

Теорема 1. *Функционально-дифференциальные уравнения (1) и неявное функционально-дифференциальное уравнение*

$$\dot{x}(t) = z(t, x_t(\cdot)), \quad z(t, x_t(\cdot)) \in H(t, x_t(\cdot)) \quad (8)$$

равносильны в том смысле, что множества их решений совпадают.

Отметим, что уравнение (8) в виде $\dot{x} \in \tilde{F}(t, \psi(\cdot); \dot{x})$ можно рассматривать как неявную форму записи функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Теорема 2. *Решение $z(t, \psi(\cdot))$ включения (7) единственно, если для любых $t, \psi(\cdot), \phi(\cdot)$ выполнено неравенство*

$$\langle \psi(0) - \phi(0), f(t, \psi(\cdot)) - f(t, \phi(\cdot)) \rangle \leq l \|\psi(\cdot) - \phi(\cdot)\|_C^2, \quad (9)$$

где $l = l(t)$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция.

Отметим также, что неявное функционально-дифференциальное уравнение (8) при условии, что $z_i(t, \psi(\cdot)) \in K_i$ для всех i , описывает движение в “скользящем режиме”, т.е. движение по пересечению множеств D_i .

В пятом разделе вводится понятие приближенного δ -решения и доказываются теоремы о ломаных Эйлера.

Ломаные Эйлера определяются следующим образом. Для любого $N \in \mathbb{N}$ разобьем интервал $[t_0, T]$ на $N - 1$ частей с шагом $h = (T - t_0)/N = t_{j+1} - t_j$, где $j = 0, \dots, N - 1$.

Будем рассматривать дискретное по времени включение

$$\eta_{j+1} \in G_j^N(h, \eta_{t_j}(\cdot)), \quad \eta_0 = \varphi_0(0), \quad (10)$$

где отображение $G_j^N(h, \eta_{t_j}(\cdot)) : R^1 \times C_\tau \rightarrow R^n$ определено следующим образом:

$$G_j^N(h, \eta_{t_j}(\cdot)) = \eta_j + hF(t_j, \eta_{t_j}(\cdot)).$$

Функцию

$$\eta^N(t) = \begin{cases} \varphi_0(t - t_0), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0; \\ \eta(t), & t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (11)$$

будем называть ломаными Эйлера для включения (2).

Пусть многозначное отображение $F(t, \psi(\cdot))$ с непустыми компактными выпуклыми значениями полунепрерывно сверху по совокупности аргументов и ограничено. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Существует подпоследовательность последовательности ломаных Эйлера $\eta^N(t)$, которая сходится к решению включения (2) при $N \rightarrow +\infty$.*

Теорема 4. *Пусть решение включения (2) существует и единственно. Тогда приближенные решения $\eta^N(t)$ равномерно сходятся к решению включения (2) при $N \rightarrow +\infty$.*

В шестом разделе рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения, правые части которых могут быть представлены в виде суммы двух функций, одна из которых предполагается липшицевой по аргументу пространства C_τ , а другая — разрывна и обладает свойством монотонности. Для этих уравнений строятся аппроксимирующие системы уравнений с непрерывными правыми частями по типу аппроксимаций Иосиды для максимально монотонных многозначных операторов, а также некоторые другие аппроксимации разрывных характеристик релейного типа.

Рассматривается система функционально-дифференциальных уравнений, которая в векторной форме имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)) - g(t, x(t)). \quad (12)$$

Функция $f(t, x_t(\cdot)) : T \times C_\tau \rightarrow R^n$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и липшицевой по переменной $x_t(\cdot)$ в каждой ограниченной области $\Omega \subset T \times R^n$, где $T = (\alpha, \beta)$ — некоторый конечный или бесконечный интервал.

Относительно функции $g(t, x) = (g_1, \dots, g_n)$ предполагается, что она ограничена на каждом ограниченном множестве из области определения $T \times R^n$, разрывна на некотором граничном множестве $M \subset R^1 \times R^n$ и для всех точек $(t, x) \notin M$ и $(t, y) \notin M$ выполняется неравенство

$$\langle g(t, x) - g(t, y), x - y \rangle \geq 0. \quad (13)$$

Наряду с уравнениями (12), будем рассматривать систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)) - G^\lambda(t, x(t)) \quad (14)$$

с непрерывной правой частью, которую назовем аппроксимирующей. Здесь $G^\lambda(t, x(t))$ — аппроксимация Иосиды.

Теорема 5. Пусть $x(t)$ и $x^\lambda(t)$ — решения уравнения (12) и (14) соответственно, отвечающие одним и тем же начальным данным (t_0, x_{t_0}) и определенные на отрезке $[t_0 - \tau, t_1]$. Тогда существует константа C такая, что для любого $\lambda > 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - x^\lambda(t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda} \quad (15)$$

при всех $t \in [t_0, t_1]$.

Замечание 1. Утверждение теоремы 5 останется справедливым, если рассматривать уравнение

$$\dot{x} = f(t, x) - g(t, x(t - \tau)), \quad (16)$$

а аппроксимирующую систему уравнений (14) заменить на систему

$$\dot{x} = f(t, x) - G^\lambda(t, x(t - \tau)),$$

где функция f непрерывна и липшицева по переменной x , а функция $g(t, x)$ обладает теми же свойствами, что и ранее.

Вторая глава посвящена вопросам качественной теории функционально-дифференциальным уравнений с разрывной правой частью и состоит из четырех разделов.

В первом разделе приводятся необходимые определения, среди которых основным является следующее.

Определение 1. Верхняя $\dot{V}^*$ и нижняя $\dot{V}_*$ производные инвариантно дифференцируемого функционала $V(t, x, \psi(\cdot))$ в силу функционально-дифференциального включения (2) определяются равенствами

$$\begin{aligned} \dot{V}^* &= \sup_{y \in F(t, \psi(\cdot))} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y \rangle + \partial_\psi V \right) \Big|_{x=\psi(0)}, \\ \dot{V}_* &= \inf_{y \in F(t, \psi(\cdot))} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y \rangle + \partial_\psi V \right) \Big|_{x=\psi(0)}. \end{aligned}$$

Во втором разделе исследуются вопросы (слабой) устойчивости и (слабой) асимптотической устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального включения (2) при условии, что $0 \in F(t, 0)$ для всех $t \geq t_0$. Исследуются ω -предельные множества и обосновывается аналог принципа инвариантности Ла-Салля в автономном случае. Через $D \subset C_\tau$ обозначается множество, содержащее открытую окрестность нулевой функции, $D[0] = \{x : x = \psi(0), \psi(\cdot) \in D\}$, $I = [t_0, +\infty)$.

Теорема 6. Пусть $V(t, x, \psi(\cdot))$ — определенно-положительный, инвариантно дифференцируемый непрерывный функционал такой, что $\dot{V}^* \leq 0$ на множестве вида $I \times D[0] \times D$. Тогда тривиальное решение функционально-дифференциального включения (2) устойчиво.

Теорема 7. Если условия теоремы 6 выполнены с заменой $\dot{V}^*$ на $\dot{V}_*$, и кроме того, частные производные $\partial V/\partial t$, $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$ непрерывны, то тривиальное решение функционально-дифференциального включения (2) слабо устойчиво.

Теорема 8. Пусть $V(t, x, \psi(\cdot))$ — определенно-положительный инвариантно дифференцируемый непрерывный функционал, имеющий бесконечно малый высший предел, такой, что

$$\dot{V}^*(t, \psi(0), \psi(\cdot)) \leq -w(\|\psi(\cdot)\|_C) \quad (17)$$

на множестве вида $I \times D[0] \times D$, где w — непрерывная, скалярная, неубывающая функция такая, что $w(0) = 0$ и $w(\nu) > 0$ при всех $\nu > 0$. Тогда тривиальное решение функционально-дифференциального включения (2) асимптотически устойчиво.

Теорема 9. Если условия теоремы 8 выполнены с заменой $\dot{V}^*$ на $\dot{V}_*$ и частные производные $\partial V/\partial t$, $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$ непрерывны, то тривиальное решение функционально-дифференциального включения (2) слабо асимптотически устойчиво.

Рассматривается автономное дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(x_t(\cdot)), \quad x_0(\cdot) = \varphi_0(\cdot), \quad (18)$$

где $F : C_\tau \rightarrow R^n$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. Через $\Omega(x(\cdot)) \subset C_\tau$ для каждого решения $x(t)$ включения (18), заданного на промежутке $[-\tau, +\infty)$, обозначим ω -предельное множество и

$$E(w) = \{\psi(\cdot) \in C_\tau : w(\|\psi(\cdot)\|_C) = 0\},$$

где $w(\nu) \geq 0$ — некоторая непрерывная скалярная функция.

Теорема 10. Пусть $x(t)$ — решение включения (18), для которого множество $\Omega(x(\cdot)) \in C_\tau$ непусто, компактно и полуинвариантно. Пусть существует непрерывный инвариантно дифференцируемый функционал $V(x, \psi(\cdot))$ такой, что

$$\dot{V}^*(\psi(0), \psi(\cdot)) \leq -w(\|\psi(\cdot)\|_C). \quad (19)$$

Тогда $\Omega(x(\cdot)) \subset E(w)$.

В третьем разделе приводятся теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости для функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью на основе исследований, представленных выше.

В четвертом разделе изучаются некоторые условия стабилизации управляемых систем с последействием с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова, а также рассматриваются вопросы быстродействия применительно к таким системам. Рассматривается управляемая система в форме функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x_t, u), \quad (20)$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)$ — вектор управления с ограничением $u \in U$, $U \subset R^m$ — компактное множество, $f : R \times C_\tau \times U \rightarrow R^n$ — непрерывная функция. Пусть $0 \in U$ и $f(t, 0, 0) = 0$ для всех t .

Определение 2. Управление $u(t, \psi(\cdot))$ стабилизирует систему (20), если тривиальное решение этой системы (понимаемое в смысле Филиппова или Айзермана–Пятницкого), соответствующее обратной связи $u = u(t, x_t(\cdot))$, асимптотически устойчиво.

Определение 3. Управление $u(t, \psi(\cdot)) = (u_1, \dots, u_m)$ называется оптимальным по отношению к демпфированию функционала $V(t, \psi(0), \psi(\cdot))$, если этот функционал убывает вдоль решения $x = x(t, u)$, соответствующего этому управлению, наибольшим образом, т.е. полная производная функционала $V(t, \psi(0), \psi(\cdot))$ в силу системы (20), определенная равенством

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, f(t, \psi(\cdot), u) \rangle + \partial_\psi V(t, \psi(0), \psi(\cdot)),$$

достигает своего минимума на множестве U при каждом фиксированных $(t, \psi(\cdot))$.

Теорема 11. Пусть существует определенно-положительный, имеющий бесконечно малый высший предел, и инвариантно дифференцируемый функционал $V(t, \psi(0), \psi(\cdot))$ такой, что частные производные $\partial V / \partial t$, $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$ непрерывны. Пусть для всех t выполняется неравенство $\partial V / \partial t + \partial_\psi V(t, 0, 0) \leq 0$ и для любых $(t, \psi(\cdot))$, $(\|\psi(\cdot)\|_C < \delta)$

существует $u \in U$, такое что

$$\frac{dV}{dt}(t, \psi(0), \psi(\cdot), u) \leq -w(\|\psi(\cdot)\|_C), \quad (21)$$

где $w(\nu) \geq 0$ — неубывающая скалярная функция, $w(0) = 0$. Тогда любое управление $u(t, \psi(\cdot))$ со свойством $u(t, 0) = 0$, оптимальное по отношению к демпфированию функционала $V(t, \psi(0), \psi(\cdot))$, стабилизирует систему (20).

Определение 4. Управление $u = (u_1, \dots, u_m)$ называется оптимальным по быстродействию, если среди всех управлений, переводящих систему (20) из начального состояния (t_0, x_{t_0}) на множество $D^0 = R^1 \times D$ ($D \subset C_\tau$ — компактное множество), оно доставляет времени перехода $T = t_1 - t_0$ наименьшее возможное значение.

Теорема 12. Пусть управление $u(t, \psi(\cdot))$ является оптимальным по отношению к демпфированию инвариантно-дифференцируемого функционала $V(t, \psi(0), \psi(\cdot)) \geq 0$ такого, что $V(t, \psi(0), \psi(\cdot)) = 0 \Leftrightarrow (t, \psi(\cdot)) \in D^0$, и при этом управлении $dV/dt = -1$. Тогда управление $u(t, \psi(\cdot))$ оптимально по быстродействию.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Предложено описание структуры множеств разрывов правых частей функционально-дифференциальных уравнений, определенных на бесконечномерном пространстве непрерывных функций. Обоснованы способы определения решений, согласующиеся с основными подходами теории разрывных систем, развитой в работах А.Ф. Филиппова (простейшее выпуклое доопределение), М.А. Айзермана, Е.С. Пятницкого (репрезентативное представление) и В.И. Уткина (метод эквивалентного управления). Обоснованы теоремы о существовании решений функционально дифференциальных уравнений с разрывной правой частью с использованием теорем для функционально-дифференциальных включений. Получена неявная форма записи для функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, которая при определенных условиях однозначно определяет движение в “скользящем режиме” и доказана теорема о правосторонней единственности решений.

2. Доказаны теоремы о непрерывных аппроксимациях разрывных монотонных характеристик разрывных систем с последствием однопараметрическими семействами непрерывных функций, получены оценки близости решений исходных и аппроксимирующих систем функционально-дифференциальных уравнений.
3. Доказаны теоремы о (слабой) устойчивости и (слабой) асимптотической устойчивости для функционально-дифференциальных включений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова и доказан аналог принципа инвариантности Ласалля в автономном случае. Исследованы вопросы стабилизации и быстрогодействия с использованием разрывных обратных связей, оптимальных по отношению к демпфированию инвариантно дифференцируемых функционалов.

В целом в диссертационной работе аппарат инвариантно дифференцируемых функционалов систематически применяется для исследования функционально-дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями с бесконечномерным фазовым пространством непрерывных функций. Вначале — для описания множеств разрывов правых частей и описания “скользящих режимов”, затем — при изучении устойчивости. На разрывные системы с последствием перенесены методы и ряд результатов общей и качественной теории разрывных систем и теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Сурков А.В.* Об аппроксимациях регулируемых систем с разрывными монотонными характеристиками / А.В. Сурков, И.А. Финогенко // Оптимизация, управление, интеллект. — 2004. — Т. 7. — С. 40–52.
2. *Сурков А.В.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова / А.В. Сурков, И.А. Финогенко // Тр. XII Байкальской

междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. — 2005. — Т. 2. — С. 195–200.

3. *Сурков А.В.* О стабилизации функционально-дифференциальных включений / А.В. Сурков, И.А. Финогенко // Материалы Всерос. конф. с междунар. участием “Математика, ее приложения и математическое образование”. — Улан-Удэ, 2005. — С. 206–212.
4. *Сурков А.В.* Об устойчивости и слабой устойчивости функционально-дифференциальных включений / А.В. Сурков // Известия Института математики и информатики УдГУ. — Ижевск, 2006. — Вып. 3 (37). — С. 149–150.
5. *Сурков А.В.* Об однозначной определенности “скользящих режимов” систем управления с последействием / А.В. Сурков // Материалы Междунар. симп. “Обобщенные решения в задачах управления”. — Улан-Удэ, 2006. — С. 77–79.
6. *Сурков А.В.* Метод Эйлера для функционально-дифференциальных уравнений / А.В. Сурков // Тр. IX Междунар. Четаевской конф. “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”. — Иркутск, 2007. — Т. 5. — С. 218–223.
7. *Сурков А.В.* Об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова / А.В. Сурков // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1055–1063.
8. *Сурков А.В.* О функционально-дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью / А.В. Сурков // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 278–281.

Редакционно-издательский отдел
Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 143
Подписано к печати 20.11.2008
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Заказ 10. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН