

На правах рукописи

ФАЛАЛЕЕВ МИХАИЛ ВАЛЕНТИНОВИЧ

**ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Специальность: 01.01.02 — Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

ИРКУТСК — 2008

Работа выполнена в Институте математики, экономики и информатики ГОУ ВПО “Иркутский государственный университет” (Федеральное агентство по образованию РФ).

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор
СИДОРОВ Николай Александрович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
ТРЕНОГИН Владилен Александрович,

доктор физико-математических наук,
профессор
АПАРЦИН Анатолий Соломонович,

доктор физико-математических наук
ЧИСТЯКОВ Виктор Филимонович.

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л. Соболева
СО РАН (г. Новосибирск).

Защита диссертации состоится 4 декабря 2008 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в ИДСТУ СО РАН по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 3 ноября 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н.

А.А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию вопросов разрешимости в классах распределений линейных вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Интерес к этим уравнениям, как самостоятельному объекту исследований, в математической периодике наблюдается с 50–60-х годов прошлого века, когда на семинаре Л.А. Люстерника в МГУ была поставлена проблема построения теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с нетеровым оператором в главной части. Один из подходов в исследовании таких уравнений напрямую восходит к основополагающим идеям А.М. Ляпунова¹ (1906), Э. Шмидта² (1908), А. Пуанкаре³ и связан с исследованием разветвляющихся решений нелинейных уравнений (и моделей), зависящих от параметров. Этот подход, получивший в настоящее время большое развитие и широкое применение в различных задачах, называется методом Ляпунова–Шмидта. Общая методология (идеология) применения метода Ляпунова–Шмидта в теории разрешимости вырожденных линейных и нелинейных дифференциально-операторных уравнений в банаховых пространствах была разработана профессором В.А. Треногиным. Именно к таким уравнениям сводятся моделирующие реальные динамические процессы начально-краевые задачи о фильтрации и влагопереносе, о колебаниях в молекулах ДНК, о выпучивании металлических балок, о поперечных колебаниях пластин, о термо- и вязко-упругих (вискоэластичных) явлениях в пластинах, о двухтемпературной плазме во внешнем магнитном поле, о

¹Ляпунов А.М. Собрание сочинений в 5 т. / А.М. Ляпунов. — М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1954–1965.

²Schmidt E. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integral gleichungen / E. Schmidt // Math. Ann. — 1908. — Vol. 65. — P. 370–399.

³Poincare A. Oluvers. Vol. 1–10 / A. Poincare. — Paris: Gauthier-Villars, 1928–1954.

деформации механических систем, а также некоторые задачи термомоноконвекции и электротехники (модели Баренблатта–Желтова–Кочинной, Осколкова, Хоффа, V. Dolezal, Свешникова–Габова–Плетнера–Корпусова).

Исследования разрешимости задач Коши для вырожденных операторно-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах в классе непрерывных функций, проведенные в разное время С.Г. Крейном, В.А. Треногиным, Н.А. Сидоровым, Б.В. Логиновым, Г.А. Свиридюком, А.И. Кожановым, И.В. Мельниковой и их учениками, показали, что такие задачи имеют непрерывные (классические) решения лишь при определенных соотношениях между входными данными задачи, т.е. между начальными условиями и правой частью (свободной функцией) уравнения. Получение этих достаточных условий, равно как и формул для самого решения, обычно и является целью подобных исследований. Отсутствие же в общем случае классического решения естественным образом приводит в линейном случае к постановке задач уже в классе распределений (обобщенных функций), поскольку тогда нет необходимости в согласовании входных данных задачи. Поэтому для линейных уравнений в представляемых исследованиях требовалось, во-первых, выделить классы обобщенных функций в банаховых пространствах, в которых решения строятся единственным образом, во-вторых, разработать технологию восстановления обобщенного решения и, в-третьих, исследовать связь между обобщенным и классическим решениями, если последние существуют. Решается такая триединая задача с помощью фундаментальных оператор-функций вырожденных интегродифференциальных операторов. Для нахождения решений дифференциальных уравнений, заданных в пространствах распределений, фундаментальная оператор-функция является наиболее естествен-

ным инструментом.

Нестационарные вырожденные дифференциальные уравнения сводятся с помощью метода Ляпунова–Шмидта к исследованию систем интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода или к системам Вольтерра 1-го рода с особенностью. Поэтому создание основ аналитической теории таких систем также стало одной из целей диссертации.

Следует отметить, что полная теория уравнений с нетеровым оператором в главной части весьма далека от завершения несмотря на усилия многих математиков, результаты которых опубликованы в серии статей и монографий, краткий обзор которых представлен во введении к диссертации. Здесь же заметим, что в более простом конечномерном случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений с необратимой матрицей при старшей производной большой цикл работ, включая численные методы, выполнен группой иркутских математиков Ю.Е. Бояринцевым⁴, В.Ф. Чистяковым⁵, М.В. Булатовым, А.А. Щегловой. Ими были получены наиболее законченные результаты. Но эти авторы существенно использовали специфику алгебро-дифференциальных уравнений, применяя в основном методы линейной алгебры, и такие методы, как правило, не допускают обобщения на бесконечномерный случай. Последними по времени и наиболее важными для приложений являются, на взгляд автора, результаты по общей теории вырожденных дифференциальных уравнений, изложенные в монографиях А.Г. Свешникова⁶, С.А. Габова⁷, М.О. Корпусова, А.Б. Альшина, Ю.Д. Плет-

⁴Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 233 с.

⁵Чистяков В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.

⁶Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов и др. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.

⁷Габов С.А. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн / С.А. Габов,

нера. Еще одним из новых направлений применения теории вырожденных дифференциальных уравнений являются обратные задачи “прогноз-управление” и “прогноз-наблюдение” для эволюционных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, основы которого заложены в работах профессора А.И. Прилепко⁸.

Практически во всех упомянутых выше исследованиях для рассматриваемых уравнений или систем строились непрерывные решения, существование которых, как уже говорилось, обусловлено рядом ограничительных условий, что сужает возможности использования полученных результатов. Поэтому возникает интерес к построению обобщенных решений, для существования которых нет необходимости в дополнительных условиях. Достаточно стройная теория построения обобщенных решений вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений создана С.Т. Завалициным⁹ и его учениками. К сожалению, методы профессора С.Т. Завалицина также не допускают прямого обобщения на дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, поэтому возникла проблема построения соответствующей теории именно в банаховых пространствах, чему в целом и посвящена представляемая диссертация.

Целями работы являются:

- построение фундаментальных оператор-функций для классов вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах и выделение на этой основе пространств

А.Г. Свешников. — М.: Наука, 1990.

⁸Прилепко А.И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 11. — С. 1560–1571.

⁹Завалицин С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалицин, А.Н. Секин. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

распределений, в которых соответствующие уравнения однозначно разрешимы;

- исследование связи между обобщенными и классическими решениями;
- построение основ аналитической теории систем интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы основополагающие идеи теории обобщенных функций, теория полугрупп операторов с ядрами, теория псевдообращения линейных операторов, методы функционального анализа и математической физики.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми, строго доказанными, имеют теоретический характер и получены автором самостоятельно. В работе впервые решена задача построения в замкнутой форме обобщенных решений вырожденных линейных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. На этой основе исследован ряд новых типов дифференциальных уравнений в банаховых пространствах как в обыкновенных, так и в частных производных. Доказаны новые теоремы о разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода, для восстановления решений которых в виде логарифмо-степенных рядов получены рекуррентные формулы. Предложен способ исследования в пространствах распределений неклассических начально-краевых задач математической физики, основанный на применении теории фундаментальных оператор-функций.

Теоретическая и практическая значимость работы. Предложенная в работе технология позволяет восстанавливать обобщенные решения различных классов вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, исследовать связь между непрерывными и обобщенными решениями. Для уравнений, заданных в пространстве распределений, подход, используемый в диссертации, позволяет строить решения в замкнутой форме и проводить их полное исследование. Предложенные в работе рекуррентные формулы в регулярном случае могут служить основой для создания численных алгоритмов решения систем интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода как при наличии у них особенностей, так и при отсутствии таковых. Представленная в работе теория фундаментальных оператор-функции дает новый инструмент исследования неклассических задач уравнений математической физики, в том числе прикладного характера.

Полученные в работе результаты легли в основу создания новых спецкурсов для студентов-математиков ИМЭИ ИГУ, а также используются студентами и аспирантами кафедры математического анализа ИГУ при написании курсовых, дипломных работ и кандидатских диссертаций.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на ряде международных и всероссийских конференций и на семинарах, в числе которых: Международный симпозиум по компьютерной томографии (г. Новосибирск, 1993), Международная конференция “Обратные и некорректные задачи” (г. Москва, 1996), Всероссийская научная конференция “Алгоритмический анализ некорректных задач” (г. Екатеринбург, 1998), Международные конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы”.

ры. Проблемы математического образования” (г. Москва, 1998, 2003, 2008), III Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (г. Новосибирск, 1998), XI, XII, XIII и XIV Байкальские международные школы-семинары “Методы оптимизации и их приложения” (г. Иркутск, 1998, 2001, 2005, 2008), Международная конференция “Математика в приложениях” (г. Новосибирск, 1999), Международные конференции “Дифференциальные и интегральные уравнения” (г. Челябинск, 1999, 2002), Международная конференция “Некорректные и обратные задачи” (г. Новосибирск, 2002), Международная конференция “Computational Science — ICCS2003” (г. Берлин, 2003), Международная школа-семинар по геометрии и анализу (Абрау-Дюрсо, 2004), Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ” (г. Москва, 2005), Международная конференция “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике” (г. Новосибирск, 2005), Международная конференция “Тихонов и современная математика” (г. Москва, 2006), Всероссийская научная конференция “Математика. Механика. Информатика” (г. Челябинск, 2006), Международная конференция “Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения” (г. Новосибирск, 2007), IX Международная Четаевская конференция “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” (г. Иркутск, 2007), Международный конгресс по индустриальной и прикладной математике ICIAM07 (г. Цюрих, Швейцария, 2007), Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики” (г. Новосибирск, 2007), семинар под руководством проф. Негман Konig на математическом факультете университета г. Киль (Германия), семинар под руководством проф. А.И. Прилепко на механико-математическом факультете МГУ (г. Москва), семинар под руководством чл.-к. РАН, проф.

И.А. Шишмарева на факультете ВМК МГУ (г. Москва) и семинар под руководством проф. Н.А. Сидорова в Институте математики, экономики и информатики ИГУ (г. Иркутск).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 55 работ. Список основных публикаций приведен в конце автореферата, из которых №№ 1, 3, 5, 6, 9, 10, 11 входят в список журналов, рекомендованных ВАК для опубликования основных результатов докторских диссертаций. Из совместных статей и монографии в диссертацию включены результаты, полученные лично автором и не нарушающие авторских прав других лиц.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4-х глав и списка литературы. Работа изложена на 238 страницах, выполнена в системе LATEX.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность проведенных исследований, приведено краткое описание работы и дан обзор публикаций, близких к теме диссертации.

В **первой главе** работы приведены основные определения и сведения из теории обобщенных функций в банаховых пространствах.

В § 1.1 определены основные пространства $\mathbb{K}(\mathbb{R}^N; \mathbb{E}^*)$ и $\mathbb{S}(\mathbb{R}^N; \mathbb{E}^*)$ и сходимость в них, здесь и далее через $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^*$ обозначаются банахово пространство и сопряженное к нему, $\mathbb{R}^N$ — N -мерное арифметическое евклидово пространство.

В § 1.2 введены понятия пространств обобщенных функций $\mathbb{K}'(\mathbb{R}^N; \mathbb{E})$ и $\mathbb{S}'(\mathbb{R}^N; \mathbb{E})$, приведены простейшие примеры регулярных и сингулярных распределений, приведены формулировки теорем о полноте пространств обобщенных функций и аналог теоремы Дюбуа-Реймон. Выделены специальные классы $\mathbb{K}'(\mathbb{R}_+^N; \mathbb{E})$ и $\mathbb{S}'(\mathbb{R}_+^N; \mathbb{E})$ обобщенных функций с носителями в “первом октанте” пространства $\mathbb{R}^N$ при $N > 1$ (при $N = 1$ эти пространства обобщенных функций с ограниченным слева носителем обозначаются $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E})$ и $\mathbb{S}'_+(\mathbb{E})$ соответственно). В дальнейшем именно $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E})$ и $\mathbb{S}'_+(\mathbb{E})$ являются наиболее естественными пространствами для восстановления обобщенных решений задачи Коши

$$B\dot{u} = Au + f(t), \quad u(0) = u_0,$$

которые строятся при $t > 0$.

В § 1.3 введены операции умножения и дифференцирования обобщенных функций $\mathbb{K}'(\mathbb{R}^N; \mathbb{E})$. В этом же параграфе введены поня-

тия обобщенной оператор-функции и свертки обобщенной оператор-функции с обобщенной функцией.

Определение 1. Пусть $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ — банаховы пространства; $\mathcal{K}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, причем $\mathcal{K}^*(\bar{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_2^*, \mathbb{E}_1^*)$ существует при почти всех $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$; $f(\bar{x}) \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^N)$ — “классическая” обобщенная функция. Тогда выражение вида $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ называется *обобщенной оператор-функцией*.

Определение 2. Пусть $v(\bar{x}) \in \mathbb{K}'(\mathbb{R}^N; \mathbb{E}_1)$, тогда *сверткой* $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x})$ обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ и обобщенной функции $v(\bar{x})$ называется функционал

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}), s(\bar{x})) &= (\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) \cdot v(\bar{y}), s(\bar{x} + \bar{y})) = \\ &= (f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y}))) \quad \forall s(\bar{x}) \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^N; \mathbb{E}_2^*). \end{aligned}$$

Определенная таким образом операция свертки существует не всегда, поэтому в § 1.3 на примерах обсуждаются достаточные условия корректности приведенного определения. В частности, отмечено, что если $f(t) \in \mathbb{D}'_+$ и $v(t) \in \mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_1)$, то свертка $\mathcal{K}(t)f(t) * v(t) \in \mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_2)$ существует и обладает свойством ассоциативности.

В этом же параграфе определены операции *прямого произведения* $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) \cdot v(\bar{y}) \in \mathbb{K}'(\mathbb{R}^{N+M}; \mathbb{E}_2)$ обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$, $f(\bar{x}) \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^N)$, с обобщенной функцией $v(\bar{y}) \in \mathbb{K}'(\mathbb{R}^M; \mathbb{E}_1)$ и *прямого действия* $\mathcal{K}(\bar{x})v(\bar{x}) \in \mathbb{K}'(\mathbb{R}^N; \mathbb{E}_2)$ оператор-функции $\mathcal{K}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$ на обобщенную функцию $v(\bar{x}) \in \mathbb{K}'(\mathbb{R}^N; \mathbb{E}_1)$.

В § 1.4 вводится понятие фундаментальной оператор-функции для дифференциальных и интегральных операторов — основного понятия всей работы. Всякому дифференциальному оператору

$$\mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d^n}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{d}{dt} + A_0$$

с замкнутыми линейными операторами A_i , действующими из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$, $\overline{\bigcap_{i=0}^{n-1} D(A_i)} \equiv \mathbb{E}$, ставится в соответствие обобщенная оператор-функция вида

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = I\delta^{(n)}(t) + A_{n-1}\delta^{(n-1)}(t) + \dots + A_1\delta'(t) + A_0\delta(t),$$

которая в дальнейшем также называется дифференциальным оператором.

Определение 3. *Фундаментальной оператор-функцией* дифференциального оператора $\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right)$ (или $\mathcal{L}(\delta(t))$) на классе $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E})$ называется такая обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}(t)$, что $\forall u(t) \in \mathbb{K}'_+(\mathbb{E})$ на основном пространстве $\mathbb{K}(\mathbb{E}^*)$ справедливо двойное равенство

$$\mathcal{L}(\delta(t)) * \mathcal{E}(t) * u(t) = \mathcal{E}(t) * \mathcal{L}(\delta(t)) * u(t) = u(t).$$

Основной смысл введения такого понятия заключен в следующем утверждении.

Утверждение. *Если $\mathcal{E}(t)$ — фундаментальная оператор-функция дифференциального оператора $\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right)$ на классе $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E})$ и существует свертка $\mathcal{E}(t)$ с обобщенной функцией $g(t) \in \mathbb{K}'_+(\mathbb{E})$, то обобщенная функция $\mathcal{E}(t) * g(t) \in \mathbb{K}'_+(\mathbb{E})$ на основном пространстве $\mathbb{K}(\mathbb{E}^*)$ удовлетворяет сверточному уравнению*

$$\mathcal{L}(\delta(t)) * u(t) = g(t).$$

Функция $u(t) = \mathcal{E}(t) * g(t)$ является единственным решением сверточного уравнения $\mathcal{L}(\delta(t)) * u(t) = g(t)$ в классе тех обобщенных функций, для которых существует свертка с $\mathcal{E}(t)$.

В § 1.4 построены фундаментальные оператор-функции для дифференциальных операторов $(I\delta^{(M)}(t) - A\delta(t))$ и $(I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t))$, интегрального оператора $(I\delta(t) - k(t)\theta(t))$, дифференциально-разностного оператора $(I\delta'(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x - \mu) - \delta(x)))$ и оператора теплопроводности $(I\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot \Delta\delta(\bar{x}))$.

Для нестационарного дифференциального оператора вида $(I\delta'(t) * -A(t))$ фундаментальная оператор-функция построена в § 1.5.

Во **второй главе** при различных предположениях относительно операторных коэффициентов построены фундаментальные оператор-функции для вырожденных дифференциальных, интегральных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциальных операторов.

В § 2.1 исследуются вырожденные дифференциальные операторы с фредгольмовым оператором при старшей производной.

Теорема 1. *Если A, B — замкнутые линейные операторы из $\mathbb{E}_1$ в $\mathbb{E}_2$, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = \mathbb{E}_1$, B — фредгольмов, $\overline{\text{im } B} = \text{im } B$, B имеет полный A -жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_i}\}$, тогда дифференциальный оператор первого порядка $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ на классе $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t) = & \Gamma e^{A\Gamma t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) - \\ & - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \right], \end{aligned}$$

где $\{\psi_i^{(j)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_i}\}$ — A^* -жорданов набор оператора B^* , Γ — оператор Шмидта.

Теорема 1 далее применяется при исследовании задачи Коши для вырожденного дифференциального уравнения первого порядка

$$B\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

единственное обобщенное решение которой класса $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_1)$ имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{E}_1(t) * (f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t)) \quad (2)$$

и представляет собой сумму двух составляющих: сингулярной $\omega(t)$, $\text{supp } \omega(t) = \{0\}$, и регулярной $u(t)\theta(t)$, $u(t) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{E}_1)$. Обобщенное решение, имеющее такую структуру, можно восстанавливать, находя по отдельности обе его составляющие, но при такой поэтапной реконструкции остается открытым вопрос о единственности решения. Использование же аппарата фундаментальной оператор-функции полностью решает и эту проблему. Последующий анализ формулы для обобщенного решения $\tilde{x}(t)$ показал, что обобщенное решение совпадает с классическим, если x_0 и $f(t)$ удовлетворяют условиям

$$\langle Ax_0 + f(0), \psi_i^{(j)} \rangle + \langle f'(0), \psi_i^{(j-1)} \rangle + \dots + \langle f^{(j-1)}(0), \psi_i^{(1)} \rangle = 0, \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p_i.$$

Утверждение теоремы 1 далее обобщено на дифференциальные операторы вида $(B\delta''(t) - A\delta(t))$, $(B\delta^{(M)}(t) - A\delta(t))$, $(B\delta'(x)\delta'(y) - A\delta(x)\delta(y))$, $(B\delta^{(M)}(x) \cdot \delta^{(M)}(y) - A\delta(x) \cdot \delta(y))$, $(B\mathcal{D}^\alpha\delta(\bar{x}) - A\delta(\bar{x}))$, $\mathcal{D}^\alpha$ — частная производная, α — мультииндекс, для каждого из которых можно ставить и решать начально-краевые задачи так же, как это было сделано для теоремы 1. В диссертации соответствующие исследования проведены для задачи Коши

$$B\ddot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1$$

и задачи Гурса

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = Au + f(x, y),$$

$$u \Big|_{x=0} = \alpha(y), \quad u \Big|_{y=0} = \beta(x), \quad \alpha(0) = \beta(0).$$

Последняя разрешима в классе $\mathbb{C}^2(\mathbb{E}_1)$, если краевые условия $\alpha(y)$, $\beta(x)$ и функция $f(x, y)$ таковы, что

$$\left\langle A\alpha(y), \psi_i^{(p_i+1-j)} \right\rangle + \sum_{k=0}^{p_i-j} \left\langle \frac{\partial^{2k} f(0, y)}{\partial^k x \partial^k y}, \psi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\rangle \equiv 0,$$

$$\left\langle A\beta(x), \psi_i^{(p_i+1-j)} \right\rangle + \sum_{k=0}^{p_i-j} \left\langle \frac{\partial^{2k} f(x, 0)}{\partial^k x \partial^k y}, \psi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\rangle \equiv 0,$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p_i.$$

Завершается § 2.1 исследованием дифференциально-разностного оператора первого порядка $(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$.

Следующий § 2.2 посвящен исследованию тех же дифференциальных операторов, что и в § 2.1, но с нетеровым оператором B при старшей производной. Начинается § 2.2 с основных сведений о псевдообратных операторах и A -жордановых наборах нетеровых операторов, далее последовательно рассматриваются операторы $(B\delta'(t) - A\delta(t))$, $(B\delta^{(M)}(t) - A\delta(t))$, $(B\delta^{(M)}(x) \cdot \delta^{(M)}(y) - A\delta(x) \cdot \delta(y))$, $(B\mathcal{D}^\alpha \delta(\bar{x}) - A\delta(\bar{x}))$, $(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$, для каждого из которых сформулированы и доказаны по 2 теоремы о виде фундаментальной оператор-функции, соответствующие положительному и отрицательному значениям индекса нетероваго оператора B . Приведем здесь одну из таких пар теорем.

Теорема 2. *Если A, B — замкнутые линейные операторы из $\mathbb{E}_1$ в $\mathbb{E}_2$, $\overline{\text{im } B} = \text{im } B$, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = \mathbb{E}_1$, $n = \dim \ker B$, $m = \dim \ker B^*$, $n > m$, существуют полные жордановы наборы $\{\varphi_i^{(j)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i\}$ и $\{\psi_i^{(j)}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p_i\}$, тогда дифференциальный оператор первого порядка $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ на классе $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_1(t) = B^+ e^{AB^+ t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \right],$$

где $\psi_i^{(j)}$ при $i = m + 1, \dots, n$, $j = 2, \dots, p_i$ являются произвольными функционалами из $\mathbb{E}_2^*$ и $\psi_i^{(1)} = 0$, $i = m + 1, \dots, n$, B^+ — псевдообратный оператор.

Теорема 3. Если в условиях теоремы 2 $n < m$, то обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_1(t)$ является фундаментальной для дифференциального оператора $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ на подклассе обобщенных функций из $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\langle e^{AB^+t}, \psi_\nu \rangle z_\nu \theta(t) * u(t) = 0, \quad \nu = n + 1, \dots, m.$$

В качестве иллюстрации применения этих теорем в диссертации исследована задача Коши (1) для дифференциального уравнения 1-го порядка с нетеровым оператором B при производной. Показано, что если оператор B имеет положительный индекс (теорема 2), то обобщенное решение (2) окажется многопараметрической функцией. Дальнейший анализ решения (2) позволил получить условия существования классического решения. В случае отрицательного индекса оператора B (теорема 3) таковыми являются условия (3) и соотношения

$$\int_0^t \langle e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \psi_\nu \rangle ds = 0, \quad \nu = n + 1, \dots, m.$$

В § 2.3 результаты предыдущих двух параграфов с помощью теории полугрупп операторов с ядрами профессора Г.А. Свиридюка¹⁰ обобщены на случаи, когда размерность ядра оператора B или длины A -жордановых цепочек бесконечны. В § 2.3 рассмотрены случаи спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка $(\mu B - A)$ и в каждом из трех случаев построены фундаментальные оператор-функции для дифференциальных операторов вида $(B\delta^{(M)}(t) - A\delta(t))$, $(B\delta^{(M)}(x) \cdot \delta^{(M)}(y) - A\delta(x) \cdot \delta(y))$,

¹⁰Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. — Utrecht; Boston: VSP, 2003.

$(B\mathcal{D}^\alpha\delta(\bar{x}) - A\delta(\bar{x})), (B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$. Приведем одно из этих утверждений.

Пусть $B \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$ необратим, A — замкнутый линейный оператор из $\mathbb{E}_1$ в $\mathbb{E}_2$, B -резольвентным множеством оператора A называется множество $\rho^B(A) \equiv \{\mu \in C : (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_1)\}$, при этом сам оператор A называется спектрально ограниченным относительно оператора B , если $\exists a > 0$ такое, что $\{\mu \in C : |\mu| > a\} \subset \rho^B(A)$, т.е. вне круга радиуса a оператор $(\mu B - A)$ непрерывно обратим. Пусть $\Gamma \equiv \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$, тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mu B - A)^{-1} B d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} B(\mu B - A)^{-1} d\mu$$

являются проекторами в $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$ соответственно, порождают разложения пространств $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$ в прямые суммы $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_1^0 \oplus \mathbb{E}_1^1 = \ker P \oplus \operatorname{im} P$, $\mathbb{E}_2 = \mathbb{E}_2^0 \oplus \mathbb{E}_2^1 = \ker Q \oplus \operatorname{im} Q$. Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0 : \mathbb{E}_1^0 \rightarrow \mathbb{E}_2^0$, $B_1 : \mathbb{E}_1^1 \rightarrow \mathbb{E}_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : \mathbb{E}_1^1 \rightarrow \mathbb{E}_2^1$ ограничен, $QB = BP$, $QA = AP$.

Теорема 4. *Если оператор A спектрально ограничен относительно B , то дифференциальный оператор $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ имеет на классе $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{U}(t)B_1^{-1}Q\theta(t) - \sum_{q=0}^{\infty} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I - Q)\delta^{(q)}(t),$$

здесь

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mu B - A)^{-1} B e^{\mu t} d\mu$$

разрешающая полугруппа.

Если дополнительно предположить, что ∞ — несущественно особая точка $(\mu B - A)^{-1}$ (т.е. $\exists p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ такое, что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq 0$, но $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} \equiv 0$), то очевидно порядок сингулярности $\mathcal{E}(t)$ понизится до p .

Теперь если оператор A спектрально ограничен относительно B и ∞ — несущественно особая точка $(\mu B - A)^{-1}$, то обобщенное решение (2) задачи Коши (1) окажется классическим при выполнении условия

$$(I - P)x_0 + \sum_{q=0}^p (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I - Q)f^{(q)}(0) = 0.$$

В § 2.4 в предположении полиномиальной ограниченности операторного пучка $\lambda^2 B - \lambda A_1 - A_0$ рассмотрены дифференциальные уравнения высокого порядка вида

$$Bu^{(2m)}(t) - A_1 u^{(m)}(t) - A_0 u(t) = f(t), \quad (4)$$

$$B\mathcal{D}^{2\alpha}u(\bar{x}) - A_1 \mathcal{D}^\alpha u(\bar{x}) - A_0 u(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

и соответствующие им дифференциальные операторы $(B\delta^{(2m)}(t) - A_1 \delta^{(m)}(t) - A_0 \delta(t))$ и $(B\mathcal{D}^{2\alpha}\delta(\bar{x}) - A_1 \mathcal{D}^\alpha \delta(\bar{x}) - A_0 \delta(\bar{x}))$, где $B, A_1, A_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$, B — необратим, $m \in \mathbb{N}$. Получены формулы для фундаментальных оператор-функций, проведены полные исследования обобщенных решений начальной задачи для уравнения (4).

В § 2.5 рассматриваются следующие вырожденные интегральные, интегро-дифференциальные и полные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$Bu(t) = \int_0^t k(t-s)u(s)ds + f(t), \quad (5)$$

$$B\dot{u}(t) - Au(t) = \int_0^t k(t-s)u(s)ds + f(t),$$

$$B\ddot{u}(t) - A_1 \dot{u}(t) - A_0 u(t) = f(t)$$

с фредгольмовым оператором B . В начале § 2.5 приведены основные определения и сведения из теории обобщенных жордановых

наборов фредгольмовых операторов, в терминах которых построены фундаментальные оператор-функции для интегро-дифференциальных операторов $(B\delta(t) - k(t)\theta(t))$, $(B\delta'(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t))$, $(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t))$. Соответствующие теоремы доказываются по одной универсальной методике, вполне применимой для получения аналогичных результатов для интегро-дифференциальных операторов других видов.

Приведем одну из доказанных в § 2.5 теорем.

Пусть выполнена группа условий:

(C1) $B, k(t)$ — замкнутые линейные операторы из $\mathbb{E}_1$ в $\mathbb{E}_2$, $\overline{D(B)} = \overline{D(k)} = \mathbb{E}_1$, $D(k)$ не зависит от t , $D(B) \subset D(k)$, $\overline{\text{im } B} = \text{im } B$, $k(t)$ — сильно непрерывная на $D(k)$ достаточно гладкая функция, B — фредгольмов;

(C2) оператор B имеет полный обобщенный жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}\}$ относительно оператор-функции $k(t)$.

При выполнении условия (C2) оператор B^* имеет полный обобщенный жорданов набор $\{\psi_i^{(j)}\}$ относительно $k^*(t)$.

Пусть $\mathcal{R}(t)$ — резольвента ядра $k(t)\Gamma$, Γ — оператор Шмидта для B , $\langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, т.е. $\{z_i\}$ — биортогональная система элементов к ядру $\ker B^*$, $\mathcal{Q}_i = \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$, $\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_i$ — проекторы.

Теорема 5. Если выполнены условия (C1) и (C2), то интегральный оператор $(B\delta(t) - k(t)\theta(t))$ имеет на классе $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \left(\Gamma\delta(t) + \Gamma\mathcal{R}(t)\theta(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{N}(t)\theta(t) \right) * \\ & * \left\{ (I - \mathcal{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t) \right\}, \end{aligned}$$

здесь $\mathcal{N}(t)$ — резольвента ядра $\sum_{i=1}^n (-\mathcal{Q}_i \mathcal{R}^{(p_i)}(t)\theta(t))$.

В условиях теоремы 5 интегральное уравнение (5) имеет единственное обобщенное решение класса $\mathbb{K}'_+(\mathbb{E}_1)$ вида

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * f(t)\theta(t) = \omega(t) + v(t)\theta(t),$$

$\text{supp } \omega(t) = \{0\}$, $v(t) \in \mathbb{C}(\mathbb{E}_1)$. Исходя из этого представления, можно уже получить как конструктивные формулы для восстановления обеих составляющих обобщенного решения, так и условия существования классического (непрерывного) решения.

Параграф 2.6 посвящен исследованию вырожденного оператора теплопроводности $(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot \Delta\delta(\bar{x}))$. Рассмотрены все случаи вырождения для операторного пучка $(\mu B - A)$: фредгольмовость, нетеровость, спектральная, секториальная и радиальная ограниченности. Для каждого из этих случаев приведено по 2 теоремы, соответствующие четному и нечетному количеству пространственных переменных.

В последнем § 2.7 второй главы в конспективной форме изложены операционные методы построения фундаментальных оператор-функций. Сформулированы основные определения и проиллюстрированы возможности таких методов на примерах операторов $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$, $(B\delta^{(N)}(x) \cdot \delta^{(N)}(y) - A\delta(x) \cdot \delta(y))$ и $(B\delta^{(N)}(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$.

Третья глава посвящена исследованию нестационарных вырожденных дифференциальных уравнений.

В § 3.1 рассматривается задача Коши

$$B\dot{x}(t) = A(t)x + f(t), \tag{6}$$

$$x(0) = x_0, \tag{7}$$

где $B, A(t)$ — замкнутые линейные операторы из $\mathbb{E}_1$ в $\mathbb{E}_2$, $D(B) \subset D(A(t))$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A(t))} = \mathbb{E}_1$, B — фредгольмов, оператор-функция $A(t)$ в окрестности точки $t = 0$ принадлежит классу $\mathbb{C}^\infty$ (по операторной норме), $\overline{\operatorname{im} B} = \operatorname{im} B$, $f(t)$ — достаточно гладкая функция.

Непрерывное решение задачи Коши (6), (7) ищется в виде

$$x(t) = x_0 + \Gamma v(t) + \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \varphi_i, \quad (8)$$

$$\langle v(t), \psi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

$$v(0) = 0, \quad \xi_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где, как и выше, φ_i , $i = \overline{1, n}$, — базис ядра $\ker B$, ψ_i , $i = \overline{1, n}$, — базис ядра $\ker B^*$, Γ — оператор Шмидта. Пусть $\mathcal{U}(t)$ эволюционный (разрешающий) оператор уравнения

$$\dot{y}(t) = A(t)\Gamma y(t),$$

тогда

$$v(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(\tau) \left(A(\tau)x_0 + f(\tau) + \sum_{i=1}^n A(\tau)\varphi_i \xi_i(\tau) \right) d\tau. \quad (10)$$

Отсюда в силу (9) следует, что функции $\xi_i(t)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^t \mathcal{K}(t, s) \bar{\xi}(s) ds = \bar{b}(t), \quad (11)$$

$$\mathcal{K}(t, s) = \left\| \mathcal{K}_{ij}(t, s) = \left\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(s)A(s)\varphi_i, \psi_j \right\rangle, \quad i, j = \overline{1, n} \right\|,$$

$$\bar{b}(t) = \left(b_j(t) = - \int_0^t \left\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(s)F(s), \psi_j \right\rangle ds, \quad j = \overline{1, n} \right).$$

Каждому непрерывному решению системы (11) по формулам (10) и (8) соответствует непрерывное решение задачи Коши (6), (7) и наоборот.

Пусть выполнено условие

(G1) все ядра системы $\mathcal{K}_{pl}(t, s)$, $p, l = \overline{1, n}$, аналитичны в окрестности точки $(0;0)$ при $|t| < \rho$, $|s| < \rho$, и все их частные производные до порядка $(m-1)$ включительно обращаются в ноль в точке $(0;0)$, но не все частные производные m -го порядка равны нулю в точке $(0;0)$.

Обозначим через $\mathcal{K}_{ij}$ матрицу, составленную из (i, j) коэффициентов Маклорена ядер $\mathcal{K}_{pl}(t, s)$.

Определение 4. Точка $t = 0$ называется регулярной особой точкой ядра $\mathcal{K}(t, s)$, если матрица $A = \sum_{i+j=m} \mathcal{K}_{ij}$ не вырождена, т.е.

$$\det \sum_{i+j=m} \mathcal{K}_{ij} \neq 0.$$

Далее предполагается, что $t = 0$ — регулярная особая точка ядра $\mathcal{K}(t, s)$. Саму систему (11) в этом случае естественно называть регулярной.

Введем ряд матричных функций

$$L_k(\lambda) = \sum_{i+j=k} \frac{\mathcal{K}_{ij}}{\lambda + j + 1}, \quad k = m, m+1, \dots$$

Определение 5. Характеристическим уравнением, соответствующим системе (11), называется уравнение

$$\det L_m(\lambda) = 0. \tag{12}$$

Такое уравнение возникает естественным образом, если искать аналитическое решение системы (11).

Для каждого натурального корня λ_0 характеристического уравнения (12) будем предполагать выполненным условие

(G2) матрица $L_m(\lambda_0)$ относительно системы матриц $\{(-1)^{k+1}/k! \cdot L_m^{(k)}(\lambda_0)\}$ имеет полный обобщенный жорданов набор.

Определение 6. *Кратностью* натурального корня λ_0 характеристического уравнения (12) назовем число

$$m_0 = \max\{p_i, i = \overline{1, n_0}\},$$

здесь $n_0 = \dim \ker L_m(\lambda_0)$, p_i — длины обобщенных жордановых цепочек базисных элементов ядра $\ker L_m(\lambda_0)$.

Наряду с кратностью введем *показатель* для корня λ_0 , а именно, величину

$$q_0 = p_1 + p_2 + \dots + p_{n_0}.$$

Решение системы (11) ищется в виде

$$\bar{\xi}(s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \bar{\xi}_{\alpha}(s) s^{\alpha},$$

где

$$\bar{\xi}_{\alpha}(s) = \bar{\xi}_{\alpha 0} + \bar{\xi}_{\alpha 1} \ln s + \bar{\xi}_{\alpha 2} (\ln s)^2 + \dots + \bar{\xi}_{\alpha r_{\alpha}} (\ln s)^{r_{\alpha}}.$$

Теорема 6. *Если для задачи (6), (7) и соответствующей ей системы (11) выполнены условия (G1), (G2), характеристическое уравнение (12) имеет l целых неотрицательных корней $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_l$ кратностей $m_1, m_2, \dots, m_l$ с показателями $q_1, q_2, \dots, q_l$; $t = 0$ — регулярная особая точка ядра $K(t, s)$; функции $K(t, s)$ и $\bar{b}(t)$ достаточно гладкие в окрестности нуля и $\bar{b}(0) = \bar{b}^{(1)}(0) = \dots = \bar{b}^{(m)}(0) = 0$, то задача (6), (7) имеет $(q_1 + q_2 + \dots + q_l)$ -параметрическое непрерывное решение вида (8).*

Все формулы и процедуры, необходимые для восстановления решения (8), в диссертации описаны.

Заметим, что теорема 6 является обобщением результатов, полученных ранее Н.А. Магницким¹¹ и автором¹² диссертации для одного интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода.

¹¹Магницкий Н.А. Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерра 1 рода / Н.А. Магницкий // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 1. — С. 29–32.

¹²Фалалеев М.В. Асимптотические представления непрерывных и обобщенных решений

Одно из условий теоремы 6, а именно $\bar{b}(0) = \bar{b}^{(1)}(0) = \dots = \bar{b}^{(m)}(0) = 0$, можно снять, если строить решения задачи (6), (7) в пространстве распределений. В обобщенных функциях задачу Коши (6), (7) можно переписать в форме

$$\left(B\delta'(t) * -A(t)\right)\tilde{x}(t) = f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t).$$

Обобщенное решение можно искать в виде сумм

$$\tilde{x}(t) = \Gamma\delta(t) * y(t) + \left(x_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i(t)\varphi_i\right)\theta(t) + \sum_{i=1}^n w_i\varphi_i, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{j=0}^m c_{ij}\delta^{(j)}(t) \in \mathbb{D}'_+, \\ Q_j\delta(t) * y(t) &= 0, \quad Q_j = \langle \cdot, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n, \\ y(t) &\in \mathbb{K}'(\mathbb{E}_2). \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{U}(t)\left(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)\right),$$

тогда

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(\tau) \left(A(\tau)x_0 + f(\tau) + \sum_{i=1}^n A(\tau)\varphi_i\xi_i(\tau) \right) d\tau\theta(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \mathcal{E}(t)A(t)\varphi_iw_i. \end{aligned}$$

Вектор $\bar{\xi}(t)$ удовлетворяет системе

$$\sum_{i=1}^n \int_0^t \mathcal{K}_{ij}(t, s)\xi_i(s)ds = b_j(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{ik} \frac{\partial^k \mathcal{K}_{ij}(t, 0)}{\partial s^k},$$

интегрального уравнения Вольтерра 1 рода / М.В. Фалалеев; Иркутский гос. ун-т. — Иркутск, 1987. — 44 с. — Деп. в ВИНТИ 26.12.86, № 1553-B87.

$$j = 1, \dots, n,$$

которая будет разрешимой в классе непрерывных функций, если константы c_{ik} выбрать удовлетворяющими следующей алгебраической системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\partial^{k+l} \mathcal{K}_{ij}(0, 0)}{\partial t^l \partial s^k} c_{ik} = b_j^{(l)}(0), \quad (14)$$

$$j = 1, \dots, n, \quad l = 0, 1, \dots, m,$$

имеющей рекуррентную структуру.

Если $\det \mathcal{K}_{lm-l} \neq 0$, то из (14) все c_{ik} однозначно находятся. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Пусть выполнены условия (G1), (G2), характеристическое уравнение (12) имеет l целых неотрицательных корней $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_l$ кратностей $m_1, m_2, \dots, m_l$ с показателями $q_1, q_2, \dots, q_l$, $t = 0$ — регулярная особая точка ядра $\mathcal{K}(t, s)$, функции $\mathcal{K}(t, s)$ и $\bar{b}(t)$ достаточно гладкие в окрестности нуля и $\det \mathcal{K}_{lm-l} \neq 0$, $l = 0, 1, \dots, m$, то задача Коши (6), (7) имеет $(q_1 + q_2 + \dots + q_l)$ -параметрическое обобщенное решение вида (13).

В работе приведены все этапы восстановления регулярной и сингулярной составляющих обобщенного решения.

В § 3.2 рассматривается задача Коши вида

$$B(t)\dot{x}(t) = A(t)x + f(t),$$

$$x(0) = 0.$$

где $B(t)$, $A(t)$ — замкнутые линейные операторы из $\mathbb{E}_1$ в $\mathbb{E}_2$, $\overline{D(B(t))} = \overline{D(A(t))} = \mathbb{E}_1$, $B(0)$ — фредгольмов, причем для $B(t)$ точка $t = 0$ является изолированной особой, $A(t)$, $B(t)$ — достаточное число раз сильно непрерывно дифференцируемые в окрестности

точки $t = 0$ оператор-функции, $f(t)$ — достаточно гладкая функция. Исследуются малые решения $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Такая задача сводится к системе интегральных уравнений с особенностью вида

$$t^{\alpha+1}\bar{\xi}(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t, s) \bar{\xi}(s) ds + \bar{b}(t),$$

которая исследуется по той же схеме, что и система (11), с учетом естественной специфики задачи. Доказанные в работе теоремы для этой системы полностью включают в себя результаты С.Г. Крейна и И.В. Сапронова¹³, полученные ими для одного однородного интегрального уравнения Вольтерра с особенностью.

Четвертая глава работы посвящена приложениям теории фундаментальных оператор-функций к различным начально-краевым задачам прикладного характера. В этой главе рассмотрены:

- задача о процессах влагопереноса;
- задача о колебательных процессах в молекуле ДНК;
- уравнение теории выпучивания металлических балок;
- уравнение поперечных колебаний пластины;
- задачи теории вязко-упругости (вискоэластики);
- задача о процессах фильтрации жидкостей в неоднородных средах;
- уравнение продольных колебаний стержней с учетом поперечной инерции;
- уравнение свободной поверхности фильтрующейся жидкости;
- вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами;
- модель двухконтурной электрической цепи.

¹³Крейн С.Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью / С.Г. Крейн, И.В. Сапронов // Докл. РАН. — 1997. — Т. 355, № 4. — С. 450–452.

Для дифференциальных операторов каждого из перечисленных уравнений (задач) построены соответствующие им фундаментальные оператор-функции, с помощью которых восстановлены обобщенные решения и получены условия существования классических (гладких) решений.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Построена теория фундаментальных оператор-функций для вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах, выделены классы распределений, в которых обобщенные решения восстанавливаются единственным образом, и предложена методика для их построения.
2. Выделены классы вырожденных интегральных и дифференциальных операторов в банаховых пространствах как в обыкновенных, так и в частных производных, для которых найдены их фундаментальные оператор-функции, и на этой основе в замкнутом виде получены обобщенные решения начальных задач для соответствующих сингулярных уравнений. Исследована связь между непрерывным и обобщенным решениями таких уравнений. Впервые проведено полное исследование вырожденного уравнения теплопроводности в банаховых пространствах.
3. Построена аналитическая теория регулярных систем интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода как при наличии у них особенностей, так и при отсутствии таковых. Получены рекуррентные формулы для построения как непрерывных, так и обобщенных решений таких систем.
4. В пространстве распределений с ограниченным слева носителем исследован ряд неклассических начально-краевых задач математической физики прикладного характера, для которых построены обобщенные решения. На основе анализа последних получены результаты о разрешимости таких задач в классе непрерывных функций.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Сидоров Н.А.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 726–728.

2. *Сидоров Н.А.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев; Иркутский гос. ун-т. — Иркутск, 1986. — 28 с. — Деп. в ВИНТИ по решению редакции журн. Дифференциальные уравнения 04.02.86, № 813-B86.

3. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. — 2000. — Т. 41, № 5. — С. 1167–1182.

4. *Sidorov N.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 568 p.

5. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев, Е.Ю. Гражданцева // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 6. — С. 1393–1406.

6. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности / М.В. Фалалеев, Е.Ю. Гражданцева // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 6. — С. 769–774.

7. *Sidorov N.A.* Generalized Solutions of Volterra Integral Equations

of the First Kind / N.A. Sidorov, M.V. Falaleev, D.N. Sidorov // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2006. — Vol. 29, № 2. — P. 101–109.

8. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности / М.В. Фалалеев // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 10. — С. 68–75.

9. *Фалалеев М.В.* Фундаментальная оператор-функция вырожденного уравнения теплопроводности в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Докл. РАН. — 2007. — Т. 416, № 6. — С. 745–749.

10. *Фалалеев М.В.* Задача Коши для вырожденного уравнения теплопроводности в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 8. — С. 1120–1130.

11. *Фалалеев М.В.* Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев, О.В. Коробова // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 916–927.

12. *Фалалеев М.В.* Обобщенные решения задачи Коши для вырожденного нестационарного дифференциального уравнения первого порядка в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — Иркутск: Иркут. ун-т, 2007. — Т. 1. — С. 322–329.

13. *Фалалеев М.В.* О приложениях теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Неклассические уравнения математической физики: Тр. Междунар. конф. “Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения”, посв. 100-летию акад. И.Н. Векуа. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2007. — С. 283–297.

14. *Сидоров Н.А.* Обобщенные решения вырожденных дифферен-

циальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. — Новосибирск: Наука, 1988. — С. 308–318.

15. *Фалалеев М.В.* Обобщенные решения некоторых классов вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Тр. XI-ой Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. — Будапешт, 1988. — С. 271–274.

16. *Фалалеев М.В.* Обобщенные решения вырожденных интегродифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Численные методы оптимизации и анализ. — Новосибирск: Наука, 1992. — С. 185–188.

17. *Falaleev M.V.* Asymptotic expansions of continuous solutions of system of Volterra integral equations of the first kind / M.V. Falaleev // Intern. symp. on computerized tomography. Novosibisk (Russia), August 10–14, 1993. — Amsterdam: Nord-Holl, 1994. — P. 155–158.

18. *Фалалеев М.В.* Асимптотические представления непрерывных решений неоднородной системы интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода с особенностью n -го порядка / М.В. Фалалеев // Методы оптимизации и их приложения: Тр. Междунар. конф. — Иркутск: Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 1998. — Т. 4. — С. 183–186.

19. *Фалалеев М.В.* Задача Коши для вырожденных интегродифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Вестник Челябинского университета. — Челябинск: Изд-во Челяб. ун-та. — 1999. — Вып. 2. — С. 126–136.

20. *Сидоров Н.А.* Обобщенные решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Методы оптимизации и их приложения.: Тр. Междунар. конф. — Иркутск: Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2001. — Т. 4. —

С. 173–178.

21. *Sidorov N.A.* Generalized Jordan Sets in the Theory of Singular Partial Differential-Operator Equations / N.A. Sidorov, M.V. Falaleev, O.A. Romanova // Computational Science — ICCS 2003: Proc. of Intern. conf. Part 2. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. — P. 523–532.

22. *Falaleev M.V.* Generalized Solutions of Volterra Integral Equations of the First Kind / M.V. Falaleev, N.A. Sidorov, D.N. Sidorov [Электронный ресурс]: Lobachevskii Journal of Mathematics. — Казань: Казанский ун-т, 2005. — Vol. 20. — P. 47–57. — Режим доступа: <http://ljm.ksu.ru/vol20/27.html/>.

23. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов и полугруппы операторов с ядрами при условиях спектральной ограниченности / М.В. Фалалеев // Методы оптимизации и их приложения: Тр. Междунар. конф. — Иркутск: Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2005. — Т. 3. — С. 196–200.

24. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка специального вида в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Вестник МаГУ. Математика. — Магнитогорск: МаГУ, 2006. — Вып. 9. — С. 104–112.

25. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции некоторых специальных классов вырожденных дифференциальных операторов с частными производными в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Труды СВМО. — Саранск, 2006. — Т. 8, № 2. — С. 187–195.

26. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции некоторых специальных классов вырожденных дифференциальных операторов в частных производных в банаховых пространствах / М.В. Фа-

лалеев // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: Тр. IX-ой Междунар. конф., посв. 105-летию Н.Г. Четаева. — Иркутск: Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН, 2007. — Т.5. — С. 237–246.

27. *Фалалеев М.В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с фредгольмовым оператором при производной по времени в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Математика. Механика. Информатика: Материалы Всерос. науч. конф. Челябинск, 19–22 сентября 2006 г. — Челябинск: Челяб. ун-т, 2007. — С. 201–210.

Издательство Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, д. 36, т. (3952) 24 14 36

Подписано к печати 02.09.2008

Формат бумаги 60 x 84 1/16, усл. печ. л. 2,0

Заказ 60. Тираж 150 экз

Отпечатано в ИГУ