

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Институт динамики систем и теории управления
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Петренко Павел Сергеевич

**Управляемость и устойчивость систем
дифференциально-алгебраических уравнений**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. А.А. Щеглова

Иркутск - 2014

Оглавление

Введение	3
1 Эквивалентная структурная форма	21
1.1 Эквивалентная форма для линейных ДАУ	21
1.2 Эквивалентная форма для нелинейных ДАУ	27
1.3 Сопряженная система	34
1.3.1 Эквивалентная форма	34
1.3.2 Разрешимость	41
2 Линейные системы	46
2.1 R -управляемость и R -наблюдаемость	46
2.1.1 Определения	46
2.1.2 Критерии R -наблюдаемости и R -управляемости.	48
2.1.3 О взаимосвязи свойств R -управляемости и R -наблюдаемости	53
2.2 Стабилизируемость линейных ДАУ с векторным управлением . .	57
2.3 Детектируемость	65
2.4 Приводимость дифференциально-алгебраических уравнений . . .	70
2.5 Правильные системы	76
3 Нелинейные системы	80
3.1 Локальная R -управляемость в ноль	80
3.2 Локальная R -наблюдаемость	88
3.3 Стабилизируемость по линейному приближению	90
3.3.1 Вспомогательные сведения	90
3.3.2 Условия стабилизируемости	99
3.4 Устойчивость нелинейных систем по первому приближению	105
Заключение	117
Литература	119

Введение

Актуальность темы и объект исследования.

В работе рассматриваются управляемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$F(t, x(t), x'(t), u(t)) = 0, \quad t \in I = [0, +\infty), \quad (0.1)$$

не разрешенные относительно производной искомой вектор-функции $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ и тождественно вырожденные в области определения:

$$\det \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial y} \equiv 0.$$

Исследуются качественные свойства таких систем как в нелинейной постановке (0.1), так и в линейном случае

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad \det A(t) \equiv 0, \quad t \in I, \quad (0.2)$$

где $A(t), B(t)$ — заданные $(n \times n)$ -матрицы, $U(t)$ — заданная матрица размеров $n \times l$, $u(t)$ — l -мерная функция управления.

В литературе для обозначения систем такого рода использовалось множество названий: алгебро-дифференциальные системы [50, 52, 57], сингулярные системы [4, 74, 81], системы ОДУ, неразрешенные относительно производных [53], вырожденные [3, 85], неявные [73] или полуявные [62, 72], дескрипторные системы [71, 115] и другие. В настоящее время в англоязычной литературе термин “дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ)” потеснил другие названия

и вошел в AMS Subject Classification. В диссертации используется именно этот термин для обозначения объекта исследований.

Рост интереса к исследованиям в области систем ДАУ стимулируется проблемами математического моделирования во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования, оптимальном управлении со смешанными ограничениями, теории электронных схем и электрических цепей, механике, химической кинетике, гидродинамике и теплотехнике [3–5, 22, 26, 38, 52, 81].

Диссертация посвящена исследованию качественных свойств систем ДАУ. Получены условия R -управляемости, R -наблюдаемости, устойчивости и стабилизируемости для ДАУ (0.1), (0.2), а для линейных систем также условия детектируемости, правильности и приводимости.

По своим свойствам ДАУ существенно отличаются от систем ОДУ, разрешенных относительно производной (в нормальной форме). Решение ДАУ зависит от производных входных данных вплоть до порядка, совпадающего с размерностью системы. В общем случае отсутствует непрерывная зависимость решений от входных данных, а пространство решений может оказаться бесконечномерным. Неоднородная система может быть несовместна на своей области определения. Структура пучка матриц Якоби, описывающих систему, не инвариантна относительно преобразований, использующих замену переменных. Эта специфика обуславливает не только необходимость поиска принципиально новых теоретических подходов, но и переосмысления многих базовых понятий классической теории ОДУ, таких как устойчивость, управляемость, наблюдаемость и т.п.

В теории ДАУ одной из важнейших характеристик, отражающей меру неразрешенности системы относительно производной, является индекс неразрешенности. Сравнительный анализ различных определений индекса приведен, в частности, в книге [50].

S.L. Campbell сформулировал понятие индекса ДАУ, связанное

с понятием r -продолженной системы [64, 67, 73, 76]. Под r -продолженной системой понимается совокупность ДАУ (0.1) и r ее полных производных по t

$$\mathcal{F}_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) = \begin{pmatrix} F(t, x, x') \\ \frac{d}{dt} F(t, x, x') \\ \dots \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^r F(t, x, x') \end{pmatrix} = 0. \quad (0.3)$$

Система (0.3) рассматривается как система конечных уравнений с независимыми переменными $t, x, x', \dots, x^{(r+1)}$ в предположении, что начиная с некоторого натурального ρ из (0.3) при $\rho \leq r$ можно выделить уравнение вида $x' + \psi(t, x) = 0$. При этом число ρ называется *индексом по дифференцированию* системы (0.1). Показано, что при выполнении некоторых ограничений решения полученной системы являются решениями ДАУ (0.1).

В работах [50, 52, 57] введено понятие левого регуляризирующего оператора, действие которого преобразует ДАУ (0.1) к нормальному виду. Под индексом системы (0.1) понимается дифференциальный порядок такого оператора.

В монографии P.J. Rabier и W.C. Rheinboldt [117] рассмотрены многие аспекты качественной теории ДАУ. В частности, для квазилинейной автономной системы предлагается процедура последовательного понижения индекса ДАУ с помощью многообразий касательных пучков. Стабилизация процесса означает, что исходная система становится эквивалентна системе ОДУ в нормальной форме на некотором многообразии. Осуществление такой редукции требует на каждом шаге постоянства ранга матрицы при производной искомой функции на определенных многообразиях. Это ограничение значительно сужает класс рассматриваемых систем по сравнению с тем, который охватывается процедурами нормализации, предложен-

ными в работах [57, 64, 67, 73, 76].

Большое внимание ДАУ вида (0.1) индекса 1 и 2, а также численным методам их решения уделено в работах математиков Берлинской школы (см., в частности, [99, 107, 108]). При этом вводится свое определение индекса: *tractability index*, опирающееся на применение различных проекторов. В частности, линейная система $A(t)x'(t) + B(t)x(t) + f(t) = 0$, $t \in T$, имеет *tractability index* 1, если матрица $A(t) + B(t)P(t)$ неособенна для любого $t \in T$, $P(t)$ — проектор на ядро матрицы $A(t)$. Понятие *tractability index* существенно уже понятия индекса по дифференцированию, поскольку оно требует постоянства ранга матрицы $\partial F / \partial x'$.

В работе Р. Kunkel и V. Mehrmann [98] для нормализации ДАУ вида (0.1) также привлекаются продолженные системы. Здесь уже не требуется, чтобы $\text{rank } \partial F(t, x, x') / \partial x' = \text{const}$, но основными ограничениями являются, в частности, предположения о том, что множество решений продолженной системы (0.3), представляет собой одно многообразие в пространстве $\mathbf{R}^{n(r+2)+1}$, а матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x'} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x''} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x^{(r+1)}} \end{pmatrix}$$

имеет постоянный ранг на этом многообразии. Следует заметить, что это единственная известная работа по нелинейным системам высокого индекса, в которой предположения охватывают системы с бесконечномерным многообразием решений. Для определения индекса вводится понятие *strangeness index*, который является одним из вариантов определения индекса по дифференцированию для нерегулярного случая, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x'} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x''} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x^{(r+1)}} \end{pmatrix}$$

постоянен на всем множестве решений продолженной системы, но не является полным. Если же ранг этой матрицы полный, и все

решения продолженной системы лежат на одном многообразии, то strangeness index совпадает с индексом по дифференцированию.

В диссертации при анализе используется индекс по дифференцированию.

Активно развивается теория вырожденных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в банаховых пространствах [6, 13–16, 19–27, 36, 37, 48, 49, 85, 112, 125]

$$\mathcal{A}[u'] + \mathcal{B}[u] = f, \quad \ker \mathcal{A} \neq 0. \quad (0.4)$$

Иркутскими математиками Н.А.Сидоровым, М.В. Фалалеевым и их учениками выполнен большой цикл работ по исследованию систем вида (0.4) в конечномерном и бесконечномерном случаях в предположении фредгольмовости или нетеровости оператора $\mathcal{A}$ [39, 40, 44, 45, 123].

Еще 20-25 лет назад считалось, что в приложениях встречаются лишь самые простые случаи ДАУ индекса 1 и 2 (см., например, [4]). На сегодняшний день у специалистов, работающих в области ДАУ, не возникает сомнений в том, что на практике довольно часто приходится решать системы индекса 3 и выше. Примерами могут служить системы, моделирующие различные электронные схемы, работу роботов-манипуляторов и многие другие объекты [67, 80, 101, 119].

За последние 30-35 лет теория систем ДАУ превратилась в быстро развивающуюся область современной математики. Опубликовано сотни работ, посвященные исследованиям систем ДАУ и численным методам их решения [2, 52, 64, 117]. В то время как литература по приближенным методам решения ДАУ уже трудно обозрима, проблемы изучения вопросов качественных свойств представлены фрагментарно и не носят законченного и систематического характера. Как будет видно из приведенного ниже краткого обзора, в этом смысле достаточно полно исследованы линейные системы с постоянными коэффициентами. Известные из литературы результаты для

линейных нестационарных систем или нелинейных систем ДАУ получены при довольно жёстких ограничениях: 1) постоянство рангов матриц при производной искомой функции; 2) низкий индекс системы; 3) специальная структура. В связи с этим на настоящий момент актуальной задачей теории является получение результатов по качественным свойствам систем ДАУ без описанных выше ограничений. Именно такие системы рассматриваются в диссертации.

Обзор литературы.

Различные аспекты управляемости и наблюдаемости для систем, разрешенных относительно производных,

$$x'(t) + F(t, x(t), u(t)) = 0, \quad t \in I, \quad (0.5)$$

как в линейном, так и в нелинейном случае хорошо изучены (см., в частности, [8–10, 12, 41–43]).

В теории ДАУ используются различные понятия управляемости.

Свойство полной управляемости (см. также [50, с. 121] и [111]) впервые было определено и исследовано для стационарных ДАУ в статье [140]. В книге [81] для линейных ДАУ с постоянными коэффициентами и регулярным матричным пучком вводится 3 важнейших понятия: управляемости, R -управляемости и импульсной управляемости. Полученные алгебраические критерии используются при анализе задачи минимизации квадратичного функционала на решениях линейной ДАУ с постоянными коэффициентами. В [68] получены условия R -управляемости для линейных ДАУ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

R -управляемость означает возможность перехода ДАУ из любого согласованного начального состояния в любое состояние из достижимого множества за счет выбора соответствующей достаточно гладкой вектор-функции управления. Под достижимым множеством понимается объединение по всем возможным согласованным

начальным векторам x_0 всех множеств состояний, в которые ДАУ может быть переведена из x_0 за конечный промежуток времени при соответствующем выборе управляющего воздействия.

Свойство импульсной управляемости позволяет с помощью подходящего управления менять индекс системы, в частности, преобразовать (0.1) в ДАУ индекса 1. Для стационарных ДАУ определение импульсной управляемости совпадает с понятием “управляемости на бесконечности” (см., в частности, [78, 96]). В [111] импульсная управляемость для систем с постоянными коэффициентами определяется как существование управления вида $u(t) = F_1 x(t) + \tilde{u}(t)$ (F_1 - некоторая матрица) такого, что система, замкнутая этой обратной связью, имеет регулярный пучок и индекс равный единице.

“Сильная управляемость” [65, 93] означает одновременное наличие у ДАУ свойств R -управляемости и импульсной управляемости.

В работе [92] для линейных ДАУ вида (0.2) с полиномиальными коэффициентами вводится определение “управляемости через траектории”. Не вдаваясь в детали, это понятие можно пояснить так: любые две пары (траектории) $(x_{(1)}(t), u_{(1)}(t))$ и $(x_{(2)}(t), u_{(2)}(t))$, удовлетворяющие уравнению (0.2), могут быть связаны некоторой траекторией $(x_{(3)}(t), u_{(3)}(t))$, также удовлетворяющей (0.2), таким образом, что за конечное время траектория $(x_{(1)}(t), u_{(1)}(t))$ переходит в $(x_{(2)}(t), u_{(2)}(t))$ через $(x_{(3)}(t), u_{(3)}(t))$.

В статье [60] для линейных и нелинейных управляемых ДАУ общего вида введено понятие локальной нуль-управляемости. Это понятие аналогично тому, которое определено для систем, разрешенных относительно производной искомой вектор-функции (ср., например, [9]).

Различные определения управляемости ДАУ обсуждаются также в [65, 93, 111].

В книге [81] на основе приведения системы к канонической форме Кронекера детально исследована проблема управляемости и на-

блюдаемости линейных ДАУ с постоянными коэффициентами. Различные типы управляемости и наблюдаемости линейных стационарных ДАУ (в том числе управляемость на бесконечности, импульсные управляемость и наблюдаемость) рассматривались, в частности, в [68, 78, 93, 96, 111, 140]. Некоторые вычислительные аспекты проблемы наблюдаемости представлены в [130].

В статье [51] обоснованы признаки полной управляемости линейных нестационарных ДАУ. Используемая техника приведения к виду, разрешенному относительно производной, опирающаяся на преобразование к центральной канонической форме [9], позволила исследовать системы с вещественно аналитическими коэффициентами. В [60] исследована локальная нуль-управляемость нелинейной ДАУ по первому приближению. Получены критерии полной управляемости для линейных ДАУ с гладкими коэффициентами.

В работах [120, 133] для исследования управляемых линейных ДАУ с постоянными коэффициентами применяется преобразование Лапласа, на основе чего строятся довольно обширные теории, которые в некотором смысле являются частотными аналогами управляемости и наблюдаемости.

В обзоре [115] управляемые системы ДАУ в форме

$$x'_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)), \quad 0 = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

подразделяются на два типа: системы, поведение которых определяется только управляемым входом (casual systems) и системы, зависящие также и от производных управления (non-casual systems). Для первого типа доказана применимость принципа максимума Понтрягина. То же разделение играет ведущую роль и при анализе линейно-квадратичной задачи оптимального управления со связями в виде линейной управляемой стационарной ДАУ [114]. Система преобразуется к канонической форме Кронекера, а оптимальное управление строится через решение соответствующего уравнения Риккати.

В монографии [50] обоснованы признаки полной управляемости

линейных ДАУ с вещественно аналитическими коэффициентами. Статья [60] посвящена исследованию локальной нуль-управляемости нелинейных ДАУ по первому приближению. В работах [68, 70] получены критерии R -управляемости и R -наблюдаемости для линейных систем с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами.

В работах [46, 47] исследуется управляемость линейных и полулинейных систем с операторными коэффициентами в банаховых пространствах.

Проблема стабилизации линейных ДАУ с постоянными коэффициентами привлекает внимание специалистов на протяжении последних 30-ти лет [81, 82, 104, 132, 136, 142]. В книге [81, с. 71] на основе преобразования системы к канонической форме Кронекера [11, с. 315] показано, что стационарная система $Ax'(t) + Bx(t) + Uu(t) = 0$ с регулярным матричным пучком стабилизируема тогда и только тогда, когда $\text{rank}(\lambda A + B, U) = n$ при любых комплексных числах λ : $\text{Re}(\lambda) \leq 0$. Доказано, что достаточным условием стабилизируемости системы является ее R -управляемость.

В статье [132] предложены приближенные методы построения обратных связей, решающих задачи стабилизации и регуляризации.

В ряде работ исследуется проблема робастной стабилизации линейных стационарных ДАУ (см., например, [82, 104, 136, 142]). В статье [104] доказана разрешимость задачи робастной стабилизации ДАУ с ограниченным по норме возмущением в матрице при произвольной в предположении, что возмущение не меняет ранга матрицы.

Возможности стабилизации и робастной стабилизации посредством управления вида $k_1(t)x(t) + k_2(t)x'(t)$ изучаются в работе [82]. Предполагается, что коэффициенты системы принадлежат компактным множествам из подходящих матричных пространств.

В [136] рассматривается класс линейных ДАУ с возмущенными матрицами B и U . С помощью “вспомогательной” функции система расщепляется на две подсистемы, одна из которых не зависит от

управления.

На основе обобщенных матричных уравнений Ляпунова и Риккати в работе [142] получено достаточное условие робастной устойчивости и предложен способ построения стабилизирующего управления для линейной стационарной ДАУ с нелинейным ограниченным возмущением. Подобная постановка задачи исследуется в работе [122], в которой предложен алгоритм построения нелинейного стабилизирующего управления.

Что касается линейных ДАУ с переменными коэффициентами, то автору известны работы по стабилизации и стабилизируемости систем с постоянной матрицей при производной искомой вектор-функции [91, 94, 127]. В [94, 127] получены условия робастной стабилизируемости. В упомянутых работах критерии сформулированы в виде линейных матричных неравенств.

Известны результаты по стабилизации нелинейных ДАУ в полуживой форме [106, 110] либо с постоянной матрицей при производной [137–139, 141].

В [137] на основе теории устойчивости Ляпунова исследуется проблема синтеза позиционного управления для класса нелинейных по $x(t)$ ДАУ, обеспечивающего робастную асимптотическую устойчивость системы. В статье [106] предложены алгоритмы локальной стабилизации и регуляризации с помощью нелинейной обратной связи. Локальная стабилизация положения равновесия по линейному приближению изучается в работе [110]. В [139] с использованием функций Ляпунова и дифференциальных неравенств обоснован новый принцип сравнения, который позволил получить достаточные условия практической стабилизации и управляемости. В [141] получены условия устойчивости положения равновесия и стабилизируемости нелинейной ДАУ индекса 1. Проблема стабилизации и экспоненциальной устойчивости ДАУ с дискретным и распределенным запаздыванием рассматривается в статье [138].

Работы [63, 126, 134, 135, 137] посвящены синтезу оптимальных регуляторов для линейных стационарных и нелинейных систем ДАУ в полужавной форме.

Детектируемость нестационарных систем, разрешенных относительно производной, исследовалась, в частности, в работах [9, 90, 95]. Применительно к системам ДАУ критерии детектируемости получены в монографии [81] для систем с постоянными коэффициентами и регулярным матричным пучком.

Первые попытки по изучению устойчивого поведения ДАУ были предприняты 25-30 лет назад [62, 87, 89].

К настоящему моменту устойчивость в смысле Ляпунова линейных ДАУ с постоянными коэффициентами хорошо изучена [3, 81, 86, 116, 124, 129, 131]. В частности, в книге [3] с использованием обратной матрицы Дразина получен аналог уравнения Ляпунова.

Имеются работы по устойчивости нелинейных ДАУ. В статье [115] рассматривается нелинейная система специальной структуры. В работах математиков Берлинской школы (см., например, [88, 128]) Исследуется устойчивость ДАУ индекса не выше двух с матрицей $\partial F(t, x, x')/\partial x'$ постоянного ранга. То же относится и к работам по исследованию линейных систем вида (0.2) [100].

В работе [103] получены оценки для характеристических показателей Ляпунова для линейных нестационарных ДАУ. В статье [118] исследуется асимптотическая устойчивость нелинейных ДАУ в полужавной форме индекса 1 и 2, моделирующих динамику электрической цепи. Обзор по результатам, касающимся робастной устойчивости линейных ДАУ, приведен в [83].

Методы исследования.

В качестве методов исследования в диссертации использованы результаты из теории функций нескольких вещественных переменных, качественной теории систем ОДУ в нормальной форме, в частности,

теории устойчивости, управляемости и наблюдаемости, а также аппарат обобщенных обратных матриц.

Один из подходов к исследованию разрешимости и качественных свойств ДАУ основан на предварительном преобразовании системы к виду, позволяющему судить о структуре общего решения.

Для исследования линейных ДАУ в работе [69] впервые было введено понятие “сильной стандартной канонической формы”, существование которой доказано для систем с вещественно аналитическими коэффициентами. Эта структурная форма в книге [52] названа центральной канонической.

В монографии [50] для изучения вопросов приводимости введена в рассмотрение так называемая “расщепленная форма”, которая определена уже для систем с гладкими коэффициентами. В статье [70] для получения результатов о наблюдаемости ДАУ вида (0.2) используется некоторая форма, которую можно считать аналогом расщепленной. Для существования всех вышеупомянутых структурных форм не требуется постоянство ранга матрицы при производной искомой вектор-функции. Общим недостатком является отсутствие конструктивных алгоритмов построения в достаточно общих предположениях. В частности, способы преобразования ДАУ в центральную каноническую форму разработаны лишь для систем, коэффициенты которых являются постоянными либо представляют собой полиномы [11].

Подход, связанный с преобразованием ДАУ к виду, разрешенному относительно производной, представляется конструктивным [52, 64]. Но такое преобразование не является эквивалентным, вследствие чего полученная система может иметь решения, не являющиеся решениями исходной ДАУ. По этой причине проблема существования решения задачи Коши для ДАУ требует отдельного исследования.

В статье [97] предлагается алгоритм приведения линейной ДАУ с гладкими коэффициентами к некоторой эквивалентной форме. Су-

ущественным ограничением является условие: $\text{rank } A(t) = \text{const}$ на I .

Методологической основой исследования, проведенного в диссертации, послужило приведение рассматриваемой системы ДАУ (как в линейном, так и в нелинейном случае) к структурной форме с разделенными “дифференциальной” и “алгебраической” подсистемами. Эта форма называется “эквивалентной структурной формой” [59, 60].

Существование этой структурной формы доказано в условиях, близких к необходимым для регулярного поведения решений. При ее построении не используется замена переменных, вследствие чего сохраняется структура пучков матриц Якоби, описывающих систему. Нелинейные ДАУ, обладающие эквивалентной формой, допускают возможность исследования качественных свойств по линейному приближению. Кроме того, рассматриваемая ДАУ и ее структурная форма эквивалентны в смысле решений. В линейном случае метод преобразования к эквивалентной форме носит конструктивный характер, дает удобный способ нахождения многообразия решений и автоматически решает задачу о согласовании начальных данных. Он позволяет получать конструктивные результаты в терминах входных данных и существенно общих предположениях по сравнению с отечественными и зарубежными аналогами.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении приведена постановка задачи, пояснена специфика объекта исследования, обоснована актуальность темы диссертации, приведены обзор литературы по данной тематике и краткое содержание работы, сформулированы основные результаты и обоснована их новизна.

В первом и втором разделах первой главы содержатся вспомогательные сведения, касающиеся построения и некоторых свойств эквивалентной структурной формы для линейных и нелинейных систем ДАУ, сформулированы теоремы существования. Эти результаты послужили основой для анализа, проведенного в других разделах диссертации.

В третьем разделе первой главы построена эквивалентная структурная форма для сопряженной линейной системы ДАУ, получены условия согласования начальных данных и доказана теорема о разрешимости такой системы ДАУ. Получены условия, при которых оператор замены переменной, преобразующий сопряженную ДАУ к эквивалентной форме, имеет правый обратный.

Во второй главе исследуются качественные свойства линейных нестационарных систем ДАУ. В первом разделе получены достаточные и необходимые и достаточные условия R -управляемости (управляемости в пределах достижимого множества) и R -наблюдаемости для системы (0.2). Доказаны теоремы дуальности, устанавливающие связь между этими свойствами.

Второй раздел посвящен стабилизируемости ДАУ с векторным управлением. Обоснованы достаточные условия стабилизируемости и предложен алгоритм синтеза стабилизирующего управления.

В третьем разделе первой главы получены условия детектируемости для нестационарных ДАУ индекса 1.

В четвертом и пятом разделах представлены критерии приводимости и правильности систем вида (0.2), доказаны теоремы о связи этих свойств. Результаты пятого раздела используются в третьей главе для получения условий устойчивости нелинейных ДАУ.

Третья глава посвящена исследованию нелинейных ДАУ вида (0.1) по первому приближению.

В первом разделе исследуется локальная R -управляемость в ноль. Под локальной R -управляемостью в ноль подразумевается возмож-

ность перехода ДАУ (0.1) из любого согласованного начального состояния в ноль за счет соответствующего выбора гладкого управления. В условиях локальной теоремы существования доказано, что, если система первого приближения R -управляема или локально R -управляема в ноль, то ДАУ (0.1) является локально R -управляемой в ноль.

Во втором разделе получены условия локальной R -наблюдаемости ДАУ (0.1).

В третьем и четвертом разделах построена глобальная эквивалентная структурная форма для нелинейных ДАУ, доказана глобальная теорема существования решения задачи Коши. На основе этих результатов доказаны теоремы о стабилизируемости (в случае скалярного управления) и устойчивости нулевого положения равновесия нелинейной системы по первому приближению.

В заключении основные результаты работы обсуждаются с точки зрения перспективы дальнейших исследований.

Список использованной литературы включает в себя 142 ссылки и составлен в алфавитном порядке.

Научная новизна.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и доказаны в наиболее общих предположениях. Критерии R -управляемости, R -наблюдаемости, приводимости, правильности, устойчивости, стабилизируемости и детектируемости получены для таких классов линейных и нелинейных ДАУ, для которых неприменимы другие методики исследования. Допускается произвольно высокий индекс неразрешенности, переменный ранг матриц Якоби $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial x'$, сняты ограничения на ядра этих матриц и структуру системы как в линейном, так и в нелинейном случае.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные результаты по качественным свойствам охватывают широкие классы линейных и нелинейных систем ДАУ, у которых семейство решений не имеет особых точек. Результаты диссертации являются конструктивными, сформулированы в терминах входных данных и в предположениях близких к необходимым для регулярного поведения решений.

Материалы диссертации могут быть использованы при разработке спецкурсов для студентов математиков, а также при написании курсовых и дипломных работ, магистерских диссертаций.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проекта по программе СО РАН “Качественный и численный анализ гетерогенных систем” (№ гос. регистрации 01201351945)), программе СО РАН “Качественный анализ эволюционных уравнений и систем управления” (№ гос. регистрации 01201001351), Интеграционного проекта СО РАН № 85, Междисциплинарного интеграционного проекта № 107, программы Президиума РАН (проект № 17.1), программы ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (проект № 2012-1.2.1-12-000-1001-011), а также грантов РФФИ (проекты № 10-01-00132 и № 13-01-00287).

Результаты, выносимые на защиту.

1. Построена эквивалентная форма, получены условия согласования начальных данных и доказана теорема о разрешимости для сопряженной линейной системы ДАУ.

2. Для линейных ДАУ с векторным управлением получены условия стабилизируемости, для систем индекса 1 условия детектируемости. Обоснованы достаточные и необходимые и достаточные условия R -управляемости и R -наблюдаемости, доказаны теоремы о связи этих свойств. Получены критерии приводимости и правильности.

3. Для нелинейных систем получены условия локальной R -управляемости в ноль, локальной R -наблюдаемости, достаточные условия стабилизируемости и устойчивости по первому линейному приближению.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались на Российско-монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению, Иркутск, Россия – оз. Ханх, Монголия, 2011; X Международной Четаевской конференции “Аналитическая механика, устойчивость и управление”, Казань, 2012; III Международной школе-семинаре “Нелинейный анализ и экстремальные задачи”, Иркутск, 2012; II Российско-монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению, Иркутск, Россия - оз. Ханх, Монголия, 2013, а также на ежегодных конференциях “Ляпуновские чтения”, Иркутск, 2010-2013. Результаты диссертации обсуждались на семинаре в Интстуте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; на семинаре в Институте математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск, Россия, а также неоднократно на семинарах Института динамики систем и теории управления СО РАН.

Публикации и личный вклад автора.

По теме диссертации опубликовано 11 работ [28–35, 55, 56, 121], в том числе 5 статей [28, 31, 55, 56, 121] в журналах, рекомендованных ВАК РФ. Журналы, в которых опубликованы работы [56, 121], реферируются в международной базе цитирования SCOPUS. В совместных статьях [55, 56, 121] научному руководителю А.А. Щегловой принадлежат постановки задач и идеи некоторых доказательств.

В диссертации результаты научного руководителя, касающиеся разрешимости и построения эквивалентных структурных форм, приведены в первом и втором разделах первой главы с соответствующими ссылками. Все результаты, представленные во второй и третьей главах а также в третьем разделе первой главы, принадлежат автору диссертации.

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Глава 1

Эквивалентная структурная форма

1.1 Эквивалентная форма для линейных ДАУ

Рассмотрим ДАУ

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in I = [0, +\infty), \quad (1.1.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (1.1.2)$$

где $A(t), B(t)$ — заданные $(n \times n)$ -матрицы, $U(t)$ и $C(t)$ — заданные матрицы размеров $n \times l$ и $m \times n$ соответственно, $u(t)$ — l -мерная вектор-функция управления, $y(t)$ — m -мерный наблюдаемый выход, $x(t)$ — искомая n -мерная вектор-функция. Предполагается, что $\det A(t) \equiv 0$ на I .

В этом разделе приведены вспомогательные сведения, касающиеся построения и свойств эквивалентной формы для систем (1.1.1). В последующих разделах эта структурная форма используется при получении основных результатов.

Поставим в соответствие матричным коэффициентам ДАУ (1.1.1) следующие объекты: $(nr \times nr)$ -матрицу

$$D_{r,z}(t) = \begin{pmatrix} C_1^1 A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)} + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$D_{r,y}(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 A(t) & O \\ C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t) & \\ \vdots & \\ C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t) & D_{r,z}(t) \end{pmatrix},$$

$$D_{r,x}(t) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} B(t) \\ B'(t) \\ \vdots \\ B^{(r)}(t) \end{pmatrix} & D_{r,y}(t) \end{pmatrix},$$

имеющие соответственно размеры $n(r+1) \times n(r+1)$ и $n(r+1) \times n(r+2)$. Здесь и далее $C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Предположим, что элементы матриц $A(t), B(t), U(t)$ — достаточное число раз непрерывно дифференцируемые на I функции. Кроме того, допустим, что для некоторого $r : 0 \leq r \leq n$ выполняется условие $\text{rank } D_{r,z}(t) = \rho = \text{const} \quad \forall t \in I$, и в матрице $D_{r,x}(t)$ имеется неособенный $\forall t \in I$ минор $n(r+1)$ -ого порядка, включающий в себя ρ столбцов матрицы $D_{r,z}(t)$ и n первых столбцов матрицы $D_{r,y}(t)$. Обозначим $d = nr - \rho$.

Определение 1.1. Неособенный $\forall t \in I$ минор порядка $n(r+1)$ матрицы $D_{r,x}(t)$, включающий в себя ρ столбцов матрицы $D_{r,z}(t)$ и n первых столбцов матрицы $D_{r,y}(t)$, будем называть *разрешающим минором*.

Допустим, что известно, какие именно столбцы матрицы $D_{r,x}(t)$ входят в разрешающий минор. Вычеркнем $n - d$ столбцов матрицы

$$\begin{aligned} \bar{B}(t) &= \text{colon} \left(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t) \right)^1 = \\ &= \left(B(t)^\top \quad (B'(t))^\top \quad \dots \quad (B^{(r)}(t))^\top \right)^\top{}^2, \end{aligned}$$

¹ $\text{colon}(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_1^\top \quad c_2^\top \quad \dots \quad c_n^\top)^\top$.

²символ $\top$ означает операцию транспонирования.

которые не входят в упомянутый минор. После соответствующей перестановки столбцов из $D_{r,x}(t)$ получим матрицу

$$\Lambda_r(t) = D_{r,x}(t) \text{diag} \left(Q_1^{-1} \begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix}, Q_1^{-1}, \dots, Q_1^{-1} \right). \quad (1.1.3)$$

Запись $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ обозначает квазидиагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы — нулевые, E_d — единичная матрица порядка d , Q_1 — $(n \times n)$ -матрица перестановок.³

Матрица Q_1^{-1} строится следующим образом. Обозначим $i_1, i_2, \dots, i_d$ и $i_{d+1}, i_{d+2}, \dots, i_n$ номера столбцов матрицы $\bar{B}(t)$, которые соответственно входят и не входят в разрешающий минор. Будучи умноженной на $\bar{B}(t)$ слева, матрица Q_1^{-1} переставляет в матрице $\bar{B}(t)$ каждый (i_{d+k}) -ый столбец ($k = \overline{1, n-d}$) на k -ое место, а каждый (i_j) -ый столбец ($j = \overline{1, d}$) на место с номером $n-d+j$. Матрица Q_1^{-1} обратима и состоит из нулей и n единиц, причем единицы равны элементам с индексами (i_{d+k}, k) и $(i_j, n-d+j)$.

Лемма 1.1. Пусть:

- 1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^r(I)$;
- 2) $\text{rank } D_{r,z}(t) = \rho = \text{const } \forall t \in I$;
- 3) в матрице $D_{r,x}(t)$ имеется разрешающий минор.

Тогда существует оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t) \frac{d}{dt} + \dots + R_r(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^r \quad (1.1.4)$$

с непрерывными на I коэффициентами $R_j(t)$ ($j = \overline{0, r}$), обладающий свойством: для любой n -мерной вектор-функции $\xi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$

$$\mathcal{R}[A(t)\xi'(t) + B(t)\xi(t)] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q_1 \xi'(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} Q_1 \xi(t). \quad (1.1.5)$$

³О матрицах перестановок строк и столбцов см. в книге [11, с. 127, 128].

При этом матрицы $R_j(t)$ в соответствии с разрешающим минором определяются единственным образом по формуле

$$(R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) = (E_n \ O \ \dots \ O) \Lambda_r^\top(t) (\Lambda_r(t) \Lambda_r^\top(t))^{-1}. \quad (1.1.6)$$

Другими словами, если $U(t), u(t) \in \mathbf{C}^r(I)$, то действие оператора $\mathcal{R}$ преобразует систему (1.1.1) к виду

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r L_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \quad (1.1.7)$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r G_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \quad (1.1.8)$$

где

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q_1 x(t), \quad (1.1.9)$$

вектор-функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют размерности $n - d$ и d соответственно;

$$\begin{pmatrix} L_0(t) & L_1(t) & \dots & L_r(t) \\ G_0(t) & G_1(t) & \dots & G_r(t) \end{pmatrix} = (R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) U_r(t), \quad (1.1.10)$$

$$U_r(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 U(t) & O & \dots & O \\ C_1^0 U'(t) & C_1^1 U(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^0 U^{(r)}(t) & C_r^1 U^{(r-1)}(t) & \dots & C_r^r U(t) \end{pmatrix}, \quad (1.1.11)$$

$$\begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} = (R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) \times \\ \times \text{colon} \left(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t) \right) Q_1^{-1}. \quad (1.1.12)$$

Определение 1.2. *Решением системы (1.1.1) называется n -мерная вектор-функция $x(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, обращающая при подстановке уравнение (1.1.1) в тождество на I .*

Теорема 1.1. *Пусть:*

- 1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$;
- 2) $\text{rank } D_{r,z}(t) = \rho = \text{const } \forall t \in I$;
- 3) в матрице $D_{r,x}(t)$ имеется разрешающий минор;
- 4) $\text{rank } D_{r+1,y}(t) = \text{rank } D_{r,y}(t) + n \forall t \in I$.

Тогда любое решение системы (1.1.1) будет решением системы (1.1.7), (1.1.8) и наоборот.

Определение 1.3. Систему (1.1.7), (1.1.8) будем называть эквивалентной формой для ДАУ (1.1.1).

Зададим начальные условия

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.1.13)$$

Теорема 1.1 позволяет получить критерий существования и единственности решения задачи (1.1.1), (1.1.13).

Следствие 1.1. *Пусть выполнены все предположения теоремы 1.1. Для того чтобы задача (1.1.1), (1.1.13) имела решение, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$x_{2,0} + J_2(t_0)x_{1,0} + \sum_{j=0}^r G_j(t_0)u^{(j)}(t_0) = 0, \quad (1.1.14)$$

где $\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = Q_1 x_0$. При этом, если решение задачи (1.1.1), (1.1.13) существует, то оно единственно.

Определение 1.4. Начальные данные (1.1.13), удовлетворяющие условию (1.1.14), будем называть согласованными с системой (1.1.1).

В следующей лемме утверждается, что оператор $\mathcal{R}$ вида (1.1.4) имеет левый обратный оператор.

Лемма 1.2. Пусть:

- 1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$;
- 2) выполнены предположения 2)–4) теоремы 1.1.

Тогда существует оператор $\mathcal{M} = M_0(t) + M_1(t) \frac{d}{dt}$ такой, что

$$\mathcal{M}[R_0(t)\delta(t) + R_1(t)\delta'(t) + \dots + R_r(t)\delta^{(r)}(t)] = \delta(t) \quad \forall \delta(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I), \quad (1.1.15)$$

где $M_0(t), M_1(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ — $(n \times n)$ -матрицы.

Обозначим через $\Lambda_{r-1}(t)$ матрицу, полученную из $\Lambda_r(t)$ (см. (1.1.4)) вычеркиванием последних n строк:

$$\Lambda_{r-1}(t) = (E_{nr} \ O)\Lambda_r(t),$$

а через $\Theta_{r-1}(t)$ — матрицу, полученную из $\Lambda_{r-1}(t)$ вычеркиванием первых n столбцов:

$$\Theta_{r-1}(t) = \Lambda_{r-1}(t) \begin{pmatrix} O \\ E_{nr+d} \end{pmatrix}.$$

В условиях леммы 1.1 при дополнительных предположениях порядок оператора (1.1.4) может быть на единицу меньше.

Теорема 1.2. Пусть:

- 1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{2r}(I)$;
- 2) $\text{rank } D_{r,z}(t) = \rho = \text{const } \forall t \in I$;
- 3) в матрице $D_{r,x}(t)$ имеется разрешающий минор;
- 4) $\text{rank } \Theta_{r-1}(t) = n(r-1) \quad \forall t \in I$.

Тогда существует оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t) \frac{d}{dt} + \dots + R_{r-1}(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^{r-1} \quad (1.1.16)$$

с непрерывными на I коэффициентами $R_j(t) \quad (j = \overline{0, r-1})$, обладающий свойством: для любой n -мерной вектор-функции $\xi(t) \in$

$\mathbf{C}^r(I)$

$$\mathcal{R}[A(t)\xi'(t) + B(t)\xi(t)] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q_1 \xi'(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} Q_1 \xi(t).$$

При этом матрицы $R_j(t)$ в соответствии с разрешающим минором определяются единственным образом по формуле

$$(R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_{r-1}(t)) = (E_n \ O \ \dots \ O) \times \\ \times \Lambda_{r-1}^\top(t) (\Lambda_{r-1}(t) \Lambda_{r-1}^\top(t))^{-1}. \quad (1.1.17)$$

Кроме того, существует оператор

$$\mathcal{M} = M_0(t) + M_1(t) \frac{d}{dt} \quad (1.1.18)$$

такой, что

$$\mathcal{M}[R_0(t)\delta(t) + R_1(t)\delta'(t) + \dots + R_{r-1}(t)\delta^{(r-1)}(t)] = \delta(t) \quad \forall \delta(t) \in \mathbf{C}^r(I),$$

где $M_0(t), M_1(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ — $(n \times n)$ -матрицы.

Все результаты этого раздела получены в работе [59].

1.2 Эквивалентная форма для нелинейных ДАУ

Рассмотрим ДАУ

$$F(t, x(t), x'(t), u(t)) = 0, \quad t \in I = (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon), \quad (1.2.1)$$

где n -мерная вектор-функция $F(t, x, y, u)$ определена в области

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y, u) : t \in I; \|x\|, \|y\|, \|u\| < K_0\} \subset \mathbf{R}^{2n+l+1};$$

$x(t)$ — искомая n -мерная вектор-функция; $u(t)$ — l -мерная функция управления; K_0, ε — положительные константы. Здесь и далее использованы обозначения: $\|*\|$ — одна из норм в евклидовом

пространстве; $\phi'(t) = \frac{d}{dt}\phi(t)$, $\phi^{(i)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^i \phi(t) \quad \forall \phi(t) \in \mathbf{C}^i(I)$. Предполагается, что $F(t, x, y, u)$ имеет в $\mathcal{D}$ достаточное число непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов и $\det \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial y} \equiv 0$ в $\mathcal{D}$. Анализ проводится при допущении, что функция F обладает свойством

$$F(t, 0, 0, 0) = 0 \quad \forall t \in I. \quad (1.2.2)$$

Определение 1.5 Система конечных уравнений

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_r(t, x, y, z_1, \dots, z_r, u, v_1, \dots, v_r) = \\ & = \begin{pmatrix} F(t, x, y, u) \\ F_1(t, x, y, z_1, u, v_1) \\ \dots \\ F_r(t, x, y, z_1, \dots, z_r, u, v_1, \dots, v_r) \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

в которой $x, y, z_j \in \mathbf{R}^n$; $u, v_j \in \mathbf{R}^l$, а функции $F_j(t, x, y, z_1, \dots, z_j, u, v_1, \dots, v_j)$ ($j = \overline{1, r}$) обладают свойством: для любых двух вектор-функций $\phi(t) \in \mathbf{C}^{j+1}(I)$, $\psi(t) \in \mathbf{C}^j(I)$ (n и l -мерной соответственно) таких, что $(t, \phi(t), \phi'(t), \psi(t)) \in \mathcal{D} \quad \forall t \in I$,

$$\begin{aligned} & F_j(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \dots, \phi^{(j+1)}(t), \psi(t), \dots, \psi^{(j)}(t)) = \\ & = \left(\frac{d}{dt}\right)^j F(t, \phi(t), \phi'(t), \psi(t)), \end{aligned}$$

называется *r-продолженной системой* по отношению к ДАУ (1.2.1).

Поставим в соответствие функции $F(t, x, y, u)$ следующие матрицы размеров $n(r+1) \times nr$, $n(r+1) \times n(r+1)$ и $n(r+1) \times n(r+2)$ соответственно:

$$\begin{aligned} \Gamma_{r,z} &= \Gamma_{r,z}(t, x, y, z_1, \dots, z_r, u, v_1, \dots, v_r) = (\partial \mathcal{F}_r / \partial z_1 \quad \dots \quad \partial \mathcal{F}_r / \partial z_r), \\ \Gamma_{r,y} &= (\partial \mathcal{F}_r / \partial y \quad \Gamma_{r,z}), \quad \Gamma_{r,x} = (\partial \mathcal{F}_r / \partial x \quad \Gamma_{r,y}). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

В соответствии с предположением (1.2.2) точка $t = a_0$, $x = y = z_j = 0$, $u = v_j = 0$ ($j = \overline{1, r}$) удовлетворяет продолженной системе (1.2.3). Обозначим эту точку $\alpha_r = (a_0, 0, \dots, 0)$.

Тогда $\mathcal{F}_r(\alpha_r) = 0$. Если при этом $\text{rank } \Gamma_{r,x}(\alpha_r) = n(r+1)$, то для системы (1.2.3) выполняются все условия теоремы о неявной функции [54, с. 66], согласно которой из (1.2.3) можно выразить $n(r+1)$ компонент вектора $\text{colon}(x, y, z_1, \dots, z_r)$ (обозначим их буквой ξ) как функции переменных $t, u, v_1, \dots, v_r$ и остальных n компонент этого вектора (будем обозначать их η):

$$\xi = \xi(t, \eta, u, v_1, \dots, v_r), \quad (t, \eta, u, v_1, \dots, v_r) \in \mathcal{W}, \quad (1.2.5)$$

где $\mathcal{W} = I_0 \times \tilde{\mathcal{W}}$; $I_0 = (a_0 - \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0) \subseteq I$, $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$; $\tilde{\mathcal{W}} \subset \mathbf{R}^{n+l(r+1)}$ — окрестность точки $\eta = 0, u = v_1 = \dots = v_r = 0$;

$$\text{colon}(\xi, \eta) = Q \text{colon}(x, y, z_1, \dots, z_r),$$

$\xi \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$, $\eta \in \mathbf{R}^n$, Q — матрица перестановок строк.

Поскольку матрица $\Gamma_{r,x}$ имеет размеры $n(r+1) \times n(r+2)$, то в общем случае неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$, в соответствии с которым определяются функции (1.2.5), неединственен. Будем искать этот минор следующим образом. В матрице $\Gamma_{r,y}(\alpha_r)$ выберем $\varrho = \text{rank } \Gamma_{r,y}(\alpha_r)$ ($\varrho \leq n(r+1)$) линейно независимых столбцов, в состав которых должно войти максимально возможное число первых n столбцов этой матрицы. Дополним эти столбцы $n(r+1) - \varrho$ линейно независимыми столбцами вычисленной в точке α_r матрицы $\partial \mathcal{F}_r / \partial x$, которая представляет собой первые n столбцов матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$. Полученные $n(r+1)$ линейно независимых столбцов составят искомый минор. При этом $\varrho \geq nr$.

Определение 1.6. Описанный выше неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$ назовем *разрешающим*.

Далее функции (1.2.5) будем считать соответствующими разрешающему минору.

Обозначим $\bar{\Gamma}_{r,z}(t, \eta, u, v_1, \dots, v_r)$ матрицу, получающуюся при подстановке функций (1.2.5) в $\Gamma_{r,z}(t, x, y, z_1, \dots, z_r, u, v_1, \dots, v_r)$.

Пусть $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})^4$. Кроме того выполнены условия:

- А) $\mathcal{F}_{r+1}(\alpha_{r+1}) = 0$, $\text{rank } \Gamma_{r,x}(\alpha_r) = n(r+1)$;
- В) $\text{rank } \bar{\Gamma}_{r,z}(t, \eta, u, v_1, \dots, v_r) = \rho = \text{const}$ всюду в области $\mathcal{W}$;
- С) разрешающий минор матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$ включает в себя ρ столбцов матрицы $\Gamma_{r,z}(\alpha_r)$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_{r,y}(\alpha_r)$.

Определение 1.7. Наименьшее целое r , при котором выполнены условия А), В), С) будем называть *индексом ДАУ* (1.2.1).

Определение 1.8. Вектор-функцию $u(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^l$ будем называть *допустимым управлением* для ДАУ (1.2.1), если $u(t) \in \mathbf{C}^r(I)$ и $\forall t \in I$ $(u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)) \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ — некоторая окрестность нуля в пространстве $\mathbf{R}^{l(r+1)}$.

Определение 1.9. Пусть $u_*(t)$ — допустимое управление для ДАУ (1.2.1). *Решением* системы $F(t, x(t), x'(t), u_*(t)) = 0$, $t \in I$, называется n -мерная вектор-функция $x_*(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, обращающая это уравнение в тождество на I при подстановке.

Лемма 1.3. Пусть:

- 1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})$;
- 2) $\mathcal{F}_r(\alpha_r) = 0$, $\text{rank } \Gamma_{r,x}(\alpha_r) = n(r+1)$;
- 3) выполнены условия В), С).

Тогда в некоторой окрестности точки α_r система (1.2.3) эквивалентна системе

$$y - f(t, x_1, u, v_1, \dots, v_r) = 0,$$

$$x_2 - f_0(t, x_1, u, v_1, \dots, v_r) = 0,$$

$$Z_1 - \phi(t, x_1, Z_2, u, v_1, \dots, v_r),$$

где функции f, f_0, ϕ определены и имеют в области $\mathcal{W}$ непрерывные

⁴Запись $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})$ означает, что функция F имеет в области $\mathcal{D}$ непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов до порядка $r+1$ включительно.

частные производные по каждому из своих аргументов;

$$\text{colon}(x_1(t), x_2(t)) = Q_1 x(t), \quad \text{colon}(Z_1, Z_2) = Q_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix};$$

$x_1 \in \mathbf{R}^{n-d}, x_2 \in \mathbf{R}^d$; Q_1, Q_2 - матрицы перестановок строк.

Из леммы 1.3 следует, что ДАУ (1.2.1) будет эквивалентна в смысле решений системе

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)), \quad (1.2.6)$$

$$x_2(t) = f_0(t, x_1(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)), \quad t \in I_0, \quad (1.2.7)$$

где функция f_1 определяется как часть компонент функции f

$$f_1 = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q_1 f(t, x_1(t), u(t), v_1, \dots, v_r).$$

Зафиксируем точку $t_0 \in I_0$ и зададим для ДАУ (1.2.6), (1.2.7) начальные условия

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, \quad x_2(t_0) = x_{2,0}. \quad (1.2.8)$$

Предположим, что существуют векторы $u_0, v_{1,0}, \dots, v_{r,0} \in \mathbf{R}^l$ такие, что выполняется равенство

$$x_{2,0} = f_0(t_0, x_{1,0}, u_0, v_{1,0}, \dots, v_{r,0}). \quad (1.2.9)$$

Тогда управление $u_*(t)$, удовлетворяющее ограничениям

$$u(t_0) = u_0, \quad u^{(j)}(t_0) = v_{j,0}, \quad j = \overline{1, r}, \quad (1.2.10)$$

можно, в частности, искать в виде $u_*(t) = \sum_{i=0}^r b_i(t - t_0)^i$. Легко проверить, что коэффициенты $b_i \in \mathbf{R}^l$ найдутся единственным образом: $b_0 = u_0$, $b_j = \frac{1}{j!} v_{j,0}$. Очевидно, что при достаточно близких к нулю значениях $u_0, v_{j,0}$ это управление будет допустимым.

Если задача (1.2.6)–(1.2.8) имеет на I_0 решение $x_*(t)$, соответствующее допустимому управлению $u_*(t)$, то должно выполняться включение

$$(x_*(t), x'_*(t), u_*(t)) \in \mathcal{V} \quad \forall t \in I_0, \quad (1.2.11)$$

где $\mathcal{V} \subset \mathbf{R}^{2n+l}$ — некоторая окрестность точки $x = 0, y = 0, u = 0$. Для обеспечения этого условия векторы $x_{1,0}, x_{2,0}, u_0, v_{j,0}$ ($j = \overline{1, r}$) в (1.2.8), (1.2.10) должны быть по норме достаточно близки к нулю.

Теорема, сформулированная ниже, представляет собой достаточный критерий локальной разрешимости задачи Коши (1.1.13) для ДАУ (1.2.1) [60].

Теорема 1.3. Пусть:

- 1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{r+2}(\mathcal{D})$;
- 2) выполнены условия A), B), C);
- 3) $\text{rank } \Gamma_{r+1,y}(\alpha_{r+1}) = \text{rank } \Gamma_{r,y}(\alpha_r) + n$.

Тогда $\forall t_0 \in I_0$ найдутся $\delta > 0$ и $\tau = \tau(t_0) > 0$ такие, что для любых векторов $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $u_0, v_{j,0} \in \mathbf{R}^l$ ($j = \overline{1, r}$), удовлетворяющих связи (1.2.9) и таких, что $\|x_0\|, \|u_0\|, \|v_{j,0}\| < \delta$, на интервале $I_\tau = (t_0 - \tau, t_0 + \tau) \subseteq I_0$ определено решение $x_*(t) \in \mathbf{C}^2(I_\tau)$ задачи (1.2.6), (1.2.7), (1.1.13), где $x_0 = Q_1^{-1} \text{colon}(x_{1,0}, x_{2,0})$. При этом $x_*(t)$ является на I_τ решением задачи (1.2.1), (1.1.13). В (1.2.6), (1.2.7) и (1.2.1) $u(t) \in \mathbf{C}^r(I_\tau)$ — допустимое управление, удовлетворяющее ограничениям (1.2.10).

Следствие 1.2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1.3. Для того чтобы задача (1.2.1), (1.1.13) была разрешима в некоторой окрестности точки t_0 необходимо и достаточно выполнения равенства

$$x_2(t_0) = f_0 \left(t, x_1(t_0), u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(r)}(t_0) \right), \quad (1.2.12)$$

где $u(t)$ — допустимое управление, такое, что $(u'(t), \dots, u^{(r+1)}(t)) \in \mathcal{V}_{r+1} \quad \forall t \in I$; $\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = Q_1 x_0$. При этом, если решение задачи

(1.2.1), (1.1.13) существует, то оно единственно.

Справедливость следствия непосредственно вытекает из теоремы 1.3. Далее будем предполагать, что начальные данные (1.1.13) являются согласованными, т.е. удовлетворяют соотношению (1.2.12).

Определение 1.10. ДАУ (1.2.6), (1.2.7) будем называть *эквивалентной формой* для системы (1.2.1) в окрестности $\mathcal{A}$ точки α_r .

Пусть ДАУ (1.2.1) обладает свойством (1.2.2). Определим матрицы

$$A(t) = \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial y}(t, 0, 0, 0), \quad B(t) = \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial x}(t, 0, 0, 0),$$

$$U(t) = \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial u}(t, 0, 0, 0).$$

Тогда система (1.1.1) будет системой первого приближения для системы (1.2.1). Свойство (1.2.2) также гарантирует, что в системе (1.2.6), (1.2.7)

$$f_1(t, 0, \dots, 0) = 0, \quad f_0(t, 0, \dots, 0) = 0 \quad \forall t \in I_0.$$

Построим для ДАУ (1.2.6), (1.2.7) систему первого приближения.

$$x_1'(t) = \tilde{J}_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r \tilde{L}_j(t)u^{(j)}(t),$$

$$x_2(t) = \tilde{J}_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r \tilde{G}_j(t)u^{(j)}(t), \quad t \in I_0, \quad (1.2.13)$$

$$\text{где } \tilde{J}_1(t) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, 0, \dots, 0), \quad \tilde{J}_2(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1}(t, 0, \dots, 0),$$

$$\tilde{L}_0(t) = -\frac{\partial f_1}{\partial u}(t, 0, \dots, 0), \quad \tilde{L}_j(t) = -\frac{\partial f_1}{\partial v_j}(t, 0, \dots, 0),$$

$$\tilde{G}_0(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial u}(t, 0, \dots, 0), \quad \tilde{G}_j(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial v_j}(t, 0, \dots, 0), \quad j = \overline{1, r}.$$

Оказывается, что при некоторых предположениях системы (1.1.7), (1.1.8) и (1.2.13) будут совпадать на I_0 . Другими словами, что операции линеаризации и перехода к эквивалентной форме перестановочны.

Теорема 1.4. [60] *Пусть:*

- 1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$;
- 2) выполнены условия A, B, C ;
- 3) $\text{rank } \Gamma_{r+1,y}(\alpha_{r+1}) = \text{rank } \Gamma_{r,y}(\alpha_r) + n$;
- 4) $F(t, 0, 0, 0) = 0 \quad \forall t \in I$.

Тогда системы (1.1.7), (1.1.8) и (1.2.13) совпадают на некотором достаточно малом интервале $I_0 = (a_0 - \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0) \subseteq I$, $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$.

Теорема 1.4 утверждает, что уравнения (1.1.7), (1.1.8) являются системой первого приближения для ДАУ (1.2.6), (1.2.7). При этом для построения системы (1.1.7), (1.1.8) нет необходимости находить функции (1.2.6), (1.2.7). Для этого достаточно вычислить коэффициенты оператора (1.1.4) по формуле (1.1.6) и затем подействовать этим оператором на систему (1.1.1).

1.3 Сопряженная система

1.3.1 Эквивалентная форма

Определение 1.11. Система ДАУ

$$(A^\top(t)z(t))' - B^\top(t)z(t) + C^\top(t)\tilde{u}(t) = 0, \quad t \in I, \quad (1.3.1)$$

$$\tilde{y}(t) = U^\top(t)z(t) \quad (1.3.2)$$

называется *сопряженной* по отношению к системе (1.1.1), (1.1.2).

Найдем для ДАУ (1.3.1), (1.3.2) соответствующую эквивалентную форму, порождаемую системой (1.1.7), (1.1.8).

Теорема 1.5. *Пусть:*

- 1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^r(I)$;

2) $\text{rank } D_{r,z}(t) = \rho = \text{const } \forall t \in I$;

3) в матрице $D_{r,x}(t)$ имеется разрешающий минор.

Тогда с помощью замены переменной

$$z(t) = -R_0^\top(t)\tilde{z}(t) + \frac{d}{dt}(R_1^\top(t)\tilde{z}(t)) + \dots + (-1)^{r+1} \left(\frac{d}{dt}\right)^r (R_r^\top(t)\tilde{z}(t)) \quad (1.3.3)$$

и умножения слева на матрицу $\begin{pmatrix} -E_{n-d} & J_2^\top(t) \\ O & E_d \end{pmatrix} (Q_1^{-1})^\top$ система (1.3.1), (1.3.2) преобразуется к виду

$$z_1'(t) - J_1^\top(t)z_1(t) + C_1(t)\tilde{u}(t) = 0, \quad (1.3.4)$$

$$z_2(t) + C_2(t)\tilde{u}(t) = 0, \quad (1.3.5)$$

$$\tilde{y}(t) = U^\top(t) \left(\sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} \left(\frac{d}{dt}\right)^i (R_i^\top(t)\tilde{z}(t)) \right), \quad t \in I, \quad (1.3.6)$$

где $R_j(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ ($j = \overline{0, r}$) — коэффициенты оператора $\mathcal{R}$ из леммы 1.1, Q_1 — матрица перестановок строк из (1.1.9);

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_{n-d} & J_2^\top(t) \\ O & E_d \end{pmatrix} (Q_1^{-1})^\top C^\top(t), \quad (1.3.7)$$

$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \tilde{z}(t)$, вектор-функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ имеют размерности $n-d$ и d соответственно; матрицы $J_1(t)$, $J_2(t)$ находятся из соотношения (1.1.12).

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что для коэффициентов системы (1.1.1), (1.1.2) и коэффициентов оператора $\mathcal{R}$ справедливо тождество

$$(R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) D_{r,x}(t) \text{diag} \{Q_1^{-1}, \dots, Q_1^{-1}\} = \\ \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d & O & O & \dots & O \\ J_1(t) & O & E_{n-d} & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

транспонировав которое, получим

$$\text{diag} \{ (Q_1^{-1})^\top \dots (Q_1^{-1})^\top \} D_{r,x}^\top(t) \text{ colon } (R_0^\top(t), R_1^\top(t), \dots, R_r^\top(t)) =$$

$$\begin{pmatrix} J_2^\top(t) & J_1^\top(t) \\ E_d & O \\ O & E_{n-d} \\ O & O \\ \vdots & \vdots \\ O & O \end{pmatrix}. \quad (1.3.8)$$

В ДАУ (1.3.1), (1.3.2) осуществим замену переменной (1.3.3) и умножим уравнение (1.3.1) слева на матрицу $(Q_1^{-1})^\top$. При этом

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \mathcal{K}_r(t) \text{ colon } (\tilde{z}(t), \tilde{z}'(t), \dots, \tilde{z}^{(r+1)}(t)),$$

где

$$\mathcal{K}_r(t) = \begin{pmatrix} K_{1,0}(t) & K_{1,1}(t) & \dots & K_{1,r}(t) & O \\ K_{2,0}(t) & K_{2,1}(t) & \dots & K_{2,r}(t) & K_{2,r+1}(t) \end{pmatrix},$$

$$K_{1,j}(t) = \sum_{i=j}^r (-1)^{i+1} C_i^j (R_i^\top(t))^{(i-j)}, \quad j = \overline{0, r},$$

$$K_{2,j}(t) = \sum_{i=j}^r (-1)^{i+1} C_i^j (R_i^\top(t))^{(i-j+1)}, \quad j = \overline{0, r+1}.$$

В результате этих преобразований уравнение (1.3.2) преобразуется в (1.3.6), а система (1.3.1) приобретет вид

$$(Q_1^{-1})^\top ((A^\top(t))' - B^\top(t) A^\top(t)) \mathcal{K}_r(t) \times$$

$$\times \text{colon } (\tilde{z}(t), \tilde{z}'(t), \dots, \tilde{z}^{(r+1)}(t)) + (Q_1^{-1})^\top C^\top(t) \tilde{u}(t) = 0. \quad (1.3.9)$$

Матрицу $((A^\top(t))' - B^\top(t) A^\top(t)) \mathcal{K}_r(t)$ разобьем на квадратные блоки порядка n

$$((A^\top(t))' - B^\top(t) A^\top(t)) \mathcal{K}_r(t) = (P_0(t) P_1(t) \dots P_{r+1}(t)),$$

где

$$P_j(t) = ((A^\top(t))' - B^\top(t)) K_{1,j}(t) + A^\top(t) K_{2,j}(t), \quad j = \overline{0, r},$$

$$P_{r+1}(t) = A^\top(t) K_{2,r+1}(t).$$

Поддействовав на тождество (1.3.8) оператором

$$\begin{pmatrix} C_0^0 E & -C_1^0 E \frac{d}{dt} & C_2^0 E \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & \dots & (-1)^{r+1} C_{r+1}^0 E \left(\frac{d}{dt}\right)^{r+1} \\ O & -C_1^1 E & C_2^1 E \frac{d}{dt} & \dots & (-1)^{r+1} C_{r+1}^1 E \left(\frac{d}{dt}\right)^r \\ O & O & C_2^2 E & \dots & (-1)^{r+1} C_{r+1}^2 E \left(\frac{d}{dt}\right)^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & (-1)^{r+1} C_{r+1}^{r+1} E \end{pmatrix}, \quad (1.3.10)$$

получим

$$\begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ \vdots \\ P_{r+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2^\top(t) & J_1^\top(t) \\ E_d & O \\ O & -E_{n-d} \\ O & O \\ \vdots & \vdots \\ O & O \end{pmatrix}. \quad (1.3.11)$$

Принимая во внимание представление (1.3.11), можно уточнить вид системы (1.3.9) —

$$\begin{pmatrix} -E_{n-d} & O \\ O & O \end{pmatrix} \tilde{z}'(t) + \begin{pmatrix} J_1^\top(t) & J_2^\top(t) \\ O & E_d \end{pmatrix} \tilde{z}(t) + (Q_1^{-1})^\top C^\top(t) \tilde{u}(t) = O. \quad (1.3.12)$$

Умножив (1.3.12) слева на $\begin{pmatrix} -E_{n-d} & J_2^\top(t) \\ O & E_d \end{pmatrix}$, получим искомую систему (1.3.4)–(1.3.6). $\square$

Покажем, что оператор, определяющий замену переменной (1.3.3), имеет правый обратный оператор.

Теорема 1.6. Пусть:

- 1) $A(t), B(t), C(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$;
- 2) $\text{rank } D_{r,z}(t) = \rho = \text{const } \forall t \in I$;
- 3) в матрице $D_{r,x}(t)$ имеется разрешающий минор;
- 4) $\text{rank } D_{r,y+1}(t) = \text{rank } D_{r,y}(t) + n \quad \forall t \in I$.

Тогда существует оператор $\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t) \frac{d}{dt}$ такой, что,

$$-R_0^\top(t)w(t) + (R_1^\top(t)w(t))' + \dots + (-1)^{r+1} (R_r^\top(t)w(t))^{(r)} = v(t),$$

если $w(t) = \mathcal{L}[v(t)]$. Здесь $w(t)$ и $v(t)$ — достаточно гладкие n -мерные вектор-функции; $L_0(t) = -M_0^\top(t) + (M_1^\top(t))'$, $L_1(t) = M_1^\top(t)$; $M_0(t)$ и $M_1(t)$ — матрицы из леммы 1.2.

Доказательство. Из леммы 1.2 следует, что коэффициенты операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$ связаны тождеством

$$(M_0 \ M_1) \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & \dots & R_r & O \\ R'_0 & R_0 + R'_1 & R_1 + R'_2 & \dots & R_{r-1} + R'_r & R_r \end{pmatrix} = \\ = (E_n \ O \ \dots \ O). \quad (1.3.13)$$

Транспонируя (1.3.13) и осуществляя операцию умножения в левой части равенства, получим

$$\begin{pmatrix} R_0^\top M_0^\top + (R'_0)^\top M_1^\top \\ R_1^\top M_0^\top + (R_0 + R'_1)^\top M_1^\top \\ \vdots \\ R_r^\top M_0^\top + (R_{r-1} + R'_r)^\top M_1^\top \\ R_r^\top M_1^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix}. \quad (1.3.14)$$

Результатом действия на тождество (1.3.14) оператора (1.3.10)

будет соотношение

$$\begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ \vdots \\ S_{r+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} S_0(t) &= \sum_{i=0}^r V_i(t) \left(-M_0^\top(t) + (M_1^\top(t))' \right)^{(i)}, \quad S_j(t) = V_{j-1}(t) M_1^\top(t) + \\ &+ \sum_{i=j}^r V_i(t) \left(-C_i^j (M_0^\top(t))^{(i-j)} + C_{i+1}^j (M_1^\top(t))^{(i-j+1)} \right), \quad j = \overline{1, r}, \\ &\hspace{25em} (1.3.15) \end{aligned}$$

$$S_{r+1}(t) = V_r(t) M_1^\top(t);$$

$$V_i(t) = \sum_{j=i}^r (-1)^{j+1} C_j^i (R_j^\top(t))^{(j-i)}, \quad i = \overline{0, r-1};$$

$$V_r(t) = (-1)^{r+1} C_r^r R_r^\top(t). \quad (1.3.16)$$

Положим

$$w(t) = \mathcal{L}[v(t)] = \left(-M_0^\top(t) + (M_1^\top(t))' \right) v(t) + M_1^\top(t) v'(t),$$

тогда

$$\sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} \left(\frac{d}{dt} \right)^i (R_i^\top(t) w(t)) = \mathcal{V}_r(t) \text{ colon } \left(v(t), v'(t), \dots, v^{(r+1)}(t) \right), \quad (1.3.17)$$

где

$$\mathcal{V}_r(t) = \begin{pmatrix} V_0(t) & V_1(t) & \dots & V_r(t) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} L_0 & C_1^1 M_1^\top & O & \dots & O \\ L'_0 & -C_1^1 M_0^\top + C_2^1 (M_1^\top)' & C_2^2 M_1^\top & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0^{(r)} & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & C_r^r M_1^\top \end{pmatrix}.$$

где $\alpha_1 = -C_r^1 (M_0^\top)^{(r-1)} + C_{r+1}^1 (M_1^\top)^{(r)}$, $\alpha_2 = -C_r^2 (M_0^\top)^{(r-2)} + C_{r+1}^2 (M_1^\top)^{(r-1)}$.

Принимая во внимание представления (1.3.15) для матриц $S_0(t), S_1(t), \dots, S_{r+1}(t)$, несложно проверить, что в (1.3.17)

$$\mathcal{V}_r(t) = (S_0(t) \ S_1(t) \ \dots \ S_{r+1}(t)) = (E_n \ O \ \dots \ O).$$

Теорема доказана. $\square$

Определение 1.12. Будем называть систему (1.3.4), (1.3.5) *эквивалентной формой* для сопряженной ДАУ (1.3.1).

Пример 1.1. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix} t & -t^2 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}. \quad (1.3.18)$$

Нетрудно проверить, что все предположения теоремы 1.1 выполнены при $r = 2$ и оператор

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \ t & 1/2 \ t^2 \\ -1/2 & 1/2 \ t \end{pmatrix} \frac{d}{dt}$$

преобразует эту систему в эквивалентную форму

$$x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + \frac{1}{2} (t^2 f'_2(t) - t f'_1(t)) \\ f_2(t) + \frac{1}{2} (t f'_2(t) - f'_1(t)) \end{pmatrix}.$$

Построим систему сопряженную к системе (1.3.18)

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ -t^2 & -t \end{pmatrix} z'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2t & -2 \end{pmatrix} z(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}. \quad (1.3.19)$$

В соответствии с теоремой 1.5 в результате замены переменной

$$\begin{aligned} z(t) &= -R_0^\top(t)\tilde{z}(t) + \frac{d}{dt}(R_1^\top(t)\tilde{z}(t)) = \\ &= \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ t & -1/2 \end{pmatrix} \tilde{z}(t) + \begin{pmatrix} -1/2 t & -1/2 \\ -1/2 t^2 & 1/2 t \end{pmatrix} \tilde{z}'(t), \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

система (1.3.19) переходит в соответствующую эквивалентную форму (1.3.4), (1.3.5), которая в данном случае имеет вид

$$\tilde{z}(t) = \text{colon}(g_1(t), g_2(t)). \quad (1.3.21)$$

Подставив (1.3.21) в (1.3.20), получим

$$z(t) = \begin{pmatrix} -3/2 g_1(t) - 1/2 t g_1'(t) - 1/2 g_2'(t) \\ 1/2 t g_2'(t) + 1/2 t^2 g_1'(t) - 1/2 g_2(t) + t g_1(t) \end{pmatrix}. \quad (1.3.22)$$

Легко проверить, что функция (1.3.22) обращает в тождество систему (1.3.19) и представляет собой ее единственное решение.

1.3.2 Разрешимость

В общем случае может оказаться, что рассматриваемая система ДАУ неразрешима, если же решение существует, то оно может зависеть от произвольных функций.

Известно, что в случае регулярного матричного пучка $\lambda A + B$ [3, с. 313] стационарная система ДАУ $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ разрешима при достаточно гладкой правой части, и ее решение определяется единственным образом согласованными начальными данными вида (1.1.13). Кроме того, разрешимость стационарной системы влечет за собой разрешимость систем вида $A^\top x'(t) + B^\top x(t) = g(t)$ и $A^\top x'(t) - B^\top x(t) = g(t)$, $g(t) \in \mathbf{C}^r(I)$ (r — индекс ДАУ).

Обратимся к сопряженной системе (1.3.1). Выясним, при каких ограничениях на начальные данные

$$z(t_0) = z_0 \quad (1.3.23)$$

($z_0 \in \mathbf{R}^n$ — заданный вектор), будет существовать решение задачи Коши (1.3.1), (1.3.23).

Предположим, что имеют место все предположения теоремы 1.1. В этом случае для систем (1.1.1) и (1.3.1) на отрезке I определены соответствующие эквивалентные формы (1.1.7), (1.1.8) и (1.3.4), (1.3.5).

Обозначим $\Omega(t)$ матрицант системы (1.1.7). Обратимая $\forall t \in I$ ($n \times n$)-матрица $\Omega(t)$ является решением задачи Коши

$$\Omega'(t) + J_1(t)\Omega(t) = O, \quad t \in I; \quad \Omega(t_0) = E_{n-d}.$$

Тогда матрица $(\Omega^\top(t))^{-1}$ будет матрицантом системы (1.3.4).

Очевидно, что в сделанных предположениях любое решение ДАУ (1.3.4), (1.3.5) может быть представлено в виде

$$z_1(t) = (\Omega^\top(t))^{-1}z_1(t_0) + (\Omega^\top(t))^{-1} \int_{t_0}^t \Omega^\top(\tau)C_1(\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau, \quad (1.3.24)$$

$$z_2(t) = -C_2(t)\tilde{u}(t). \quad (1.3.25)$$

Предположение 1) теоремы 1.1 гарантирует, что коэффициенты оператора (1.1.4) удовлетворяют включению $R_j(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$ ($j = \overline{0, r}$). По этой причине в системе (1.3.4), (1.3.5) $J_1(t), C_1(t), C_2(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$. Следовательно, любое решение ДАУ (1.3.4), (1.3.5) $\tilde{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ будет $r+1$ раз непрерывно дифференцируемо на отрезке I .

Решение $z(t)$ системы (1.3.1) связано с решением ДАУ (1.3.4), (1.3.5) соотношением (1.3.3), из которого сразу вытекает, что $z(t) \in \mathbf{C}^1(I)$.

Зададим начальные условия для системы (1.3.4), (1.3.5)

$$\tilde{z}(t_0) = \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ z_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,0} \\ z_{2,0} \end{pmatrix}, \quad (1.3.26)$$

$$z_{1,0} \in \mathbf{R}^{n-d}, \quad z_{2,0} \in \mathbf{R}^d.$$

В силу представления (1.3.24), (1.3.25) задача Коши (1.3.4), (1.3.5), (1.3.26) будет разрешима тогда и только тогда, когда

$$z_{2,0} = -C_2(t_0)\tilde{u}(t_0) \quad (1.3.27)$$

или с учетом представления (1.3.7) для матрицы $C_2(t)$

$$z_{2,0} = -(O \ E_d) (Q_1^{-1})^\top C^\top(t_0)\tilde{u}(t_0).$$

Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{F}$, действующий на произвольную достаточно гладкую $(n-d) \times (n-d)$ -матрицу $X(t)$ по правилу

$$\mathcal{F}[X(t)] = X'(t) + X(t)J_1^\top(t), \quad \mathcal{F}^0[X(t)] = X(t). \quad (1.3.28)$$

Из (1.3.26), (1.3.27) следует

$$\begin{aligned} \text{colon} \left(z_1(t), z_1'(t), \dots, z_1^{(r+1)}(t) \right) &= \begin{pmatrix} E_{n-d} \\ \mathcal{F}^0 [J_1^\top(t)] \\ \mathcal{F} [J_1^\top(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{F}^r [J_1^\top(t)] \end{pmatrix} z_1(t) - \\ &- \begin{pmatrix} O \\ C_1(t)\tilde{u}(t) \\ \mathcal{F}^0 [J_1^\top(t)] C_1(t)\tilde{u}(t) + \frac{d}{dt} (C_1(t)\tilde{u}(t)) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^i (\mathcal{F}^{r-i-1} [J_1^\top(t)] C_1(t)\tilde{u}(t)) + \left(\frac{d}{dt} \right)^r (C_1(t)\tilde{u}(t)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

$$\begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_2^{(r+1)}(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_2(t)\tilde{u}(t) \\ \frac{d}{dt} (C_2(t)\tilde{u}(t)) \\ \vdots \\ \left(\frac{d}{dt} \right)^{r+1} (C_2(t)\tilde{u}(t)) \end{pmatrix}. \quad (1.3.30)$$

Определим матрицу

$$W(t) = \text{colon} \left(\begin{pmatrix} E_{n-d} \\ O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{F}^0 [J_1^\top(t)] \\ O \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathcal{F}^r [J_1^\top(t)] \\ O \end{pmatrix} \right)$$

и вектор

$$w(t) = -\text{colon} (w_0(t), w_1(t), \dots, w_{r+1}(t)),$$

где

$$\begin{aligned} w_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ C_2(t)\tilde{u}(t) \end{pmatrix}, \quad w_1(t) = \begin{pmatrix} C_1(t)\tilde{u}(t) \\ \frac{d}{dt}(C_2(t)\tilde{u}(t)) \end{pmatrix}, \\ w_2(t) &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}^0 [J_1^\top(t)] C_1(t)\tilde{u}(t) + \frac{d}{dt}(C_1(t)\tilde{u}(t)) \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^2 (C_2(t)\tilde{u}(t)) \end{pmatrix}, \quad \dots, \\ w_{r+1}(t) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^i (\mathcal{F}^{r-i-1} [J_1^\top(t)] C_1(t)\tilde{u}(t)) + \left(\frac{d}{dt}\right)^r (C_1(t)\tilde{u}(t)) \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{r+1} (C_2(t)\tilde{u}(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда равенство (1.3.3) можно записать как

$$z(t) = (V_0(t) \ V_1(t) \ \dots \ V_r(t)) W(t) z_1(t) + w(t). \quad (1.3.31)$$

Таким образом, задача (1.3.1), (1.3.23) имеет решение в том и только том случае, когда

$$z_0 = (V_0(t_0) \ V_1(t_0) \ \dots \ V_r(t_0)) W(t_0) c + w(t_0), \quad (1.3.32)$$

где матрицы $V_0(t), V_1(t), \dots, V_r(t)$ вычисляются по формулам (1.3.16), c — некоторый вектор из $\mathbf{R}^{n-d}$. При этом в (1.3.26) $z_{1,0} = c$, а $z_{2,0}$ удовлетворяет равенству (1.3.27).

Тем самым мы доказали теорему.

Теорема 1.7. Пусть выполнены все предположения теоремы 1.1. Решение задачи (1.3.1), (1.3.23) существует тогда и только

тогда, когда начальные данные имеют вид (1.3.32). Это решение единственно и представимо в виде (1.3.3), где $\tilde{z}(t) = \text{colon}(z_1(t), z_2(t))$ — решение ДАУ (1.3.4), (1.3.5).

Определение 1.13. Начальные данные (1.3.23) вида (1.3.32) будем называть согласованными с ДАУ (1.3.1).

Глава 2

Линейные системы

2.1 R -управляемость и R -наблюдаемость

2.1.1 Определения

Рассмотрим невырожденную систему управления

$$x'(t) + \bar{B}(t)x(t) + \bar{U}(t)u(t) = 0, \quad (2.1.1)$$

$$y(t) = \bar{C}(t)x(t), \quad t \in I = [0, +\infty), \quad (2.1.2)$$

где матрицы $\bar{B}(t)$, $\bar{U}(t)$ и $\bar{C}(t)$ имеют размеры $n \times n$, $n \times l$ и $m \times n$ соответственно.

Определение 2.1. Система (2.1.1) называется *полностью управляемой* на отрезке I , если для любых векторов $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$ найдется управление $u(t)$ такое, что решение системы (2.1.1) будет удовлетворять условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Определение 2.2. Система (2.1.1), (2.1.2) называется *полностью наблюдаемой* на отрезке I , если по известному выходу (2.1.2) можно единственным образом восстановить значение $x(t_0)$.

Сформулируем определения R -управляемости и R -наблюдаемости для ДАУ (1.1.1) и (1.3.1), (1.3.2).

Определение 2.3. Система (1.1.1) называется *R -управляемой* на отрезке I , если для любого согласованного вектора начальных данных x_0 и любой точки x_1 из множества достижимости M найдется

управление $u(t)$ такое, что решение $x(t)$ системы будет удовлетворять условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Вектор $x_1 \in \mathbf{R}^n$ называется *достижимым в момент t_1* из вектора начальных данных $x_0 \in \mathbf{R}^n$, если существует такое достаточно гладкое управление $u(t)$, что решение задачи (1.1.1), (1.1.13) удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$.

Множество $M(x_0) \subseteq \mathbf{R}^n$ называется *множеством достижимости* из вектора начальных данных $x_0 \in \mathbf{R}^n$, если оно состоит из векторов x_1 , достижимых из точки x_0 в момент t_1 . Заметим, если начальные данные не являются согласованными, то $M(x_0) = \emptyset$.

Множество достижимости M определяется как объединение всех множеств достижимости из всех возможных согласованных начальных векторов ([81], с. 27; [111]).

Определение 2.4. Система (1.3.1), (1.3.2) называется *R -наблюдаемой* на отрезке I , если по известному выходу (1.3.2) и управлению $u(t)$ можно единственным образом восстановить решение $z(t)$ системы (1.3.1) [70].

В условиях теоремы 1.1 системы (1.1.1) и (1.1.7), (1.1.8) эквивалентны в смысле решений. Согласно определению 2.3 любая система ДАУ вида (1.1.1), в эквивалентной форме которой (1.1.7), (1.1.8) отсутствует невырожденная составляющая (1.1.7) (такую ситуацию имеем в системе (1.3.18)), всегда R -управляема. Если же подсистема (1.1.7) присутствует ($d < n$), то под R -управляемостью ДАУ (1.1.1) можно понимать полную управляемость ее дифференциальной подсистемы (1.1.7).

С другой стороны, в предположениях теоремы 1.1 решение ДАУ (1.3.1) представимо в виде (1.3.3), где функция $\tilde{z}(t) = \text{colon}(z_1(t), z_2(t))$ является решением системы (1.3.4), (1.3.5). Поэтому для того чтобы по выходу (1.3.2) восстановить решение $z(t)$ системы (1.3.1), необходимо восстановить решение системы (1.3.4), (1.3.5) по выходу (1.3.6). Из представления (1.3.24), (1.3.25) для решения системы (1.3.4), (1.3.5)

следует, что вектор-функция $z_2(t)$ определяется единственным образом из уравнения (1.3.5) по известному управлению $\tilde{u}(t)$. Для того чтобы восстановить вид компоненты $z_1(t)$ необходимо знать значение $z_1(t_0)$. Таким образом, R -наблюдаемость ДАУ (1.3.1), (1.3.2) означает полную наблюдаемость системы (1.3.4), (1.3.6).

В рамках предположений теоремы 1.1 можно дать альтернативные определения R -управляемости и R -наблюдаемости.

Определение 2.5. Система (1.1.1) называется R -управляемой на отрезке I при $d < n$, если полностью управляема на I система (1.1.7).

Определение 2.6. Система (1.3.1), (1.3.2) называется R -наблюдаемой на отрезке I при $d < n$, если полностью наблюдаема на I система (1.3.4), (1.3.6).

2.1.2 Критерии R -наблюдаемости и R -управляемости.

Для системы (2.1.1), (2.1.2) приведем известные критерии полной управляемости и полной наблюдаемости.

Теорема 2.1. [9, с. 162] Пусть $\bar{B}(t), \bar{U}(t) \in \mathbf{C}(I)$. Система (2.1.1) полностью управляема на отрезке I , если и только если на этом отрезке $q^\top \bar{X}^{-1}(t) \bar{U}(t) \neq 0$ для любого вектора $q \in \mathbf{R}^n$ единичной нормы. Здесь $\bar{X}(t)$ — матрицант системы (2.1.1).

Теорема 2.2. [9, с. 169] Пусть в системе (2.1.1) $\bar{B}(t) \in \mathbf{C}^{n-1}(I)$, $\bar{U}(t) \in \mathbf{C}^n(I)$. Система (2.1.1) полностью управляема на отрезке I , если существует такая точка $\sigma \in I$, что $\text{rank } \mathcal{Q}(\sigma) = n$, где

$$\mathcal{Q}(t) = (\mathcal{Q}_0(t) \quad \mathcal{Q}_1(t) \quad \dots \quad \mathcal{Q}_{n-1}(t)),$$

$$\mathcal{Q}_0(t) = -\bar{U}(t), \quad \mathcal{Q}_i(t) = -\bar{B}(t)\mathcal{Q}_{i-1}(t) - \mathcal{Q}'_{i-1}(t), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 2.3. [9, с. 189] Пусть $\bar{B}(t), \bar{U}(t) \in \mathbf{C}(I)$. Система (2.1.1), (2.1.2) полностью наблюдаема на отрезке I тогда и только тогда, когда $\bar{C}(t)\bar{X}(t)h \neq 0$ для любого вектора $h \in \mathbf{R}^n$ единичной нормы.

Теорема 2.4. [9, с. 192] Пусть в системе (2.1.1), (2.1.2) $\bar{B}(t) \in \mathbf{C}^{n-1}(I)$, $\bar{C}(t) \in \mathbf{C}^n(I)$. Система (2.1.1), (2.1.2) полностью наблюдаема на отрезке I , если существует такая точка $\sigma \in I$, что $\text{rank } \mathcal{P}(\sigma) = n$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= \text{colon}(\mathcal{P}_0(t), \mathcal{P}_1(t), \dots, \mathcal{P}_{n-1}(t)), \\ \mathcal{P}_0(t) &= \bar{C}(t), \quad \mathcal{P}_i(t) = -\mathcal{P}_{i-1}(t)\bar{B}(t) + \mathcal{P}'_{i-1}(t), \quad i = \overline{1, \dots, n-1}. \end{aligned}$$

Определение 2.7. Матрица $\mathcal{Q}(t)$ называется *матрицей управляемости* системы (2.1.1). Матрица $\mathcal{P}(t)$ называется *матрицей наблюдаемости* системы (2.1.1), (2.1.2).

Опираясь на теоремы 2.1–2.4, нетрудно получить критерии R-управляемости и R-наблюдаемости для систем ДАУ.

Теорема 2.5. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1. Система (1.1.1) R-управляема на отрезке I тогда и только тогда, когда

$$q^\top \Omega^{-1}(t) \mathcal{H}(t) \neq 0 \quad (2.1.3)$$

для любого вектора $q \in \mathbf{R}^{n-d}$ единичной нормы, где

$$\mathcal{H}(t) = (H_0(t) \ H_1(t) \ \dots \ H_r(t)), \quad (2.1.4)$$

матрицы $H_j(t)$ ($j = \overline{0, r}$) находятся в соответствии с формулами (1.1.10), (1.1.11), (1.1.6); $\Omega(t)$ — матрицант системы (1.1.7).

Доказательство. Необходимость доказывается также как в [9, с. 162].

Достаточность. В системе (1.1.7) сделаем замену переменной $x_1(t) = \Omega(t)\xi(t)$. В результате последующего умножения слева на $\Omega^{-1}(t)$ и интегрирования в пределах от t_0 до t_1 получим уравнение

$$\xi(t_1) - \xi(t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(\tau) \mathcal{H}(\tau) \text{colon} \left(u(\tau), u'(\tau), \dots, u^{(r)}(\tau) \right) d\tau. \quad (2.1.5)$$

Пусть имеет место соотношение (2.1.3). Нужно показать, что найдется управление $u(t)$, удовлетворяющее уравнению (2.1.5). Это будет означать полную управляемость ДАУ (1.1.7).

В (2.1.5) управление будем искать в виде полинома

$$u(t) = (t - c)^s b_0 + (t - c)^{s+1} b_1 + \dots + (t - c)^{s+r} b_r,$$

где $s \geq 0$ — достаточно большое целое число, $c \notin I$ — фиксированное значение, $b_i \in \mathbf{R}^l$ — неизвестные коэффициенты. Тогда

$$\text{colon} \left(u(\tau), u'(\tau), \dots, u^{(r)}(\tau) \right) = \mathcal{E}_s(t - c) \text{colon} (b_0, b_1, \dots, b_r), \quad (2.1.6)$$

где

$$\mathcal{E}_s(t) = \begin{pmatrix} \frac{s!}{s!} t^s E_l & \frac{(s+1)!}{(s+1)!} t^{s+1} E_l & \dots & \frac{(s+r)!}{(s+r)!} t^{s+r} E_l \\ \frac{s!}{(s-1)!} t^{s-1} E_l & \frac{(s+1)!}{s!} t^s E_l & \dots & \frac{(s+r)!}{(s+r-1)!} t^{s+r-1} E_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s!}{(s-r)!} t^{s-r} E_l & \frac{(s+1)!}{(s+1-r)!} t^{s+1-r} E_l & \dots & \frac{(s+r)!}{s!} t^s E_l \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица $\mathcal{E}_s(t - c)$ обратима $\forall t \in I$.

Предположим, что существует вектор $q_* \in \mathbf{R}^{n-d}$ единичной нормы такой, что для всех $t \in I$

$$q_*^\top \Omega^{-1}(t) \mathcal{H}(t) \mathcal{E}_s(t - c) = 0. \quad (2.1.7)$$

Умножим обе части равенства (2.1.7) на $\mathcal{E}_s^{-1}(t - c)$, получим противоречие с условием (2.1.3). Следовательно, для любого вектора $q \in \mathbf{R}^{n-d}$ единичной нормы на I выполняется соотношение $q^\top \Omega^{-1}(t) \mathcal{H}(t) \mathcal{E}_s(t - c) \neq 0$. Можно показать, что при достаточно большом s в

этом случае $q^\top \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(t) \mathcal{H}(t) \mathcal{E}_s(t - c) dt \neq 0$ для любого вектора

$q \in \mathbf{R}^{n-d}$ единичной нормы. Последнее означает полноту строчного ранга матрицы

$$\int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(t) \mathcal{H}(t) \mathcal{E}_s(t-c) dt. \quad (2.1.8)$$

Подставим (2.1.6) в (2.1.5)

$$\xi(t_1) - \xi(t_0) = - \left(\int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(\tau) \mathcal{H}(\tau) \mathcal{E}_s(\tau-c) d\tau \right) \text{colon} (b_0, b_1, \dots, b_r). \quad (2.1.9)$$

Поскольку матрица (2.1.8) имеет полный ранг по строкам, то уравнение (2.1.9) разрешимо относительно $b_0, b_1, \dots, b_r$ при любых значениях $\xi(t_1), \xi(t_0)$. Теорема доказана. $\square$

Для системы (1.1.7) определим *матрицу управляемости*

$$(\mathcal{H}_0(t) \ \mathcal{H}_1(t) \ \dots \ \mathcal{H}_{n-d-1}(t)),$$

где

$$\mathcal{H}_0(t) = \mathcal{H}(t), \quad \mathcal{H}_i(t) = -J_1(t) \mathcal{H}_{i-1}(t) - \mathcal{H}'_{i-1}(t), \quad i = \overline{1, n-d-1},$$

матрица $\mathcal{H}(t)$ находится по формуле (2.1.4).

Теорема 2.6. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1. Система (1.1.1) R -управляема на отрезке I , если существует такая точка $\sigma \in I$, что

$$\text{rank} (\mathcal{H}_0(\sigma) \ \mathcal{H}_1(\sigma) \ \dots \ \mathcal{H}_{n-d-1}(\sigma)) = n-d.$$

Справедливость теоремы вытекает из утверждения теоремы 1.1 и доказательства теоремы 2.1.

Получим критерии R -наблюдаемости для системы (1.3.1), (1.3.2). Для этого введем в рассмотрение матрицы

$$\Phi_j(t) = \sum_{i=j}^r (-1)^{i+1} C_i^{i-j} (R_i^\top(t))^{(i-j)}, \quad j = \overline{0, r},$$

и запишем равенство (1.3.6) в виде

$$\tilde{y}(t) = U^\top(t) \sum_{j=0}^r \Phi_j(t) \tilde{z}^{(j)}(t).$$

Разобьем матрицы $U^\top(t)\Phi_j(t)$ на блоки

$$U^\top(t)\Phi_j(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{j,1}(t) & \Phi_{j,2}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1.10)$$

где матрицы $\Phi_{j,1}(t)$ состоят из $n - d$ столбцов, а матрицы $\Phi_{j,2}(t)$ — из d столбцов. С учетом (2.1.10) выход (1.3.6) приобретет вид

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=0}^r \Phi_{j,1}(t) z_1^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^r \Phi_{j,2}(t) z_2^{(j)}(t). \quad (2.1.11)$$

С использованием представления (1.3.29), (1.3.30)

$$\tilde{y}(t) = (\Phi_{0,1}(t) + \Phi_{1,1}(t) \mathcal{F}^0[J_1^\top(t)] + \dots + \Phi_{r,1}(t) \mathcal{F}^{r-1}[J_1^\top(t)]) z_1(t) + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ единственным образом определяется через известное управление $\tilde{u}(t)$, коэффициенты системы и их производные.

Приведенные ниже теоремы являются следствиями теорем 1.1, 2.3 и 2.4.

Теорема 2.7. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1. Система (1.3.1), (1.3.2) R -наблюдаема на отрезке I тогда и только тогда, когда

$$(\Phi_{0,1}(t) + \Phi_{1,1}(t) \mathcal{F}^0[J_1^\top(t)] + \dots + \Phi_{r,1}(t) \mathcal{F}^{r-1}[J_1^\top(t)]) (\Omega^\top(t))^{-1} h \neq 0$$

для любого вектора $h \in \mathbf{R}^{n-d}$ единичной нормы. Здесь $\Omega(t)$ — матрицант системы (1.1.7), оператор $\mathcal{F}$ действует по правилу (1.3.28).

Теорема 2.8. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1. Система (1.3.1), (1.3.2) R -наблюдаема на отрезке I , если существует такая точка $\sigma \in I$, что

$$\text{rank } \Psi(\sigma) = n - d,$$

где $\Psi(t) = \text{colon}(\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots, \Psi_{n-d-1}(t))$,

$$\Psi_0(t) = (\Phi_{0,1}(t) + \Phi_{1,1}(t) \mathcal{F}^0[J_1^\top(t)] + \dots + \Phi_{r,1}(t) \mathcal{F}^{r-1}[J_1^\top(t)]),$$

$$\Psi_i(t) = \Psi_{i-1}(t) J_1^\top(t) + \Psi'_{i-1}(t), \quad i = \overline{1, n-d-1}.$$

Матрица $\Psi(t)$ суть матрица наблюдаемости системы (1.3.4), (1.3.6).

2.1.3 О взаимосвязи свойств R -управляемости и R -наблюдаемости

В этом разделе получены результаты о связи свойств R -управляемости и R -наблюдаемости системы (1.1.1), (1.1.2) и сопряженной системы (1.3.1), (1.3.2).

Теорема 2.9. Пусть выполнены все предположения теоремы 1.1. Система (1.1.1), (1.1.2) R -наблюдаема, если R -управляема система (1.3.1).

Доказательство. ДАУ (1.1.1), (1.1.2) R -наблюдаема тогда и только тогда, когда таким же свойством обладает система (1.1.7), (1.1.8), (1.1.2). Последняя R -наблюдаема одновременно с системой

$$\begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(t) & O \\ J_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.1.12)$$

$$y(t) = C(t) Q_1^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (2.1.13)$$

В результате замены переменной

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ -J_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1.14)$$

уравнения (2.1.12), (2.1.13) преобразуются к виду

$$\begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi'_1(t) \\ \chi'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(t) & O \\ O & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.1.15)$$

$$y = (-C_1^\top(t) \ C_2^\top(t)) \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1.16)$$

где матрицы $C_1(t)$ и $C_2(t)$ находятся по формуле (1.3.7).

Очевидно, что замена переменной (2.1.14) с невырожденной непрерывно дифференцируемой на I матрицей не нарушает свойства наблюдаемости. В соответствии с определением 2.6 по теореме 2.3 система (2.1.15), (2.1.16) R -наблюдаема тогда и только тогда, когда для любого вектора $h \in \mathbf{R}^{n-d}$ единичной нормы

$$-C_1^\top(t)\Omega(t)h \neq 0, \quad (2.1.17)$$

где $\Omega(t)$ — матрицант системы (1.1.7).

Обратимся к сопряженной системе (1.3.1). Ввиду связи (1.3.9) между решениями ДАУ (1.3.1) и (1.3.4), (1.3.5) R -управляемость системы (1.3.4), (1.3.5) влечет за собой R -управляемость ДАУ (1.3.1). В соответствии с определением 2.5 по теореме 2.1 ДАУ (1.3.4), (1.3.5) R -управляема тогда и только тогда, когда

$$q^\top \Omega^\top(t)C_1(t) \neq 0, \quad (2.1.18)$$

где $q \in \mathbf{R}^{n-d}$ — произвольный вектор единичной нормы.

Очевидно, что соотношения (2.1.17) и (2.1.18) суть одно и то же. Тем самым теорема доказана. $\square$

Непосредственно из доказательства теоремы 2.9 вытекает следствие.

Следствие 2.1. Пусть выполнены все предположения теоремы 1.1. Система (1.1.1), (1.1.2) R -наблюдаема тогда и только тогда, когда полностью управляема система (1.3.4).

Рассмотрим эквивалентную форму (1.3.4)–(1.3.6) для сопряженной системы (1.3.1), (1.3.2). Преобразуем выход (1.3.6) с учетом того, что $\tilde{z}(t) = \text{colon}(z_1(t), z_2(t))$,

$$\tilde{y}(t) = U^\top(t) \left(\sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} \left(\tilde{R}_i^\top(t) z_1(t) \right)^{(i)} + \sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} \left(\hat{R}_i^\top(t) z_2(t) \right)^{(i)} \right), \quad (2.1.19)$$

где

$$\left(\tilde{R}_i^\top(t) \hat{R}_i^\top(t) \right) = R_i^\top(t), \quad i = \overline{0, r}.$$

Для решения системы (1.3.4) имеет место представление (1.3.24), поэтому необходимое и достаточное условие R -наблюдаемости для системы (1.3.4), (2.1.19) можно записать в виде

$$U^\top(t) \left(\sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} \left(\Omega^{-1}(t) \tilde{R}_i(t) \right)^{(i)} \right)^\top h \neq 0 \quad (2.1.20)$$

для любого вектора $h \in \mathbf{R}^{n-d}$ единичной нормы.

Если при некотором h выражение, стоящее в левой части соотношения (2.1.20), отлично от нуля при $t = t_1$ или при $t = t_0$, то по непрерывности оно останется не равным нулю и в некоторой левой полуокрестности точки t_1 или правой полуокрестности точки t_0 соответственно. Следовательно, система (1.3.4), (2.1.19) R -наблюдаема, тогда и только тогда, когда

$$(t - t_1)^r (t - t_0)^r U^\top(t) \left(\sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} \left(\Omega^{-1}(t) \tilde{R}_i(t) \right)^{(i)} \right)^\top h \neq 0 \quad (2.1.21)$$

для любого вектора $h \in \mathbf{R}^{n-d}$ единичной нормы.

Из условия (2.1.21) следует, что матрица

$$\int_{t_0}^{t_1} \Theta^\top(t) \Theta(t) dt, \quad (2.1.22)$$

обратима [9, с. 188], где

$$\Theta(t) = \left(\sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} \left(\Omega^{-1}(t) \tilde{R}_i(t) \right)^{(i)} \right) U(t) (t - t_0)^r (t - t_1)^r.$$

В (1.1.7) осуществим невырожденную замену переменной $x_1(t) = \Omega(t)\xi(t)$, а затем проинтегрируем это уравнение в пределах от t_0 до t_1 . В результате получим

$$\xi(t_1) - \xi(t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(t) \left(\sum_{i=0}^r \tilde{R}_i(t) (U(t)u(t))^{(i)} \right) dt. \quad (2.1.23)$$

Покажем, что из уравнения (2.1.23) при любых значениях $\xi(t_1)$ и $\xi(t_0)$ можно найти управление $u(t)$. В соответствии с определением 2.5 это будет означать R -управляемость системы (1.1.1).

Проинтегрируем по частям интеграл, стоящий в правой части уравнения (2.1.23),

$$\begin{aligned} \xi(t_1) - \xi(t_0) = & - \sum_{i=1}^r \Omega^{-1} \tilde{R}_i (Uu)^{(i-1)} \Big|_{t_0}^{t_1} + \sum_{i=2}^r (\Omega^{-1} \tilde{R}_i)' (Uu)^{(i-2)} \Big|_{t_0}^{t_1} + \dots \\ & \dots + (-1)^r (\Omega^{-1} \tilde{R}_r)^{(r-1)} Uu \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left(-\Omega^{-1} \tilde{R}_0 + (\Omega^{-1} \tilde{R}_1)' + \dots + (-1)^{r+1} (\Omega^{-1} \tilde{R}_r)^{(r)} \right) Uu \, dt. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

В (2.1.24) будем искать управление в виде

$$u(t) = (t - t_0)^r (t - t_1)^r \Theta^\top(t) a, \quad (2.1.25)$$

где a — некоторый постоянный вектор подходящей размерности.

В результате подстановки (2.1.25) в (2.1.24) все слагаемые в правой части равенства, кроме последнего, обратятся в ноль, и мы получим уравнение

$$\xi(t_1) - \xi(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Theta(t) \Theta^\top(t) dt \, a. \quad (2.1.26)$$

Пусть сопряженная система (1.3.1), (1.3.2) R -управляема. Тогда, как было показано выше, матрица (2.1.22) обратима. Следовательно, из уравнения (2.1.26) вектор a определится единственным образом для любых $\xi(t_1)$ и $\xi(t_0)$. А это значит, что система (1.1.1) R -управляема.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2.10. Пусть выполнены все предположения теоремы 1.1. Если система (1.3.1), (1.3.2) R -наблюдаема, то ДАУ (1.1.1) R -управляема.

2.2 Стабилизируемость линейных ДАУ с векторным управлением

Определение 2.8. Решение $x_*(t)$ ДАУ (1.1.1) называется *устойчивым по Ляпунову* (кратко, *устойчивым*) при $t \rightarrow +\infty$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in I$ найдется $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что

- 1) при любых согласованных в точке t_0 начальных данных (1.1.13) таких, что $\|x_0 - x_*(t_0)\|_{\mathbf{R}^n} < \delta_0$, все решения $x(t, t_0, x_0)$ соответствующих задач Коши определены на интервале $I_0 = [t_0, +\infty)$;
- 2) для этих решений при $t \in I_0$ справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0) - x_*(t)\|_{\mathbf{R}^n} < \varepsilon$.

Определение 2.9. Устойчивое решение $x_*(t)$ ДАУ (1.1.1) называется *асимптотически устойчивым* при $t \rightarrow +\infty$, если для любого $t_0 \in I$ существует $\delta = \delta(t_0) \in (0, \delta_0)$ такое, что все решения $x(t, t_0, x_0)$ ДАУ (5.1) обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, t_0, x_0) - x_*(t)\|_{\mathbf{R}^n} = 0,$$

как только $\|x_0 - x_*(t_0)\|_{\mathbf{R}^n} < \delta$.

Определение 2.10. Линейная система ДАУ (1.1.1) называется *устойчивой* (асимптотически устойчивой), если все ее решения соответственно устойчивы по Ляпунову (асимптотически устойчивы)

при $t \rightarrow +\infty$.

Определение 2.11. Устойчивая система ДАУ (1.1.1) называется экспоненциально устойчивой, если существуют такие положительные константы d_0 и α , что для любого $t_0 \in I$ и любых согласованных в точке t_0 начальных данных (1.1.13) выполняется оценка

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < d_0 \|x_0\| \exp(-\alpha(t - t_0)), \quad t \geq t_0.$$

Определение 2.12. Систему управления (1.1.1) будем называть стабилизируемой, если существует обратная связь

$$u(t) = \Omega(t)x(t)$$

($\Omega(t)$ — некоторая $(l \times n)$ —матрица) такая, что замкнутая система

$$A(t)x'(t) + (B(t) + U(t)\Omega(t))x(t) = 0, \quad t \in I,$$

асимптотически устойчива.

Рассмотрим систему специального вида со скалярным управлением

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + b_1(t)w(t) = 0, \quad (2.2.1)$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + b_2(t)w(t) = 0, \quad (2.2.2)$$

где $J_1(t)$, $J_2(t)$ — матрицы из системы (1.1.7), (1.1.8); $b_1(t)$ и $b_2(t)$ — вектор-функции размерностей $n - d$ и d соответственно; $w(t)$ — управление.

Для системы (2.2.1) найдем матрицу управляемости

$$\mathcal{K}(t) = (K_0(t) \ K_1(t) \ \dots \ K_{n-d-1}(t)), \quad (2.2.3)$$

$$K_0(t) = b_1(t), \quad K_i(t) = J_1(t)K_{i-1}(t) + K_{i-1}'(t), \quad i = \overline{1, n-d}. \quad (2.2.4)$$

Если матрица $\mathcal{K}(t)$ обратима на I , то определим функцию

$$v(t) = \mathcal{K}^{-1}(t)K_{n-d}(t) = \text{colon}(v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-d}(t)). \quad (2.2.5)$$

Напомним, что некоторая обратимая $\forall t \in I$ $(n \times n)$ -матрица $X(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ является матрицей Ляпунова тогда и только тогда, когда она ограничена и $|\det X(t)| \geq \sigma = \text{const} > 0$.

Приведем известный результат о стабилизируемости системы вида (2.2.1) [9, с. 305].

Теорема 2.11. Пусть в (2.2.1):

- 1) $J_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(I)$ и $b_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(I)$;
- 2) в (2.2.3) $K(t)$ — матрица Ляпунова;
- 3) в (2.2.5) каждая из функций $v_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(I)$ ($i = \overline{1, n-d}$) ограничена вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно.

Тогда найдется строка

$$h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_{n-d}(t)) H(t) \quad (2.2.6)$$

($H(t)$ — матрица Ляпунова, а каждая из функций $h_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(I)$ ограничена вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно, $i = \overline{1, n-d}$) такая, что замкнутая система

$$x_1'(t) + (J_1(t) + b_1(t)h(t)) x_1(t) = 0 \quad (2.2.7)$$

экспоненциально устойчива.

Обозначим $b(t) = \text{colon} (b_2(t), b_1(t))$.

Перейдем к анализу системы (1.1.1) с векторным входом, которая в условиях теоремы 1.1 эквивалентна в смысле решений ДАУ (1.1.7), (1.1.8).

Найдем условия, при которых существуют достаточно гладкие управление $u(t)$ и n -мерная вектор-функция $b(t)$ такие, что выполнены предположения 2), 3) теоремы 1.2 и справедливо представление

$$\begin{pmatrix} G_0(t) & G_1(t) & \dots & G_r(t) \\ L_0(t) & L_1(t) & \dots & L_r(t) \end{pmatrix} \text{colon} \begin{pmatrix} u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t) \end{pmatrix} = b(t)w(t), \quad (2.2.8)$$

где $w(t)$ — любое заданное достаточно гладкое скалярное управление.

Заметим, что в результате замены управления (2.2.8), ДАУ (1.1.7), (1.1.8) преобразуются в систему (2.2.1), (2.2.2).

Определение 2.13. Полуобратной матрицей для $(n \times m)$ -матрицы $P(t)$ называется $(m \times n)$ -матрица, обозначаемая $P^-(t)$, которая при всех $t \in I$ удовлетворяет уравнению

$$P(t)P^-(t)P(t) = P(t). \quad (2.2.9)$$

Замечание 2.1. Полуобратная определена (хотя и неединственным образом) для любой матрицы $P(t)$, т.е. уравнение (2.2.9) поточно всегда разрешимо. Однако, $P^-(t)$ может не обладать на I гладкостью исходной матрицы. Известно [52, с. 41], что в случае $P(t) \in \mathbf{C}^s(I)$, полуобратная $P^-(t) \in \mathbf{C}^s(I)$ существует тогда и только тогда, когда $\text{rank } P(t) = \text{const } \forall t \in I$.

Поскольку в (1.1.7), (1.1.8)

$$\begin{pmatrix} G_0(t) & \dots & G_r(t) \\ L_0(t) & \dots & L_r(t) \end{pmatrix} \text{colon} \begin{pmatrix} u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{R}[U(t)u(t)],$$

то действие оператора (1.1.15) на обе части равенства (2.2.8) приводит к уравнению

$$U(t)u(t) = M_0(t)b(t)w(t) + M_1(t)\frac{d}{dt}(b(t)w(t)),$$

которое запишем в виде

$$U(t)u(t) = (M_0(t)b(t) + M_1(t)b'(t) \quad M_1(t)b(t)) \begin{pmatrix} w(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}. \quad (2.2.10)$$

Необходимым и достаточным условием поточечной разрешимости уравнения (2.2.10) относительно $u(t)$ при любой функции $w(t)$ являются тождества

$$(E - U(t)U^-(t)) (M_0(t)b(t) + M_1(t)b'(t)) = 0, \quad (2.2.11)$$

$$(E - U(t)U^{-}(t)) M_1(t)b(t) = 0 \quad (2.2.12)$$

[3, с. 13]. По замечанию 2.1, если $\text{rank } U(t) = \text{const}$, то найдется полюбообратная матрица $U^{-}(t)$, обладающая той же гладкостью, что и $U(t)$. Непосредственной подстановкой проверяется, что при выполнении условий (2.2.11), (2.2.12) вектор-функция

$$u(t) = U^{-}(t) \left(M_0(t)b(t)w(t) + M_1(t) \frac{d}{dt} (b(t)w(t)) \right) \quad (2.2.13)$$

является решением системы (2.2.10).

Дифференцируя (2.2.12), получим

$$(E - U(t)U^{-}(t)) M_1(t)b'(t) = -\frac{d}{dt} \left((E - U(t)U^{-}(t)) M_1(t) \right) b(t). \quad (2.2.14)$$

Результатом подстановки (2.2.14) в (2.2.11), (2.2.12) будет система

$$W(t)b(t) = 0, \quad (2.2.15)$$

где

$$W(t) = \begin{pmatrix} (E - U(t)U^{-}(t)) M_0(t) - \frac{d}{dt} \left((E - U(t)U^{-}(t)) M_1(t) \right) \\ (E - U(t)U^{-}(t)) M_1(t) \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Очевидно, что система (2.2.15) поточечно всегда разрешима. Если хотя бы в одной точке $\text{rank } W(t) < n$, то (2.2.15) имеет нетривиальные решения. Общее решение системы имеет вид

$$b(t) = (E - W^{-}(t)W(t)) g(t), \quad (2.2.17)$$

где $g(t)$ — произвольная n -мерная функция.

Среди всех функций $b(t)$ вида (2.2.17), поточечно удовлетворяющих уравнению (2.2.15), найдем такую, которая обеспечит стабилизируемость системы (2.2.1), т.е. выполнение предположений 2), 3) теоремы 2.11, где

$$b_1(t) = (O \ E_{n-d}) b(t).$$

Это можно сделать за счет выбора функции $g(t)$. В частности, если $W(t) \in \mathbf{C}^k(I)$, то элементы $g(t)$ также должны быть из пространства $\mathbf{C}^k(I)$. В этом случае предположение $\text{rank } W(t) \equiv \text{const}$ гарантирует, что $b(t) \in \mathbf{C}^k(I)$.

В соотношении (2.2.8) в качестве функции $w(t)$ возьмем управление, стабилизирующее систему (2.2.1), например,

$$w(t) = h(t)x_1(t), \quad (2.2.18)$$

где $h(t)$ имеет вид (2.2.6). Конструктивный способ построения функции $h(t)$ предложен в [9, с. 299].

Теорема 2.12. Пусть:

- 1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{4(r+1)+n-d}(I)$, $U(t) \in \mathbf{C}^{3(r+1)+n-d}(I)$;
- 2) выполнены условия 2), 3) теоремы 1.1;
- 3) $\text{rank } U(t) \equiv \text{const}$;
- 4) $\text{rank } W(t) \equiv \text{const} < n$;
- 5) существует функция $g(t) \in \mathbf{C}^{3r+2+n-d}(I)$ такая, что для функции $b(t) = \text{colon}(b_2(t), b_1(t))$ (см. формулу (2.2.17)) выполняются условия 2), 3) теоремы 2.11 и $\|b_2(t)\|_{\mathbf{R}^d} \leq k_2 = \text{const}$; $\|J_2(t)\| \leq k_1 = \text{const}$.

Тогда найдется управление вида (2.2.13) (где $U^-(t)$ — любая полубратная для матрицы $U(t)$ с элементами из пространства $\mathbf{C}^{3(r+1)+n-d}(I)$, стабилизирующее систему (1.1.1), при этом в (2.2.13) $w(t)$ — управление, стабилизирующее систему (2.2.1) (см. (2.2.18)).

Доказательство. Справедливость теоремы следует из изложенного в этом разделе способа построения управления $u(t)$, стабилизирующего систему (1.1.7), (1.1.8).

Используя формулу (2.2.13), нетрудно убедиться, что предположение 1) теоремы и требование на гладкость функции $g(t)$ обеспечивают выполнение условия $u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$, присутствующего в формулировке теоремы 1.1.

Если в (2.2.1), (2.2.2) обратная связь $w(t)$ такова, что замкнутая система (2.2.7) экспоненциально устойчива, то условия ограниченности вектора $b_2(t)$ и матрицы $J_2(t)$ гарантируют экспоненциальную устойчивость системы (2.2.1), (2.2.2).

По построению и в соответствии с теоремой 1.1, управление (2.2.13) стабилизирует и систему (1.1.1). $\square$

Пример 2.1. Покажем, что для ДАУ

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 + \cos t & 1 - \cos t & 1 \\ -\sin t \cos t & 1 - \sin t & -\sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \\ & + \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t & 1 + \sin t + \cos^2 t & 0 \\ 1 + \sin^2 t & -\cos t & 0 \\ \cos t & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

выполняются все предположения теоремы 2.12.

Очевидно, что условия 1)–3) имеют место. Оператор

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & \cos t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos t \sin t - 1 \\ 0 & 0 & \sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}$$

преобразует (2.2.19) в эквивалентную форму

$$\begin{aligned} x_1'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 + \sin t \\ 1 & -\cos t \end{pmatrix} x_1(t) + \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & \cos t \sin t - 1 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix} u'(t) = 0, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

$$x_2(t) + \begin{pmatrix} \cos t & 1 \end{pmatrix} x_1(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что левый обратный к оператору $\mathcal{R}$ имеет вид

$$\mathcal{M} = M_0(t) + M_1(t) \frac{d}{dt},$$

где

$$M_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.21)$$

В качестве полуобратной для $U(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ можно взять матрицу

$$U^-(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$E - U(t)U^-(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2.2.16) с учетом (2.2.21) найдем матрицу

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\text{rank } W(t) = 2 < n = 3$ и

$$W^-(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с формулой (2.2.17)

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cos t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2(t) \cos t \\ g_2(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $g_i(t)$ — некоторые скалярные функции. Таким образом,

$$b_2(t) \equiv 0, \quad b_1 = \begin{pmatrix} g_2(t) \cos t \\ g_2(t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку в (2.2.20) $J_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \sin t \\ 1 & -\cos t \end{pmatrix}$, то матрица управляемости для системы (2.2.20) имеет вид (см. (2.2.4), (2.2.3))

$$\mathcal{K}(t) = \begin{pmatrix} g_2(t) \cos t & g_2(t)(1 + \sin t) + \frac{d}{dt}(g_2(t) \cos t) \\ g_2(t) & 0 \end{pmatrix},$$

при этом $\det \mathcal{K}(t) = g_2^2(t) + g_2(t)g_2'(t) \cos t$. Положим $g_2(t) = 1$, тогда $\mathcal{K}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\det \mathcal{K}(t) = 1$. Можно найти функцию (2.2.5): $v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos t \end{pmatrix}$.

Итак, уравнение (2.2.20) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 + \sin t \\ 1 & -\cos t \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} w(t) = 0. \quad (2.2.22)$$

Очевидно, что для системы (2.2.22) выполняются все условия теоремы 2.11, согласно которой эта система является стабилизируемой.

Таким образом, для ДАУ (2.2.19) имеют место предположения теоремы 2.12. Управление (2.2.13), стабилизирующее ДАУ (2.2.19), в данном случае имеет вид $u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w(t)$, где $w(t)$ — управление вида (2.2.18), стабилизирующее систему (2.2.22).

2.3 Детектируемость

Рассмотрим линейную систему

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0, \quad t \in I, \quad (2.3.1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами и наблюдаемым скалярным выходом

$$y(t) = c^\top(t)x(t), \quad (2.3.2)$$

где $c(t)$ — заданная n -мерная вектор-функция. В условиях теоремы 1.2, действовав оператором (1.1.4) на систему (2.3.1), (2.3.2), получим

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.3.3)$$

или

$$x'_1(t) + J_1(t)x_1(t) = 0, \quad (2.3.4)$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) = 0, \quad (2.3.5)$$

$$y(t) = (c_1^\top(t) \ c_2^\top(t)) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.3.6)$$

где $J_1(t), J_2(t)$ определяются из (1.1.12),

$$\text{colon}(x_1(t) \ x_2(t)) = Q_1 x(t), \quad \text{colon}(c_1(t) \ c_2(t)) = (Q_1^{-1})^\top c(t), \quad (2.3.7)$$

Q_1 — матрица перестановок из 1.1.9.

Подставив выражение $x_2(t) = -J_2(t)x_1(t)$, полученное из (2.3.5), в равенство (2.3.6), получим выражение для выходной функции, не зависящее от $x_2(t)$,

$$y(t) = (c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_2(t)) x_1(t). \quad (2.3.8)$$

Пусть функция $y(t)$ из (2.3.2) подается на вход системы управления

$$\tilde{A}(t)z'(t) + \tilde{B}(t)z(t) + l(t)u(t) = 0, \quad z(t_0) = 0, \quad t_0 > 0,$$

в результате чего получается уравнение

$$\tilde{A}(t)z'(t) + \tilde{B}(t)z(t) + l(t)y(t) = 0, \quad z(t_0) = 0, \quad (2.3.9)$$

где $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t)$ — $(n \times n)$ -матрицы, а $l(t)$ — n -мерный вектор-столбец, непрерывные на I , t_0 — фиксированный момент времени.

Обозначим

$$e(t) = x(t) - z(t), \quad (2.3.10)$$

где $e(t) \in \mathbf{C}^1(I)$.

Определение 2.14. Говорят, что система (2.3.9) *асимптотически оценивает состояние* системы (2.3.1), (2.3.2) если для любого решения $x(t)$ системы (2.3.1) справедливо предельное соотношение $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Из (2.3.2) следует

$$e'(t) = x'(t) - z'(t). \quad (2.3.11)$$

Положим в (2.3.9) $\tilde{A}(t) = A(t)$. Умножим (2.3.11) слева на $A(t)$, а затем в полученное выражение подставим

$$A(t)x'(t) = -B(t)x(t), \quad A(t)z'(t) = -\tilde{B}(t)z(t) - l(t)y(t).$$

В результате будем иметь

$$A(t)e'(t) = -B(t)x(t) - \tilde{B}(t)(e(t) - x(t)) + l(t)c^\top(t)x(t). \quad (2.3.12)$$

Пусть $\tilde{B}(t) = B(t) - l(t)c^\top(t)$, тогда уравнение (2.3.12) примет вид

$$A(t)e'(t) + (B(t) - l(t)c^\top(t))e(t) = 0. \quad (2.3.13)$$

Асимптотическое оценивание состояния системы (2.3.1), (2.3.2) с помощью системы (2.3.9) возможно, когда для некоторой вектор-функции $l(t)$ система (2.3.13) асимптотически устойчива.

Определение 2.15. Система (2.3.1), (2.3.2) называется *детектируемой*, если существует такая достаточно гладкая n -мерная вектор-функция $l(t)$, что система (2.3.13) асимптотически устойчива.

Пусть для системы (2.3.1) выполнены все предположения теоремы 1.2 при $r = 1$. Тогда оператор (1.1.16) будет иметь вид

$$\mathcal{R} = R_0(t). \quad (2.3.14)$$

Подействовав оператором (2.3.14) на ДАУ (2.3.13), получим систему

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) + J_1(t)e_1(t) \\ e_2(t) + J_2(t)e_1(t) \end{pmatrix} - R_0(t)l(t)c^\top(t)e(t) = 0, \quad (2.3.15)$$

где

$$\text{colon}(e_1(t) \ e_2(t)) = Q_1 e(t), \quad (2.3.16)$$

$e_1(t)$ и $e_2(t)$ имеют размерности $n - d$ и d соответственно, Q_1 — матрица перестановок из (1.1.9); $J_1(t)$, $J_2(t)$ определяются из (1.1.12).

Положим в (2.3.15)

$$R_0(t)l(t) = \tilde{l}(t), \quad (2.3.17)$$

где $\tilde{l}(t)$ — некоторая n -мерная вектор-функция из пространства $\mathbf{C}^1(I)$. Тогда уравнение (2.3.15) примет вид

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) + J_1(t)e_1(t) \\ e_2(t) + J_2(t)e_1(t) \end{pmatrix} - \tilde{l}(t)c^\top(t)e(t) = 0. \quad (2.3.18)$$

Функцию $\tilde{l}(t)$ будем искать в виде $\tilde{l}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{l}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\tilde{l}_1(t)$ — пока неизвестная $(n - d)$ -мерная вектор-функция. Тогда система (2.3.18) может быть записана в виде

$$e_1'(t) + J_1(t)e_1(t) - \tilde{l}_1(t)(c_1^\top(t)e_1(t) + c_2^\top(t)e_2(t)) = 0, \quad (2.3.19)$$

$$e_2(t) + J_2(t)e_1(t) = 0, \quad (2.3.20)$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ определяются из (2.3.7).

Из (2.3.20) найдем $e_2(t) = -J_2(t)e_1(t)$ и подставим в уравнение (2.3.19)

$$e_1'(t) + \left(J_1(t) - \tilde{l}_1(t)(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_2(t)) \right) e_1(t) = 0. \quad (2.3.21)$$

Согласно определению 2.15, система (2.3.4), (2.3.8) будет детектируемой, если найдется такая вектор-функция $\tilde{l}_1(t)$, что система (2.3.21)

будет асимптотически устойчива. Будем строить $\tilde{l}_1(t)$ в (2.3.21) по алгоритму, предложенному в [9, с. 313-314] для системы, разрешенной относительно производной.

Сформулируем теорему [9, с. 314], представляющую собой достаточное условие детектируемости применительно к системе (2.3.4), (2.3.8). Для этого определим матрицу наблюдаемости для системы (2.3.4)

$$\mathcal{S}(t) = \text{colon}(S_0(t) \ S_1(t) \ \dots \ S_{n-d-1}(t)), \quad (2.3.22)$$

где

$$\begin{aligned} S_0(t) &= c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_2(t), \quad S_i(t) = -S_{i-1}(t)J_1(t) + S'_{i-1} \\ i &= 1, \dots, n-d. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Если матрица $\mathcal{S}(t)$ обратима, определим вектор-функцию

$$\omega(t) = \mathcal{S}^{-1}(t)S_{n-d}(t) = \text{colon}(\omega_1(t), \dots, \omega_{n-d}(t)), \quad (2.3.24)$$

где $\omega_i(t) (i = 1, \dots, n-d)$ — скалярные функции.

Теорема 2.13. Пусть:

- 1) $J_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(I); c(t), J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(I);$
- 2) в (2.3.22) $\mathcal{S}(t)$ — матрица Ляпунова;
- 3) в (2.3.24) функции $\omega_i(t)$ $i-1$ раз непрерывно дифференцируемы и ограничены на I вместе со своими производными до $i-1$ порядка включительно.

Тогда система (2.3.4), (2.3.8) детектируема.

Используем теорему 2.13 для получения условий детектируемости ДАУ (2.3.1), (2.3.2).

Теорема 2.14. Пусть:

- 1) $A(t) \in \mathbf{C}^1(I); B(t), c(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(I);$
- 2) выполнены условия 2)–4) теоремы 1.2 при $r = 1;$
- 3) выполнены условия 2), 3) теоремы 2.13;
- 4) $\|J_2(t)\| \leq k = \text{const}, \quad t \in I.$

Тогда система (2.3.1), (2.3.2) детектируема.

Доказательство. В связи с предположениями 1), 3) для системы (2.3.4), (2.3.8) выполняются все условия теоремы 2.13, в соответствии с которой система (2.3.4), (2.3.8) является детектируемой. Это означает, что найдется вектор-функция $\tilde{l}_1(t)$ такая, что система (2.3.21) будет асимптотически устойчива. Условие 4) теоремы гарантирует, что в этом случае будет асимптотически устойчива система (2.3.20), а следовательно и система (2.3.19). Тогда при $\tilde{l}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{l}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ будет асимптотически устойчива и система (2.3.18). В сделанных предположениях существует оператор (1.1.18) — левый обратный для оператора (1.1.16). Подействовав оператором (1.1.18) на уравнение (2.3.17), найдем вектор $l(t)$:

$$\mathcal{M}[R_0(t)l(t)] = l(t) = \mathcal{M}[\tilde{l}(t)], \quad (2.3.25)$$

который определяется единственным образом. По построению системы (2.3.13) и (2.3.18) эквивалентны в смысле устойчивости. Таким образом, выбирая $l(t)$ согласно (2.3.25), гарантируем, что система (2.3.13) будет также асимптотически устойчива. Согласно определению 2.15 это означает детектируемость системы (2.3.1), (2.3.2). Теорема доказана. $\square$

2.4 Приводимость дифференциально-алгебраических уравнений

Определение 2.16. Система (2.3.1) называется *приводимой*, если существует оператор $\mathcal{N} = \sum_{j=0}^r N_j(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^j$ с непрерывными на I коэффициентами $N_j(t)$, обладающий левым обратным оператором, и матрица Ляпунова $V(t)$ такие, что действие оператора $\mathcal{N}$ и замена

переменной

$$x(t) = V(t) \text{ colon } (\xi_1(t), \xi_2(t))$$

преобразуют ДАУ (2.3.1) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1'(t) \\ \xi_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & E_d \\ -H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in I, \quad (2.4.1)$$

где H — $(n-d) \times (n-d)$ -постоянная матрица.

Лемма 2.1. Пусть в (2.3.3) $J_1(t) \in \mathbf{C}(I)$, $J_2(t) \in \mathbf{C}^1(I)$. Для того чтобы система (2.3.3) была приводима, необходимо и достаточно выполнения условий:

i) некоторая фундаментальная матрица $X(t)$ системы

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0, \quad (2.4.2)$$

может быть представлена в виде

$$X(t) = U(t)e^{tH}, \quad (2.4.3)$$

где $U(t)$ — матрица Ляпунова, H — постоянная $(n-d) \times (n-d)$ -матрица;

ii) матрица $J_2(t)U(t)$ ограничена на I вместе со своей производной.

Доказательство. Достаточность. В силу условия i), по теореме Еругина [18] система (2.4.2) приводима. А именно, замена переменных $x_1(t) = U(t)\xi_1(t)$, (где $U(t) = X(t)e^{-tH}$) и последующее умножение слева на матрицу $e^{tH}X^{-1}(t)$ преобразует систему (2.4.2) к виду

$$\xi_1'(t) - H\xi_1(t) = 0.$$

Сделаем в (2.3.3) замену переменных

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = V(t) \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$, где $V(t) = \begin{pmatrix} X(t)e^{-tH} & O \\ -J_2(t)X(t)e^{-tH} & E_d \end{pmatrix}$, а затем умножим полученную систему слева на матрицу $\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & e^{tH}X^{-1}(t) \end{pmatrix}$. В результате получим систему вида (2.4.1). В силу предположений i) и ii) матрица $V(t)$ будет матрицей Ляпунова.

Таким образом, система (2.3.3) приводима с обратимым оператором

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} e^{tH} X^{-1}(t) & O \\ O & E_d \end{pmatrix}.$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть система (2.3.3) приводима. Из структуры этой системы следует, что в этом случае система (2.4.2) также будет приводима. По теореме Еругина одна из фундаментальных матриц системы (2.4.2) имеет вид (2.4.3), следовательно, условие $i)$ выполняется.

Осуществим в (2.3.3) преобразование Ляпунова $x_1(t) = U(t)\xi_1(t)$ ($U(t)$ — матрица из (2.4.3)). В результате последующего умножения слева на матрицу $\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & U^{-1}(t) \end{pmatrix}$ получим ДАУ

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_2(t)U(t) & E_d \\ -H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4.4)$$

В сделанных предположениях система (2.4.4) также будет приводима, т.е. найдется матрица Ляпунова $G(t)$ вида

$$G(t) = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ G_1(t) & G_2(t) \end{pmatrix},$$

такая, что преобразование $\text{colon}(\xi_1, x_2) = G(t) \text{colon}(\xi_1, \xi_2)$ приводит систему (2.4.4) к виду (2.4.1). Иначе говоря, матрица $G(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\begin{pmatrix} J_2(t)U(t) & E_d \\ -H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ G_1(t) & G_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E_d \\ -H & O \end{pmatrix},$$

откуда единственным образом находятся блоки $G_1(t)$ и $G_2(t)$

$$G_1(t) = -J_2(t)U(t), \quad G_2(t) = E_d.$$

Поскольку $G(t)$ является матрицей Ляпунова, то из ее структуры вытекает справедливость условия $ii)$. $\square$

Теорема 2.15. Пусть $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$ и выполнено предположение 2) леммы 1.2. Для того чтобы система (2.3.1) была приводима с матрицей

$$V(t) = P \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ V_2(t) & E_d \end{pmatrix}, \quad (2.4.5)$$

(где $V_1(t)$ — $(n-d) \times (n-d)$ -матрица Ляпунова; $V_2(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ — $(d \times d)$ -матрица ограниченная на I вместе с производной; P — некоторая матрица перестановок) необходимо и достаточно выполнения условий:

- a) существует оператор (1.1.4) со свойством (1.1.5);
- b) общее решение системы (2.3.1) может быть представлено в виде

$$x(t) = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ V_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{tH} & O \\ O & O \end{pmatrix} c, \quad (2.4.6)$$

где H — постоянная $(n-d) \times (n-d)$ -матрица, $c \in \mathbf{R}^n$ — произвольная константа, Q_1 — матрица перестановок из (2.3.7), $V_1(t)$ и $V_2(t)$ такие же как в (2.4.5).

Доказательство. Необходимость. Пусть система (2.3.1) приводима, и матрица $V(t)$ имеет вид (2.4.5). Рассмотрим систему (2.4.1), полученную из (2.3.1) в результате действия оператора $\mathcal{N}$ и замены переменных $x(t) = V(t) \text{ colon } (\xi_1, \xi_2)$. Осуществим в (2.4.1) обратное преобразование

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^{-1} & O \\ -V_2 V_1^{-1} & E_d \end{pmatrix} P^{-1} x(t),$$

а затем умножим полученную систему слева на матрицу $\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & V_1 \end{pmatrix}$.

В результате получим ДАУ

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -V_2V_1^{-1} & E_d \\ V_1((V_1^{-1})' - HV_1^{-1}) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.4.7)$$

которая записана с использованием обозначения $\text{colon } (x_1(t), x_2(t)) = P^{-1}x(t)$. Система (2.4.7) имеет вид (2.3.3), где

$$J_1 = V_1(V_1^{-1})' - HV_1^{-1}, \quad J_2 = -V_2V_1^{-1}, \quad (2.4.8)$$

и получена из (2.3.1) действием оператора

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & V_1 \end{pmatrix} \mathcal{N}.$$

По теореме 1.1 системы (2.3.1) и (2.3.3) имеют решения, которые связаны матрицей перестановок $x(t) = Q_1^{-1} \text{colon } (x_1(t), x_2(t))$, поэтому $P = Q_1^{-1}$. В свою очередь, решения систем (2.4.1) и (2.3.3) удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ V_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что общее решение системы (2.4.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tH} & O \\ O & O \end{pmatrix} c,$$

где $c \in \mathbf{R}^n$ — произвольная константа. Следовательно, общее решение ДАУ (2.3.1) представимо в виде (2.4.6). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеют место условия а) и б). Оператор $\mathcal{R}$ преобразует ДАУ (2.3.1) к виду (2.3.3), причем, по теореме 1.1, системы (2.3.1) и (2.3.3) эквивалентны в смысле решений. Условие б) гарантирует, что общее решение системы (2.3.3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ V_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{tH} & O \\ O & O \end{pmatrix} c, \quad (2.4.9)$$

где $c \in \mathbf{R}^n$ — произвольная константа.

С другой стороны, общее решение можно найти непосредственно из системы (2.3.3):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ -J_2(t)X(t) \end{pmatrix} c, \quad (2.4.10)$$

где $X(t)$ — некоторая фундаментальная матрица решений подсистемы (2.4.2). Приравнявая правые части равенств (2.4.9) и (2.4.10), получим

$$X(t) = V_1(t)e^{tH}, \quad -J_2(t)V_1(t) = V_2(t).$$

В силу свойств матриц V_1 и V_2 , для системы (2.3.3) выполнены все предположения леммы 2.1, согласно которой ДАУ (2.3.3) приводима к виду (2.4.1). Поскольку такое приведение осуществляется с помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ -J_2(t)V_1(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$$

и умножения слева на матрицу $\tilde{V}(t) = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & V_1(t)^{-1} \end{pmatrix}$ (см. доказательство необходимости леммы 2.1), то система (2.4.1) получена из (2.3.1) с помощью преобразования Ляпунова

$$x(t) = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ -J_2(t)V_1(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.4.11)$$

и оператора $\mathcal{N} = \tilde{V}(t)\mathcal{R}$. В сделанных предположениях справедлива лемма 1.2, в соответствии с которой оператор $\mathcal{R}$ имеет левый обратный. Следовательно, в силу обратимости матрицы $\tilde{V}(t)$ оператор $\mathcal{N}$ также имеет левый обратный. Таким образом система (2.3.1) приводима с матрицей вида (2.4.5). $\square$

2.5 Правильные системы

Напомним, что для векторно или матричнозначимой функции $f(t) \in \mathbf{C}(I)$ число (или символ $-\infty$ или $+\infty$)

$$\chi[f(t)] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|f(t)\| \quad (2.5.1)$$

называется *характеристическим показателем* функции $f(t)$.

Определение 2.17. Множество всех характеристических показателей ненулевых решений системы (2.3.1) называется ее *спектром* (см. [9, с. 70]).

Предположим, что для ДАУ (2.3.1) выполнены все предположения леммы 1.1.

Определение 2.18. Система (2.3.1) называется *правильной*, если выполняются условия:

- 1) существует оператор $\mathcal{R}$ вида (1.1.4), имеющий левый обратный и обладающий свойством (1.1.5);
- 2) полный спектр системы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\eta$ ($\eta \leq n$) состоит из конечных чисел и сумма

$$S = \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i$$

характеристических показателей решений ДАУ (2.3.1), входящих в некоторую ее нормальную фундаментальную систему, совпадает с величиной

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } \tilde{B}(\tau) d\tau - d,$$

где

$$\tilde{B}(t) = \left\{ \tilde{b}_{ij}(t) \right\}_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} O & E_{n-d} \\ E_d & O \end{pmatrix} \mathcal{R}[B(t)] Q_1,$$

$\text{Sp } \tilde{B}(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{b}_{jj}(t)$ — след матрицы $\tilde{B}(t)$.

Лемма 2.2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1.1 и в ДАУ (2.3.3):

- 1) $\sup_{t \in I} \|J_1(t)\| < \infty$;
- 2) матрица $J_2(t)$ имеет строгий характеристический показатель равный нулю

$$\chi[J_2(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|J_2(t)\| = 0.$$

Тогда число элементов спектра ДАУ (2.3.1) $\eta = n - d$ и полные спектры систем (2.3.1), (2.3.3) и (2.4.2) совпадают.

Доказательство. Условие 2) гарантирует, что полный спектр ДАУ (2.3.3) совпадает с полным спектром ее дифференциальной подсистемы (2.4.2). Из предположения 1) следует, что число элементов спектра системы (2.4.2) равно $\eta = n - d$. Справедливость леммы следует из того факта, что решения систем (2.3.1) и (2.3.3) связаны матрицей перестановок. $\square$

Лемма 2.3. В предположениях леммы 2.2 система (2.3.1) правильна тогда и только тогда, когда:

$$i) \text{ существует предел } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } \tilde{B}(\tau) d\tau = \sigma;$$

ii) сумма характеристических показателей ДАУ (2.3.1) $S = \sigma - d$.

Доказательство. Согласно теореме 1.1 и определению 2.18, система (2.3.1) правильна тогда и только тогда, когда правильна система (2.3.3).

Поскольку $\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} J_1(t) & O \\ J_2(t) & E_d \end{pmatrix}$, то $\text{Sp } \tilde{B}(t) = \text{Sp } J_1(t) + d$. Следовательно, условие i) выполняется в том и только том случае, когда существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } J_1(\tau) d\tau = \sigma_1 = \sigma - d$.

Принимая во внимание лемму 2.2, можно заключить, что i) и ii) представляют собой необходимые и достаточные условия правиль-

ности системы (2.4.2) [17, с. 166].

Очевидно, что в сделанных предположениях система (2.3.3) правильна тогда и только тогда, когда правильна ее подсистема (2.4.2). Отсюда следует справедливость утверждения леммы. $\square$

Замечание 2.2. Из доказательства леммы 2.3 следует, что в предположениях леммы 2.2 ДАУ (2.3.1) правильна тогда и только тогда, когда правильна ее дифференциальная подсистема (2.4.2).

Теорема 2.16. Пусть выполнены все предположения теоремы 2.15. Если система (2.3.1) является приводимой с матрицей $V(t)$ вида (2.4.5) (где $V_1(t)$ — матрица Ляпунова; $V_2(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ ограничена на I вместе с производной; P — матрица перестановок), то она правильна.

Доказательство. Согласно теореме 2.15, имеют место условия а) и б), фигурирующие в формулировке этой теоремы.

Из условия б) следует, что общее решение системы (2.3.3) может быть представлено в виде (2.4.9), поэтому общее решение дифференциальной подсистемы (2.4.2) можно записать в форме (2.4.3), где $U(t) = V_1(t)$. По теореме Еругина система (2.4.2) приводима и, следовательно, правильна [17, с. 166].

При доказательстве необходимости теоремы 2.15 для ДАУ (2.3.3) был получен вид матриц $J_1(t)$ и $J_2(t)$ (2.4.8). Свойства матриц $V_1(t)$ и $V_2(t)$ обеспечивают выполнение условий 1) и 2) леммы 2.2. В этом случае, по замечанию 2.2, система (2.3.1) будет правильной. $\square$

Теорема 2.17. Пусть выполнены все предположения леммы 2.2. Если система (2.3.1) правильна, то она приводима с матрицей $V(t)$ вида (2.4.5), где матрица $V_1(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ обратима $\forall t \in I$ и

$$\chi[V_1(t)^{\pm 1}] = 0, \quad (2.5.2)$$

$V_2(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ и $\chi[V_2(t)] = 0$, P — матрица перестановок.

Доказательство. По определению 2.18, существует оператор $\mathcal{R}$, преобразующий (2.3.1) к виду (2.3.3), и сумма характеристических

показателей ДАУ (2.3.1) совпадает с числом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp} \begin{pmatrix} J_1(\tau) & O \\ J_2(\tau) & E_d \end{pmatrix} d\tau - d = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp} J_1(\tau) d\tau.$$

Согласно лемме 2.2, полные спектры система (2.3.1), (2.3.3) и (2.4.2) совпадают, поэтому дифференциальная подсистема (2.4.2) правильна. На основании известного факта [9, с. 131] отсюда следует приводимость системы (2.4.2) с обратимой $\forall t \in I$ матрицей $V_1(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, обладающей свойством (2.4.12). В этом случае ДАУ (2.3.1) с помощью замены переменной (2.4.11) и действия оператора $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & V_1(t)^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{R}$ преобразуется к виду (2.4.1). В силу условия 2) леммы 2.2 матрица $V_2(t) = -J_2(t)V_1(t)$ имеет строгий характеристический показатель равный нулю. Таким образом, ДАУ (2.3.1) приводима с матрицей $V(t)$ вида (2.4.5), где $P = Q_1^{-1}$, а $V_1(t)$ и $V_2(t)$ обладают необходимыми свойствами. $\square$

Глава 3

Нелинейные системы

3.1 Локальная R -управляемость в ноль

Рассмотрим нелинейную систему

$$F(t, x(t), x'(t), u(t)) = 0, \quad t \in I = (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon). \quad (3.1.1)$$

где $\det \frac{\partial F(t, x, x', u)}{\partial x'} \equiv 0$, $F(t, x, x', u)$ — достаточно гладкая функция со значениями в $\mathbf{R}^n$ и областью определения $\mathcal{D} = I \times \mathcal{X} \times \mathbf{R}^n \times \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{X}$ — окрестности точек $u = 0$ и $x = 0$ соответственно. Анализ проводится при допущении, что функция F обладает свойством

$$F(t, 0, 0, 0) = 0 \quad \forall t \in I. \quad (3.1.2)$$

Напомним, что в условиях теоремы 1.3 ДАУ (3.1.1) обладает эквивалентной в смысле решений локальной структурной формой

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)), \quad (3.1.3)$$

$$x_2(t) = f_0(t, x_1(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)), \quad t \in I_0 \subseteq I, \quad (3.1.4)$$

где $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q_1 x(t)$; $I_0 = (a_0 - \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$; функции f_1 и f_0 определены и имеют непрерывные частные производные

по каждому из своих аргументов в $I \times \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — область изменения переменных $x_1, u, u', \dots, u^{(r)}$, представляющая собой некоторую окрестность точки $0 \in \mathbf{R}^{n+l(r+1)}$.

Определение 3.1. Система (3.1.1) или система (3.1.2), (3.1.3) называется *локально R -управляемой в ноль* на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I_0$, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого вектора $x_0 \in \mathbf{R}^{n-d}$: $\|x_0\| < \delta$ найдется такое допустимое управление $u_0(t)$, что существует решение системы

$$x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), u_0(t), u'_0(t), \dots, u_0^{(r)}(t)), \quad t \in T,$$

удовлетворяющее условиям $x_1(t_0) = x_0, \quad x_1(t_1) = 0$.

В обозначениях

$$A(t) = \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial y}(t, 0, 0, 0), \quad B(t) = \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial x}(t, 0, 0, 0),$$

$$U(t) = \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial u}(t, 0, 0, 0), \quad (3.1.5)$$

ДАУ (1.1.1) будет системой первого приближения для системы (3.1.1).

Тогда ДАУ

$$x'_1(t) + J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r L_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r G_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \quad (3.1.7)$$

будет системой первого приближения для ДАУ (3.1.3), (3.1.4), где $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q_1 x(t)$;

$$J_1(t) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, 0, 0, \dots, 0), \quad J_2(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1}(t, 0, 0, \dots, 0),$$

$$L_i(t) = -\frac{\partial f_1}{\partial u^{(i)}}(t, 0, 0, \dots, 0), \quad G_i(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial u^{(i)}}(t, 0, 0, \dots, 0), \quad i = \overline{0, r}. \quad (3.1.8)$$

Лемма 3.1. Пусть:

- 1) функции $f_1(t, x_1, u, u', \dots, u^{(r)})$ и $f_0(t, x_1, u, u', \dots, u^{(r)})$ определены и имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов в области $T \times \mathcal{V}$;
- 2) $f_1(t, 0, 0, \dots, 0) = 0, \quad f_0(t, 0, 0, \dots, 0) = 0 \quad \forall t \in T$;
- 3) система первого приближения (3.1.6), (3.1.7) ДАУ (3.1.3), (3.1.4) R -управляема на отрезке T .

Тогда система (3.1.3), (3.1.4) локально R -управляема в ноль на отрезке T .

Доказательство. Рассмотрим систему (3.1.6). Выберем $(n-d)$ -мерные векторы $p_i = \text{colon}(0, \dots, 0, \sigma_i, 0, \dots, 0)$, где $\sigma_i \neq 0$ — i -ая компонента. Тогда векторы $p_i, i = \overline{1, n-d}$, будут линейно независимы в $\mathbf{R}^{n-d}$. Условие 3) леммы означает, что система (3.1.6) полностью управляема на отрезке T . По определению 2.1 для каждого $i = \overline{1, n-d}$ найдется управление $v_i(t) \in \mathbf{C}^r(T)$, гарантирующее существование единственного решения системы

$$x_1'(t) = J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r L_j(t)v_i^{(j)}(t), \quad (3.1.9)$$

удовлетворяющего условиям

$$x_1(t_0) = p_i, \quad x_1(t_1) = 0. \quad (3.1.10)$$

Формально построим управление

$$u(t, \mu) = \sum_{i=1}^{n-d} \mu_i v_i(t), \quad (3.1.11)$$

где $(\mu_1, \dots, \mu_{n-d}) = \mu$ — неизвестные параметры. Заметим, что при достаточно близких к нулю значениях μ_i управление (3.1.11) будет допустимым (см. определение 1.8).

Очевидно, что решение $x_1(t, \mu)$ задачи

$$x_1(t_1) = 0 \quad (3.1.12)$$

для системы

$$x_1'(t, \mu) = f_1(t, x_1(t), u(t, \mu), u'(t, \mu), \dots, u^{(r)}(t, \mu)), \quad (3.1.13)$$

существует и единственно при любых достаточно близких к нулю значениях параметров. В частности, при $\mu = 0$, $x_1(t, 0) \equiv 0$ на T . Кроме того, функция $x_1(t, \mu)$ в силу предположения 1) леммы будет иметь непрерывные частные производные по $\mu_1, \dots, \mu_{n-d}$.

Покажем, что параметр μ в (3.1.11) можно выбрать таким образом, что решение системы (3.1.13) будет удовлетворять условию

$$x_1(t_0, \mu) = x_0 \quad (3.1.14)$$

при любом векторе $x_0 \in \mathbf{R}^{n-d}$ достаточно близком по норме к нулю. Тем самым лемма будет доказана.

Продифференцируем тождество (3.1.13) по μ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_1(t, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1(t, \mu)}{\partial \mu} + \sum_{j=0}^r \frac{\partial f_1}{\partial u^{(j)}} \frac{\partial u^{(j)}(t, \mu)}{\partial \mu}. \quad (3.1.15)$$

Подставим в (3.1.15) значение $\mu = 0$. Принимая во внимание вытекающее из (3.1.11) равенство

$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial \mu}(t, 0) = \begin{pmatrix} v_1^{(j)}(t) & v_2^{(j)}(t) & \dots & v_{n-d}^{(j)}(t) \end{pmatrix}$$

и обозначения (3.1.8), получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t, 0) = J_1(t) \frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t, 0) + \sum_{j=0}^r L_j(t) \begin{pmatrix} v_1^{(j)}(t) & v_2^{(j)}(t) & \dots & v_{n-d}^{(j)}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.1.16)$$

Из (3.1.16) следует, что столбцы ξ_i матрицы

$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t, 0) = (\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \dots \ \xi_{n-d}(t))$$

являются решениями системы (3.1.9).

В силу выбора в этой системе управлений $v_i(t)$ упомянутые решения должны удовлетворять аналогам условий (3.1.10), т.е.

$$\xi_i(t_0) = p_i, \quad \xi_i(t_1) = 0, \quad i = \overline{1, n-d}.$$

Поэтому матрица

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t_0, 0) \right) = (\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-d})) \quad (3.1.17)$$

является неособенной.

Обратимся к равенству (3.1.14), которое будем рассматривать как систему $n - d$ уравнений с $n - d$ неизвестными μ . Как было отмечено выше, значения $x_0 = 0$, $\mu = 0$ удовлетворяют этой системе. В силу неособенности матрицы (3.1.17) для системы (3.1.14) выполняются все условия теоремы о неявной функции, согласно которой при любых достаточно близких к нулю значениях x_0 найдется решение этой системы $\mu_* = \phi_1(x_0)$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.1. Пусть выполнены все предположения теоремы 1.1. Если система (1.1.1) R -управляема на отрезке $T = [t_0, t_1]$, то она локально R -управляема в ноль на этом отрезке.

Доказательство. Непосредственно из теоремы 1.3 следует, что если ДАУ (1.1.1) R -управляема или локально R -управляема в ноль на отрезке T , то и система (3.1.6), (3.1.7) обладает тем же свойством. Справедливо и обратное, т.е. при наличии соответствующего свойства управляемости у системы (3.1.6), (3.1.7), то же свойство присуще и системе (1.1.1).

Очевидно, что любое решение системы (3.1.6) должно удовлетворять соотношению

$$x(t_1) = \Omega(t_1)x_1(t_0) + \Omega(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(\tau) \left(\sum_{j=0}^r L_j(\tau) u^{(j)}(\tau) \right) d\tau,$$

где $\Omega(t)$ — матрицант системы (3.1.6), т.е. решение матричной задачи Коши

$$\Omega'(t) + J_1(t)\Omega(t) = 0, \quad \Omega(t_0) = E_{n-d}.$$

Локальная R -управляемость в ноль системы (1.1.1) или (3.1.6), (3.1.7) означает, что существует допустимое управление $u(t)$, обеспечивающее выполнение равенства

$$0 = \Omega(t_1)x_{1,0} + \Omega(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(\tau) \left(\sum_{j=0}^r L_j(\tau) u^{(j)}(\tau) \right) d\tau \quad (3.1.18)$$

при любом векторе $x_{1,0} \in \mathbf{R}^{n-d}$ достаточно близким по норме к нулю.

В соответствии с изложенным выше R -управляемость ДАУ (1.1.1) равносильна полной управляемости системы (3.1.6). Известно [111], что система (3.1.6) вполне управляема на отрезке T , если и только если для любого вектора $h \in \mathbf{R}^{n-d}$ на T выполняется условие

$$h^\top \Omega^{-1}(t) (L_0(t) \ L_1(t) \ \dots \ L_r(t)) \neq 0. \quad (3.1.19)$$

В (3.1.18) управление будем искать в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^r \gamma_j (t - c)^{s+j},$$

где $c \notin T$ — фиксированное значение, $s \geq 0$ — достаточно большое целое число, $\gamma_j \in \mathbf{R}^l$ — неизвестные коэффициенты. Тогда

$$\text{colon}(u(t), u'(t), \dots, u^r(t)) = \mathcal{E}_r(t) \text{colon}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r), \quad (3.1.20)$$

где

$$\mathcal{E}_s(t) = \begin{pmatrix} \frac{s!}{s!}(t-c)^s E_l & \frac{(s+1)!}{(s+1)!}(t-c)^{s+1} E_l & \dots & \frac{(s+r)!}{(s+r)!}(t-c)^{s+r} E_l \\ \frac{s!}{(s-1)!}(t-c)^{s-1} E_l & \frac{(s+1)!}{s!}(t-c)^s E_l & \dots & \frac{(s+r)!}{(s+r-1)!}(t-c)^{s+r-1} E_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s!}{(s-r)!}(t-c)^{s-r} E_l & \frac{(s+1)!}{(s+1-r)!}(t-c)^{s+1-r} E_l & \dots & \frac{(s+r)!}{s!}(t-c)^s E_l \end{pmatrix}.$$

Умножив (3.1.18) слева на матрицу $\Omega(t_1)^{-1}$ и подставив (3.1.20), получим

$$-x_{1,0} = \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(t)(L_0(\tau) \dots L_r(\tau))\mathcal{E}_r(\tau) \text{colon}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r) d\tau.$$

В силу того, что матрица $\mathcal{E}_r(t)$ обратима $\forall t \in T$, с учетом условия (3.1.19) и непрерывности матричных коэффициентов системы (1.1.1) можно показать, что при достаточно большом значении s для всех ненулевых $h \in \mathbf{R}^{n-d}$ выполняется соотношение $h^\top N \neq 0$, где

$$N = \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(t)(L_0(\tau) \dots L_r(\tau))\mathcal{E}_r(\tau) d\tau.$$

Последнее означает полноту строчного ранга матрицы N . Таким образом, при достаточно большом s система (3.1.18) разрешима относительно неизвестных $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r$ при любом векторе $x_{1,0}$:

$$\text{colon}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r) = N^\top (NN^\top)^{-1} x_{1,0}. \quad (3.1.21)$$

Все матрицы, фигурирующие в формулах (3.1.20), (3.1.21), либо постоянны, либо непрерывны на T , а следовательно, ограничены на T . Поэтому, выбирая значения $x_{1,0}$ таким образом, чтобы $\|x_{1,0}\| < \delta$ при достаточно малом $\delta > 0$, можно добиться того, чтобы управление $u(t)$ было допустимым. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.2. Пусть:

1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D}), u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(T);$

2) $F(t, 0, 0, 0) = 0 \forall t \in T$;

3) выполнены условия $A), B), C)$ (см. п. 1.2 данной работы);

4) $\text{rank } \Gamma_{r+1,y}(\alpha_{r+1}) = \text{rank } \Gamma_{r,y}(\alpha_r) + n$.

Если система 1-го приближения (1.1.1) R -управляема или локально R -управляема в ноль на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I_0$, то ДАУ (3.1.1) является локально R -управляемой в ноль на этом отрезке.

Доказательство. В сделанных предположениях имеет место теорема 1.3, согласно которой на интервале I_0 ДАУ (3.1.1) эквивалентна системе (3.1.3), (3.1.4). По отношению к системе (3.1.3), (3.1.4) ДАУ (3.1.6), (3.1.7) является системой 1-го приближения.

Согласно лемме 3.1, если система (3.1.6), (3.1.7) R -управляема на некотором отрезке $T = [t_0, t_1]$, то система (3.1.3), (3.1.4) будет локально R -управляемой в ноль на этом отрезке.

Из теоремы 1.3 следует, что решения системы (3.1.3), (3.1.4) на некотором интервале I_0 будут также решениями системы (3.1.1) с начальными условиями $x(t_0) = 0, x(t_1) = x_1$ при одинаковом управлении. Это означает, что из R -управляемости или локальной R -управляемости в ноль системы (3.1.6), (3.1.7) следует локальная R -управляемость в ноль системы (3.1.1).

С другой стороны, система (1.1.1) является системой 1-го приближения для ДАУ (3.1.1). Система (1.1.1) и ее эквивалентная форма (1.1.7), (1.1.8) обладают одними и теми же свойствами управляемости. По теореме 1.4 система (1.1.7), (1.1.8) и система (3.1.6), (3.1.7) совпадают на интервале $I_0 \subseteq I$. Следовательно они обладают свойствами R -управляемости и локальной R -управляемости в ноль одновременно.

Отсюда следует, что R -управляемость или локальная R -управляемость в ноль системы (1.1.1) на отрезке $T \subset I_0$ влечет за собой локальную R -управляемость в ноль системы (3.1.1) на этом отрезке. Теорема доказана. $\square$

3.2 Локальная R -наблюдаемость

Для системы (3.1.1) определим наблюдаемый выход

$$y(t) = \phi(t, x). \quad (3.2.1)$$

В условиях теоремы 1.3 система (3.1.1) эквивалентна в смысле решений системе

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1), \quad (3.2.2)$$

$$x_2(t) = f_0(t, x_1), \quad t \in I_0 \subseteq I, \quad (3.2.3)$$

где $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q_1 x(t)$; $I_0 = (a_0 - \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$; функции f_1 и f_0 определены и имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов в $I \times \mathcal{X}$.

Подставив выражение для $x_2(t)$ из (3.2.3) в (3.2.1), получим выражение выходной функции

$$y(t) = \phi(t, x_1, x_2) = \phi(t, x_1, f_0(t, x_1)) = \phi_1(t, x_1), \quad t \in I_0, \quad (3.2.4)$$

не зависящее от $x_2(t)$.

Будем рассматривать начальные условия и выходные функции лишь в окрестности нуля. Из условия (3.1.2) следует, что $f_1(t, 0) = 0$, $f_0(t, 0) = 0$, $\phi(t, 0, 0) = 0$. В условиях теоремы 1.3 можно дать следующее определение.

Определение 3.2. [9, с. 366] Система (3.1.1), (3.2.1) называется *локально R -наблюдаемой* на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I_0$, если существует такое число $\delta > 0$, что для любых $z_0, \tilde{z}_0 \in \mathbf{R}^{n-d}$ из δ -окрестности точки $x_1 = 0$ выполняется

$$\phi(t, x_1(t, t_0, z_0)) \neq \phi(t, x_1(t, t_0, \tilde{z}_0)),$$

где $x_1(t, t_0, z_0)$ — решение системы (3.2.2) с начальным условием $x_1(t_0) = z_0$.

Пусть функции $f_1(t, x_1)$, $f_0(t, x_1)$, $\phi(t, x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируемы по x_1, x_2 в некоторой окрестности точки $x_1 = 0, x_2 = 0$. Тогда линейное приближение для системы (3.2.2)-(3.2.4) будет иметь вид

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0, \quad (3.2.5)$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) = 0, \quad (3.2.6)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t), \quad (3.2.7)$$

где

$$J_1(t) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, 0), \quad J_2(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1}(t, 0),$$

$$C(t) = (C_1(t) \ C_2(t)) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0).$$

Подставив выражение для $x_2(t)$ из (3.2.6) в формулу (3.2.7), получим выражение выходной функции, не зависящее от $x_2(t)$

$$y(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)(-J_2(t)x_1(t)) = (C_1(t) - C_2(t)J_2(t))x_1(t). \quad (3.2.8)$$

Приведем известный результат из работы [9], сформулировав его в терминах данной работы.

Теорема 3.3. *Если линейное приближение (3.2.5) полностью наблюдаемо на отрезке $[t_0, t_1]$, то нелинейная система (3.2.2) локально наблюдаема на этом отрезке.*

Следующая теорема является прямым следствием теоремы 3.3 и теоремы 1.4.

Теорема 3.4. *Пусть:*

- 1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$;
- 2) $F(t, 0, 0, 0) = 0 \ \forall t \in I$;
- 3) выполнены условия A), B), C) (см. п. 1.2 данной работы);
- 4) $\text{rank } \Gamma_{r+1, y}(\alpha_{r+1}) = \text{rank } \Gamma_{r, y}(\alpha_r) + n$.

Если линейная система (3.2.5) полностью наблюдаема по выходу (3.2.8) на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I_0$, то нелинейная система (3.1.1), (3.2.1) локально R -наблюдаема на этом отрезке.

Доказательство повторяет собой рассуждения в доказательствах теоремы 3.3 (см. работу [9, с. 366-368]) и теоремы 3.2.

3.3 Стабилизируемость по линейному приближению

3.3.1 Вспомогательные сведения

Как известно из доказательства леммы 1.3 (см. работу [60]), ДАУ (1.2.6), (1.2.7) получается как часть компонент неявной функции, удовлетворяющей r -продолженной системе (1.2.3).

Как известно, классическая теорема [54, с. 68] гарантирует существование неявной функции лишь в некоторой окрестности начальной точки. Для доказательства теоремы о стабилизируемости системы вида (1.2.6), (1.2.7) нам потребуется, по крайней мере, чтобы функции f_1 и f_0 были определены при всех $t \in I$. С этой целью воспользуемся следующим глобальным вариантом теоремы о неявной функции, который является прямым следствием более общего результата, полученного в [79].

Пусть A — $(p \times q)$ -матрица, $\chi \in \mathbf{R}^q$. Обозначим

$$L(A) = \max_{\|\chi\|_{\mathbf{R}^q}=1} \|A\chi\|_{\mathbf{R}^p}, \quad l(A) = \min_{\|\chi\|_{\mathbf{R}^q}=1} \|A\chi\|_{\mathbf{R}^p}.$$

Лемма 3.2. Пусть $\mathcal{W} \subseteq \mathbf{R}^m$ — выпуклое открытое множество, $\Phi(\xi, \eta) : \mathcal{W} \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$. Кроме того:

- 1) существует точка $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{W} \times \mathbf{R}^k$ такая, что $\Phi(\xi_0, \eta_0) = 0$;
- 2) $\Phi(\xi, \eta) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{W} \times \mathbf{R}^k)$;
- 3) $l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right) > 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathcal{W} \times \mathbf{R}^k$;

4) существует непрерывная функция $w(s) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ (где $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$), такая, что

$$w(s) > 0, \quad s \in (0, \infty), \quad (3.3.1)$$

$$\int_1^\infty \frac{ds}{w(s)} = \infty, \quad (3.3.2)$$

и

$$L \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right) / l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right) \leq w(\|\eta\|) \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathcal{W} \times \mathbf{R}^k.$$

Тогда в области $\mathcal{W}$ определена единственная неявная функция $\eta = g(\xi) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{W})$, такая, что $g(\xi_0) = \eta_0$ и

$$\Phi(\xi, g(\xi)) = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{W}.$$

Рассмотрим r -продолженную систему (1.2.3). Обозначим

$$\bar{Z}_j = (z_1, \dots, z_j), \quad \bar{V}_j = (v_1, \dots, v_j), \quad j = r, r+1.$$

Тогда матрицы (1.2.4) примут вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{r,z}(t, x, y, u, \bar{Z}_r, \bar{V}_r) &= \left(\partial \mathcal{F}_r / \partial \bar{Z}_r \right), \\ \Gamma_{r,y}(t, x, y, u, \bar{Z}_r, \bar{V}_r) &= \left(\partial \mathcal{F}_r / \partial y \quad \Gamma_{r,z} \right), \\ \Gamma_{r,x}(t, x, y, u, \bar{Z}_r, \bar{V}_r) &= \left(\partial \mathcal{F}_r / \partial x \quad \Gamma_{r,y} \right). \end{aligned}$$

По построению функция $\mathcal{F}_r$, определяющая систему (1.2.3), полилинейна по переменным $z_1, \dots, z_r, v_1, \dots, v_r$ и, следовательно, определена при всех вещественных значениях этих переменных.

В силу предположения (3.1.2) $\mathcal{F}_r(0) = 0$.

Допустим, что в области $\mathcal{D} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{V}_r$ (область $\mathcal{Z} \subseteq \mathbf{R}^{nr}$ изменения переменной $\bar{Z}_r$ будет определена ниже, $\mathcal{V}_r \subseteq \mathbf{R}^{lr}$ — окрестность точки $\bar{V}_r = 0$) $\text{rank } \Gamma_{r,z} = \rho = \text{const}$, и в матрице $\Gamma_{r,x}$ имеется квадратная

порядка $n(r+1)$ подматрица Δ_r , обратимая в нуле и включающая в себя ρ столбцов матрицы $\Gamma_{r,z}$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_{r,y}$:

$$\Delta_r(t, x, y, u, \bar{Z}_r, \bar{V}_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial y} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_1} \end{pmatrix}, \quad (3.3.3)$$

где

$$\text{colon}(x_1, x_2) = Q_1 x, \quad \text{colon}(Z_1, Z_2) = Q_2 \bar{Z}_r; \quad (3.3.4)$$

$x_1 \in \mathbf{R}^{n-d}$, $x_2 \in \mathbf{R}^d$, $Z_1 \in \mathbf{R}^\rho$, $Z_2 \in \mathbf{R}^d$; как и выше $d = nr - \rho$; Q_1 и Q_2 — матрицы перестановок строк.

Пусть:

- 1) множество $\mathcal{X}$, фигурирующее в определении множества $\mathcal{D}$, представляет собой прямое произведение $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathbf{R}^d$, где $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathbf{R}^{n-d}$ — окрестность точки $x_1 = 0$;
- 2) $\mathcal{Z} = \mathbf{R}^\rho \times \mathcal{Z}_2$, где $\mathcal{Z}_2 \subseteq \mathbf{R}^d$ — окрестность точки $Z_2 = 0$.

Лемма 3.3. Пусть:

- 1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})$;
- 2) $\text{rank } \Gamma_{r,z} = \rho = \text{const} \quad \forall (t, x, y, u, \bar{Z}_r, \bar{V}_r) \in \mathcal{D} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{V}_r$;
- 3) в матрице $\Gamma_{r,x}$ имеется квадратная порядка $n(r+1)$ подматрица $\Delta_r : \exists \Delta_r^{-1}(0)$, включающая в себя ρ столбцов матрицы $\Gamma_{r,z}$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_{r,y}$ (см. (3.3.3));
- 4) существует непрерывная функция $w(s) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ со свойствами (3.3.1), (3.3.2) такая, что при любых значениях $(t, x, y, u, \bar{Z}_r, \bar{V}_r) \in \mathcal{D} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{V}_r$ имеют место оценки

$$l(\Delta_r) > 0,$$

$$L \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial t} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial u} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \bar{V}_r} \right) / l(\Delta_r) \leq w(\|(x_2, y, Z_1)\|).$$

Тогда в области $\mathcal{G} = I \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{U} \times \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{V}_r$ определена единственная неявная функция, обращающая систему (1.2.3) в тождество на $\mathcal{G}$ и имеющая вид

$$y = f(t, x_1, u, \bar{V}_r), \quad (3.3.5)$$

$$x_2 = f_0(t, x_1, u, \bar{V}_r), \quad (3.3.6)$$

$$Z_1 = \varphi(t, x_1, u, Z_2, \bar{V}_r), \quad (3.3.7)$$

где функции f, f_0, φ имеют на областях определения непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов.

Справедливость леммы непосредственно вытекает из леммы 3.2 и леммы 1.3.

Умножим уравнение (3.3.5) слева на матрицу перестановок строк Q_1 из (3.3.4). В результате получим систему

$$y_1 = f_1(t, x_1, u, \bar{V}_r), \quad (3.3.8)$$

$$y_2 = f_2(t, x_1, u, \bar{V}_r), \quad (3.3.9)$$

где

$$\text{colon}(y_1, y_2) = Q_1 y, \quad (3.3.10)$$

$\text{colon}(f_1, f_2) = Q_1 f(t, x_1, u, \bar{V}_r)$. Размерности векторов y_1 и y_2 совпадают соответственно с размерностями векторов x_1 и x_2 из (3.3.4).

Полагая $y_1 = x'_1(t)$, $\text{colon}(x_1(t), x_2(t)) = Q_1 x(t)$, $u = u(t)$, $v_j = u^{(j)}(t)$ ($j = \overline{1, r}$), поставим в соответствие системе (3.3.8), (3.3.6) следующие ДАУ

$$x'_1(t) = f_1\left(t, x_1(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)\right), \quad (3.3.11)$$

$$x_2(t) = f_0\left(t, x_1(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)\right). \quad (3.3.12)$$

Построим для (1.2.1) $(r+1)$ -продолженную систему

$$\mathcal{F}_{r+1}(t, x, y, u, \bar{Z}_{r+1}, \bar{V}_{r+1}) = 0. \quad (3.3.13)$$

Предположим, что выполнено условие 3) леммы 3.3, и в $n(r+2) \times (n+d)$ -матрице $\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \end{pmatrix}$ имеется подматрица S размеров $n(r+2) \times n$ такая, что в некоторой области

$$\text{rank } \Gamma_{r+1, z} = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_1} & S \end{pmatrix} = \rho + n. \quad (3.3.14)$$

При этом

$$S = \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_3}(t, x, y, u, Z_1, Z_3, Z_4, \bar{V}_{r+1}) \quad (3.3.15)$$

где переменные Z_1, Z_2 определяются из (3.3.4),

$$\text{colon}(Z_3, Z_4) = Q_3 \text{colon}(Z_2, z_{r+1}),$$

Q_3 — матрица перестановок строк, $Z_3 \in \mathbf{R}^n$, $Z_4 \in \mathcal{Z}_4$, $\mathcal{Z}_4 \subseteq \mathbf{R}^d$ — окрестность точки $Z_4 = 0$.

Обозначим

$$\Delta_{r+1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial y} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_3} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial t} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial u} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_4} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \bar{V}_{r+1}} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.5. Пусть:

- 1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{r+2}(\mathcal{D})$, $u(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$;
- 2) $\text{rank } \Gamma_{r,z} = \rho = \text{const} \quad \forall (t, x, y, u, \bar{Z}_r, \bar{V}_r) \in \mathcal{D} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{V}_r$;
- 3) в матрице $\Gamma_{r,x}$ имеется квадратная порядка $n(r+1)$ подматрица (3.3.3), обратимая всюду в области $\mathcal{D} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{V}_r$, и включающая в себя ρ столбцов матрицы $\Gamma_{r,z}$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_{r,y}$;
- 4) в матрице $\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \end{pmatrix}$ имеется $(n(r+2) \times n)$ -подматрица (3.3.15) такая, что $\forall (t, x, y, u, Z_1, Z_3, Z_4, \bar{V}_{r+1}) \in \mathcal{H} = \mathcal{D} \times \mathbf{R}^\rho \times \mathbf{R}^n \times \mathcal{Z}_4 \times \mathcal{V}_{r+1}$ ($\mathcal{V}_{r+1} \subseteq \mathbf{R}^{(l+1)r}$ — окрестность точки $\bar{V}_{r+1} = 0$) имеют место равенства (3.3.14);
- 5) существует непрерывная функция $v(s) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ со свойствами

$$v(s) > 0, \quad s \in (0, \infty); \quad \int_1^\infty \frac{ds}{v(s)} = \infty,$$

такая, что при любых значениях $(t, x, y, u, Z_1, Z_3, Z_4, \bar{V}_{r+1}) \in \mathcal{H}$ справедливы оценки

$$l(\Delta_{r+1}) > 0,$$

$$L(\hat{\Delta})/l(\Delta_{r+1}) \leq v(\|(x_2, y, Z_1, Z_3)\|).$$

Тогда при каждом допустимом управлении $u(t)$, таком, что $(u'(t), \dots, u^{(r+1)}(t)) \in \mathcal{V}_{r+1} \forall t \in I$, любое решение системы (1.2.1) является решением системы (3.3.11), (3.3.12) и наоборот.

Доказательство. В предположениях 1)–3) в окрестности нуля определена неявная функция (3.3.5)–(3.3.7), обращающая в тождество первые $n(r+1)$ уравнений системы (3.3.13). Рассмотрим оставшиеся n уравнений

$$F_{r+1}(t, x, y, u, \bar{Z}_{r+1}, \bar{V}_{r+1}) = 0. \quad (3.3.16)$$

Заметим, что полилинейность функции F_{r+1} по переменным $z_1, \dots, z_{r+1}, v_1, \dots, v_{r+1}$ обеспечивает выполнение условия $F_{r+1}(0) = 0$.

Подставим в уравнение (3.3.16) функции (3.3.5)–(3.3.7), в результате получим систему

$$\tilde{F}_{r+1}(t, x_1, u, Z_3, Z_4, \bar{V}_{r+1}) = 0, \quad (3.3.17)$$

в которой, в силу предположения 4), матрица $\frac{\partial \tilde{F}_{r+1}}{\partial Z_3}$ обратима в некоторой окрестности нуля.

В условиях теоремы для системы (3.3.17) выполняются все предположения теоремы о неявной функции, согласно которой в некоторой окрестности нуля определена единственная непрерывно дифференцируемая функция

$$Z_3 = \phi_2(t, x_1, u, Z_4, \bar{V}_{r+1}), \quad (3.3.18)$$

удовлетворяющая уравнению (3.3.17). Подстановка (3.3.18) в функцию (3.3.7) преобразует последнюю к виду

$$Z_1 = \phi_1(t, x_1, u, Z_4, \bar{V}_{r+1}). \quad (3.3.19)$$

Таким образом, найдена единственная неявная функция (3.3.5), (3.3.6), (3.3.18), (3.3.19), определенная в некоторой окрестности нуля и имеющая непрерывные частные производные по своим аргументам. Эта функция при подстановке обращает систему (3.3.13) в тождество.

С другой стороны, в сделанных предположениях для системы (3.3.13) выполняются все условия леммы 3.2, в соответствии с утверждением которой в области $\mathcal{H}$ определена единственная непрерывно дифференцируемая неявная функция

$$\text{colon}(x_2, y, Z_1, Z_3) = \Psi(t, x_1, u, Z_4, \bar{V}_{r+1}), \quad (3.3.20)$$

удовлетворяющая системе (3.3.13). В силу единственности, эта функция совпадает с неявной функцией (3.3.5), (3.3.6), (3.3.18), (3.3.19) на области определения последней. Таким образом, неявная функция (3.3.20) является продолжением функции (3.3.5), (3.3.6), (3.3.18), (3.3.19) на всю область $\mathcal{H}$. Предположения 3)–5) теоремы гарантируют, что функция (3.3.20) будет иметь вид (3.3.5), (3.3.6), (3.3.18), (3.3.19).

Дальнейшее доказательство теоремы дословно повторяет доказательство леммы 1.3 (см. работу [60]). $\square$

Очевидно, что в предположениях теоремы 3.5 решение ДАУ (1.2.1) в общем случае зависит от r производных управления.

Предположения приведенной ниже теоремы включают в себя условия, обеспечивающие специальный вид эквивалентной формы для ДАУ (1.2.1). Этот результат используется в дальнейшем для доказательства теоремы о стабилизируемости по линейному приближению.

Теорема 3.6. Пусть:

- 1) выполнены все предположения теоремы 3.5;
- 2) $\text{rank } \Phi(t, x, y, u) = d \quad \forall (t, x, y, u) \in \mathcal{D}$, где $\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \end{pmatrix}$, переменные x_2 и y_2 определяются равенствами (3.3.4), (3.3.10);

3) в матрице Φ имеется $(d \times d)$ -подматрица обратимая всюду в области $\mathcal{D}$.

Тогда при каждом допустимом управлении $u(t)$, таком, что $(u'(t), \dots, u^{(r+1)}(t)) \in \mathcal{V}_{r+1} \forall t \in I$, любое решение системы (1.2.1) является решением системы

$$x_1'(t) = \varphi_1(t, x_1(t), u(t)), \quad (3.3.21)$$

$$x_2(t) = \varphi_0(t, x_1(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)) \quad (3.3.22)$$

и наоборот. В (3.3.21), (3.3.22) функции φ_1 и φ_0 непрерывно дифференцируемы на своих областях определения.

Доказательство. В предположениях 2), 3) теоремы существует матрица P перестановок строк, такая, что

$$PF(t, x, y, u) = \begin{pmatrix} F_1(t, x, y, u) \\ F_2(t, x, y, u) \end{pmatrix},$$

$F_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^d$, $\text{rank} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \right) = d \quad \forall (t, x, y, u) \in \mathcal{D}$. Кроме того, существует обратимая в $\mathcal{D}$ $(d \times d)$ -матрица $P_1(t, x, y, u)$ и $(d \times d)$ -матрицы перестановок $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ такие, что

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \right) = P_1(t, x, y, u) \left(\begin{array}{cc|cc} E_{d_1} & X_1 & O & Y_1 \\ O & X_2 & E_{d_2} & Y_2 \end{array} \right) \text{diag}\{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2\}, \quad (3.3.23)$$

где $d_1 + d_2 = d$, $X_i(t, x, y, u)$, $Y_i(t, x, y, u)$ ($i = 1, 2$) — некоторые матрицы соответствующих размеров. В правой части равенства (3.3.23) обе блочные матрицы, разделенные вертикальной чертой, имеют размеры $d \times d$.

Рассмотрим матрицу $\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} \right)$, которая представляет собой первые n строк матрицы (3.3.3), умноженные справа на матрицу $\text{diag}(E_d, Q_1)$ (Q_1 — матрица перестановок из (3.3.4)). Согласно пред-

положению 3) теоремы 3.5,

$$\text{rank} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial F}{\partial y_2} \right) = n \quad \forall (t, x, y, u) \in \mathcal{D}. \quad (3.3.24)$$

Из (3.3.23), (3.3.24) вытекает существование обратимой всюду в $\mathcal{D}$ $(n \times n)$ -матрицы $P_2(t, x, y, u)$, такой, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \left| \frac{\partial F}{\partial y_1} \right| \frac{\partial F}{\partial y_2} \right) = \\ & = P_2 \left(\begin{array}{cc|c|cc} O & W_1 & \mathcal{Y} & O & W_2 \\ E_{d_1} & X_1 & W_3 & O & Y_1 \\ O & X_2 & W_4 & E_{d_2} & Y_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & O & O \\ O & E_{n-d} & O \\ O & O & \tilde{Q}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{Y}(t, x, y, u) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}$ — квадратная матрица порядка $(n - d)$, $W_i(t, x, y, u)$ ($i = \overline{1, 4}$) — некоторые матрицы соответствующих размеров.

Предположение 2) теоремы влечет за собой тождества

$$W_i(t, x, y, u) \equiv O, \quad (t, x, y, u) \in \mathcal{D}, \quad i = 1, 2, \quad (3.3.25)$$

откуда с учетом условия (3.3.24)

$$\text{rank} \mathcal{Y}(t, x, y, u) = n - d \quad \forall (t, x, y, u) \in \mathcal{D},$$

следовательно, матрица $\mathcal{Y}$ обратима всюду в области $\mathcal{D}$.

Поскольку в сделанных предположениях $F_1(0) = 0$, то для уравнения

$$F_1(t, x, y, u) = 0 \quad (3.3.26)$$

выполняются все предположения теоремы о неявной функции, согласно которой в некоторой окрестности нуля определена неявная функция, удовлетворяющая уравнению (3.3.26). В силу свойства (3.3.25) эта неявная функция будет иметь вид

$$y_1 = \psi(t, x_1, u). \quad (3.3.27)$$

Подстановка (3.3.27) в систему (3.3.13) приводит к уравнению

$$\tilde{\mathcal{F}}_{r+1}(t, x, y_2, u, \bar{Z}_{r+1}, \bar{V}_{r+1}) = 0. \quad (3.3.28)$$

Условия 2), 3) леммы 3.3 и 3), 4) теоремы 3.5 гарантируют существование (по крайней мере, в окрестности нуля) неявной функции вида (3.3.6), (3.3.9), (3.3.18), (3.3.19), которая обращает в тождество систему (3.3.28).

Таким образом, показано, что в некоторой окрестности нуля определена непрерывно дифференцируемая функция вида (3.3.27), (3.3.6), (3.3.9), (3.3.18), (3.3.19), удовлетворяющая уравнению (3.3.13).

С другой стороны, в соответствии с доказательством теоремы 3.5, в области $\mathcal{H}$ (см. условие 5) теоремы 3.5) существует непрерывно дифференцируемая неявная функция вида (3.3.8), (3.3.9), (3.3.6), (3.3.18), (3.3.19), которая удовлетворяет в $\mathcal{H}$ системе (3.3.13) и (в силу единственности неявной функции) является продолжением функции (3.3.27), (3.3.6), (3.3.9), (3.3.18), (3.3.19) на всю область $\mathcal{H}$. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что в сделанных предположениях функция (3.3.8) будет иметь вид (3.3.27) $\forall(t, x_1, u) \in I \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{U}$.

С учетом вышесказанного, утверждение теоремы вытекает из утверждения теоремы 3.5. $\square$

3.3.2 Условия стабилизируемости

Будем предполагать, что в (1.2.1) $u(t)$ — скалярная функция.

В сделанных предположениях система (1.2.1) может быть представлена в виде

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) + r(t, x, y, u) = 0, \quad (3.3.29)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $U(t)$ определяются по формулам (3.1.5), функция $r(t, x, y, u)$ удовлетворяет условиям малости

$$\lim_{\|x\|, \|y\|, \|u\| \rightarrow 0} \frac{r(t, x, y, u)}{\|x\| + \|y\| + \|u\|} = 0. \quad (3.3.30)$$

Определение 3.3. Систему (1.2.1), допускающую представление (3.3.29), будем называть *стабилизируемой*, если существуют достаточно гладкие $(l \times n)$ -матрица $\Omega(t)$ и вектор-функция $\rho(t, x)$, такие, что при

$$u(t) = \Omega(t)x(t) + \rho(t, x),$$

($\rho(t, 0) \equiv 0$) нулевое положение равновесия замкнутой системы

$$F(t, x(t), x'(t), \Omega(t)x(t) + \rho(t, x(t))) = 0$$

асимптотически устойчиво при любых нелинейных функциях $r(t, x, y, u)$, $\rho(t, x)$, удовлетворяющих условиям малости (3.3.30) в окрестностях точки $x = 0$, $u = 0$.

Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.6. В этом случае ДАУ (3.3.21), (3.3.22) представляют собой эквивалентную форму для системы (1.2.1). Допустим, что в (3.3.21), (3.3.22) функции φ_1 и φ_0 обладают достаточной для дальнейших рассуждений гладкостью. В силу предположения (3.1.2),

$$\varphi_1(t, 0, 0) = 0, \quad \varphi_0(t, 0, \dots, 0) = 0,$$

система (3.3.21), (3.3.22) может быть представлена в виде

$$x_1'(t) = J_1(t)x_1(t) + c(t)u(t) + r_1(t, x_1, u), \quad (3.3.31)$$

$$x_2(t) = J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r G_j(t)u^{(j)}(t) + r_2(t, x_1, u, u', \dots, u^{(r)}), \quad (3.3.32)$$

где в условиях теорем 1.4 и 3.5

$$\begin{pmatrix} r_2(t, x_1, u, u', \dots, u^{(r)}) \\ r_1(t, x_1, u) \end{pmatrix} = -\mathcal{R}[r(t, x, y, u)], \quad (3.3.33)$$

функция $r(t, x, y, u)$ определяется из (3.3.29), оператор $\mathcal{R}$ (см. (1.1.4), (1.1.6)) преобразует систему первого приближения (1.1.1) в эквивалентную форму

$$x_1'(t) = J_1(t)x_1(t) + c(t)u(t), \quad (3.3.34)$$

$$x_2(t) = J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^r G_j(t)u^{(j)}(t), \quad (3.3.35)$$

где

$$\begin{pmatrix} -J_2(t) & E_d \\ -J_1(t) & O \end{pmatrix} = \mathcal{R}[B(t)]Q_1, \quad \begin{pmatrix} G_0 & G_1 & \dots & G_r \\ c(t) & O & \dots & O \end{pmatrix} = \\ = -(R_0 \dots R_r)U_r(t), \quad (3.3.36)$$

$U_r(t)$ определяется формулой (1.1.11).

Пусть в (3.3.34) элементы $(n-d) \times (n-d)$ -матрицы $J_1(t)$ и $(n-d)$ -мерного вектора $c(t)$ — достаточно гладкие функции. Введем в рассмотрение векторы

$$S_0(t) = c(t), \quad S_i(t) = J_1(t)S_{i-1}(t) - S'_{i-1}(t), \quad i = \overline{1, n-d},$$

и матрицу управляемости

$$\mathcal{S}(t) = (S_0(t) \ S_1(t) \ \dots \ S_{n-d-1}(t)). \quad (3.3.37)$$

Если $\mathcal{S}(t)$ обратима, можно определить функцию

$$\eta(t) = \mathcal{S}^{-1}(t)S_{n-d}(t) = \text{colon}(\eta_1(t), \dots, \eta_{n-d}(t)). \quad (3.3.38)$$

В [9, с. 373] доказан результат о стабилизируемости системы вида (3.3.21) (допускающей представление (3.3.31)), который может быть сформулирован в следующей форме.

Теорема 3.7. Пусть в системе первого приближения (3.3.34):

- 1) $J_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(I)$, $c(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(I)$;
- 2) матрица управляемости (3.3.37) — матрица Ляпунова;
- 3) в (3.3.38) каждая из функций $\eta_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(I)$ ($i = \overline{1, n-d}$) ограничена на I вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно.

Тогда существует величина $k_0 > 0$ такая, что при $0 < k \leq k_0$ уравнение (3.3.21) стабилизируемо по линейному приближению, т.е. найдется строка

$$h(t) = (h_1(t), \dots, h_{n-d}(t))H(t)$$

($H(t)$ — матрица Ляпунова, а каждая из функций $h_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(I)$ ограничена вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно) такая, что каковы бы ни были нелинейные функции $r_1(t, x_1, u)$, $\rho_1(t, x_1)$, подчиняющиеся условиям

$$\|r_1(t, x_1, u)\|_{\mathbf{R}^{n-d}} \leq k (\|x_1\|_{\mathbf{R}^{n-d}} + |u|), \quad |\rho_1(t, x_1)| \leq k \|x_1\|_{\mathbf{R}^{n-d}} \quad \forall (t, x_1, u) \in I \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{U} \quad (3.3.39)$$

с константой $k \in (0, k_0]$, при

$$u(t) = h(t)x_1(t) + \rho_1(t, x_1) \quad (3.3.40)$$

нулевое положение равновесия замкнутого уравнения

$$x'_1(t) = \varphi_1(t, x_1(t), h(t)x_1(t) + \rho_1(t, x_1)),$$

асимптотически устойчиво.

Будем считать, что в обратной связи (3.3.40), стабилизирующей уравнение (3.3.21), функции $h(t)$ и $\rho_1(t, x_1)$ достаточно гладкие. Последовательно дифференцируя равенство (3.3.40) и подставляя в него выражение (3.3.31) для $x'_1(t)$, получим следующее представление для производных от управления

$$u^{(j)}(t) = \Theta_j(t)x_1(t) + \nu_j(t, x_1, u) + \theta_j(t, x_1), \quad j = \overline{0, r}, \quad (3.3.41)$$

где

$$\Theta_0(t) = h(t), \quad \nu_0(t, x_1, u) = 0, \quad \theta_0(t, x_1) = \rho_1(t, x_1);$$

$$\Theta_j(t) = \Theta'_{j-1}(t) + \Theta_{j-1}(t)J_1(t),$$

$$\begin{aligned} \nu_j(t, x_1, u) = & \left(\Theta_{j-1} + \frac{\partial \nu_{j-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x_1} \right) (c(t)u(t) + r_1(t, x_1, u)) + \frac{\partial \nu_{j-1}}{\partial t} + \\ & + \left(\frac{\partial \nu_{j-1}}{\partial x_1} J_1(t) + \frac{\partial \nu_{j-1}}{\partial u} \Theta_1 \right) x_1 + \frac{\partial \nu_{j-1}}{\partial u} (\nu_1(t, x_1, u) + \theta_1(t, x_1)), \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

$$\theta_j(t, x_1) = \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial t} + \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x_1} J_1(t) x_1, \quad j = \overline{1, r}.$$

Результатом подстановки (3.3.41) в (3.3.32) будет уравнение

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \left(J_2(t) + \sum_{j=0}^r G_j(t) \Theta_j(t) \right) x_1(t) + \\ & + \sum_{j=0}^r G_j(t) (\nu_j(t, x_1, u) + \theta_j(t, x_1)) + r_2(t, x_1, u, \dots, u^{(r)}). \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

В следующей теореме сформулированы достаточные условия стабилизируемости по первому приближению ДАУ (1.2.1) со скалярным входом, эквивалентная форма которых имеет вид (3.3.21), (3.3.22).

Теорема 3.8. Пусть:

- 1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{3r+n-d+1}(\mathcal{D})$;
- 2) выполнены предположения 2)–5) теоремы 3.5 и предположения 2), 3) теоремы 3.6;
- 3) выполнены условия 2), 3) теоремы 3.7;
- 4) существует константа $\mu_0 > 0$ такая что для всех $(t, x_1, u, \dots, u^{(r)}) \in I \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}_r$ выполняется оценка

$$\left\| r_2(t, x_1, u, \dots, u^{(r)}) \right\|_{\mathbf{R}^d} \leq \mu_0 \left(\|x_1\|_{\mathbf{R}^{n-d}} + |u| + \dots + |u^{(r)}| \right),$$

где $r_2(t, x_1, u, \dots, u^{(r)})$ находится из равенства (3.3.33);

- 5) матрицы $\Theta_j(t)$ ($j = \overline{0, r}$) и $J_2(t) + \sum_{j=0}^r G_j(t) \Theta_j(t)$ ограничены;
- 6) существуют константы $\mu_1, \mu_2 > 0$ такие что для любых $j = \overline{0, r}$ и $(t, x_1, u) \in I \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{U}$ имеют место неравенства

$$\left\| \sum_{j=0}^r G_j(t) (\nu_j(t, x_1, u) + \theta_j(t, x_1)) \right\|_{\mathbf{R}^d} \leq \mu_1 (\|x_1\|_{\mathbf{R}^{n-d}} + |u|),$$

$$|\nu_j(t, x_1, u) + \theta_j(t, x_1)| \leq \mu_2 (\|x_1\|_{\mathbf{R}^{n-d}} + |u|).$$

Тогда существует величина $k_0 > 0$ такая, что при $0 < k \leq k_0$ найдется строка

$$h(t) = (h_1(t), \dots, h_{n-d}(t)) H(t)$$

($H(t)$ — матрица Ляпунова, а каждая из функций $h_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(I)$ ограничена вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно) такая, что каковы бы ни были нелинейные функции $\rho_1(t, x_1) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$ и $r_1(t, x_1, u)$, подчиняющиеся условиям (3.3.39) (где функция $r_1(t, x_1, u)$ находится из (3.3.33)), при выборе управления в форме (3.3.40) нулевое положение равновесия замкнутого уравнения

$$F(t, x(t), x'(t), h(t)x_1(t) + \rho_1(t, x_1(t))) = 0$$

асимптотически устойчиво.

Доказательство. В сделанных предположениях справедливы теоремы 3.6 и 1.4. По теореме 3.6 эквивалентная форма для ДАУ (1.2.1) (или, что то же, (3.3.30)) имеет вид (3.3.21), (3.3.22). В свою очередь, система (3.3.21), (3.3.22) допускает представление (3.3.31), (3.3.32), в котором, согласно теореме 1.4, матричные коэффициенты и функции r_1 и r_2 находятся по формулам (3.3.36), (3.3.33).

Предположения теоремы гарантируют выполнение для (3.3.21) всех условий теоремы 3.7. По этой теореме существует обратная связь (3.3.40), стабилизирующая уравнение (3.3.21). В книге [9, с. 299] приведен конструктивный алгоритм построения функции $h(t)$ для (3.3.40). Легко установить, что предположение 1) гарантирует включение $h(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$. Выбирая в (3.3.40) функцию $\rho_1(t, x_1)$ из пространства $\mathbf{C}^{2r+1}(I)$, мы добьемся, чтобы управление (3.3.40) обладало свойством $u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$, которое фигурирует в условиях теоремы 1.4.

Выше было показано, что для решения уравнения (3.3.32) (или, что то же, (3.3.22)) справедливо представление (3.3.43), (3.3.41), (3.3.42).

Нетрудно показать, что в предположениях 4)–6) $\|x_2\|_{\mathbf{R}^d} \rightarrow 0$ при $\|x_1\|_{\mathbf{R}^{n-d}} \rightarrow 0$, $|u| \rightarrow 0$.

Таким образом, при выборе управления в форме (3.3.40) нулевое положение равновесия системы (3.3.31), (3.3.32), а следовательно, и системы (3.3.21), (3.3.22), будет асимптотически устойчиво.

Согласно теореме 3.6, системы (3.3.21), (3.3.22) и (1.2.1) эквивалентны в смысле решений, поэтому обратная связь (3.3.40) стабилизирует и ДАУ (1.2.1). $\square$

3.4 Устойчивость нелинейных систем по первому приближению

Рассмотрим нелинейную систему ДАУ

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in I, \quad (3.4.1)$$

где $F(t, x, x')$ определена в области $\mathcal{D} = I \times \mathcal{X} \times \mathbf{R}^n$, $\mathcal{X}$ — окрестность точки $x = 0$.

Для получения результатов по устойчивости будем использовать результаты полученные в предыдущем разделе с той лишь поправкой, что в ДАУ (3.4.1) отсутствует управляющее воздействие.

Для системы (3.4.1) применимы приведенные ранее определения устойчивости решений (см. определения 2.8, 2.9).

В сделанных предположениях система (3.4.1) может быть представлена в виде

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + r(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad (3.4.2)$$

где $A(t)$, $B(t)$ определяются по формулам (3.1.5), функция $r(t, x, y)$ удовлетворяет условиям малости

$$\lim_{\|x\|, \|y\| \rightarrow 0} \frac{r(t, x, y)}{\|x\| + \|y\|} = 0.$$

Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.5. В этом случае ДАУ

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t)), \quad (3.4.3)$$

$$x_2(t) = f_0(t, x_1(t)), \quad (3.4.4)$$

представляет собой эквивалентную форму для системы (3.4.1). Допустим, что в (3.4.3), (3.4.4) функции f_1 и f_0 обладают достаточной гладкостью. Поскольку, в силу свойства (3.1.2), $f_1(t, 0) = 0$, $f_0(t, 0) = 0 \ \forall t \in I$, система (3.4.3), (3.4.4) может быть представлена в виде

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t)) = 0, \quad (3.4.5)$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + r_2(t, x_1(t)) = 0, \quad (3.4.6)$$

где в условиях теоремы 1.4

$$\begin{pmatrix} r_2(t, x_1) \\ r_1(t, x_1) \end{pmatrix} = \mathcal{R} [r(t, x, x')], \quad (3.4.7)$$

оператор $\mathcal{R}$ (см. (1.1.4), (1.1.6)) преобразует систему первого приближения (1.1.1) в эквивалентную форму (1.1.7), (1.1.8).

Теорема 3.9. Пусть:

- 1) $F(t, x, y) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$;
- 2) выполнены предположения 2)–5) теоремы 3.6;
- 3) существует константа $m > 1$ и функция $\mu(t) \in \mathbf{C}(I)$, имеющая неположительный характеристический показатель, такие что в некоторой окрестности точки $x_1 = 0$ функция $r_1(t, x_1)$ из (3.4.7) подчинена условию

$$\|r_1(t, x_1)\| \leq \mu(t)\|x_1\|^m;$$

- 4) система $x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0$ правильна и все ее характеристические показатели отрицательны;
- 5) в (3.4.6) J_2 имеет неположительный характеристический показатель и $\|r_2(t, x_1)\| \rightarrow 0$ при $\|x_1\| \rightarrow 0$.

Тогда тривиальное решение уравнения (3.4.2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. В предположениях 1), 2) справедлива теорема 1.4, в соответствии с утверждением которой справедливо равенство (3.4.7). По теореме 3.6 ДАУ (3.4.2) и (3.4.5), (3.4.6) имеют одни и те же решения.

В условиях 3), 4) для системы (3.4.5) выполняются все предположения теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [9, с. 351], согласно которой тривиальное решение этого уравнения асимптотически устойчиво, причем решения, начинающиеся вблизи точки $x_1 = 0$, стремятся к нулю экспоненциально.

Предположение 5) гарантирует, что $\|x_2(t)\| \rightarrow 0$ при $\|x_1\| \rightarrow 0$. Это означает, что тривиальное решение системы (3.4.5), (3.4.6) асимптотически устойчиво. Следовательно, тривиальное решение системы (3.4.2) также будет асимптотически устойчивым. $\square$

Пример 3.1. Проверим выполнение предположений теоремы 3.9 для ДАУ

$$(\chi'_3(t))^2 + \chi_2(t) = 0, \quad \chi_1(t) + \chi_3(t) = 0, \quad \chi'_1(t) + 2\chi'_3(t) - \chi_1(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (3.4.8)$$

где неизвестная функция $x(t) = \text{colon}(\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t))$, $\chi_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Ниже будет показано, что индекс неразрешенности ДАУ (3.4.8) (см. определение 1.7) равен двум, кроме того, система нелинейна по

x' , а матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial x'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\chi'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет переменный ранг.

Очевидно, что имеет место условие 1). Покажем, что предположения 2) - 5) теоремы 3.5 выполняются при $r = 2$. Для этого построим три дифференциальные продолжения

$$2\chi'_3\chi''_3 + \chi'_2 = 0, \quad \chi'_1 + \chi'_3 = 0, \quad \chi''_1 + 2\chi''_3 - \chi'_1 = 0, \quad (3.4.9)$$

$$2(\chi''_3)^2 + 2\chi'_3\chi'''_3 + \chi''_2 = 0, \quad \chi''_1 + \chi''_3 = 0, \quad \chi'''_1 + 2\chi'''_3 - \chi''_1 = 0, \quad (3.4.10)$$

$$6\chi_3''\chi_3''' + 2\chi_3'\chi_3^{IV} + \chi_2''' = 0, \quad \chi_1''' + \chi_3''' = 0, \quad \chi_1^{IV} + 2\chi_3^{IV} - \chi_1''' = 0 \quad (3.4.11)$$

и матрицу

$$\Gamma_{3,x} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|cc|ccc} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 2\chi_3' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2\chi_3'' & 0 & 0 & 2\chi_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 2\chi_3''' & 0 & 1 & 4\chi_3'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 2\chi_3^{IV} & 0 & 0 & 6\chi_3''' & 0 & 1 & 6\chi_3'' \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \parallel \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 2\chi_3' & & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (3.4.12)$$

Проверим условие 2). Легко увидеть, что

$$\text{rank } \Gamma_{1,z} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\chi_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \chi_3' = 0 \\ 2, & \chi_3' \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{но } \text{rank } \Gamma_{2,z} = \text{rank} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2\chi_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4\chi_3'' & 0 & 0 & 2\chi_3' \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) = \rho = 4 \text{ при любых}$$

значениях переменных.

Двойной чертой матрица $\Gamma_{3,x}$ разделена на четыре блока, при этом левый верхний блок представляет собой матрицу $\Gamma_{2,x}$. Фигурирующая в условии 3) матрица Δ_2 (см. (3.3.3)) существует, ее столбцы в матрице $\Gamma_{2,x}$ выделены рамками. Таким образом, предположение

3) теоремы 3.5 также выполнено, при этом $d = nr - \rho = 2$ и в (3.3.4)

$$x_1 = \chi_1, \quad x_2 = (\chi_2, \chi_3), \quad Z_1 = (\chi_1'', \chi_2'', \chi_3'', \chi_3'''), \quad Z_2 = (\chi_1''', \chi_2'''),$$

так что $y_1 = \chi_1', \quad y_2 = (\chi_2', \chi_3')$.

Проверим условие 4). В матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Z_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_1'''} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_2'''} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_1^{IV}} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_2^{IV}} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_3^{IV}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 2\chi_3' \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \end{pmatrix}$$

столбцы матрицы S из (3.3.15) выделены рамкой. Нетрудно убедиться, что $\text{rank } \Gamma_{3,z} = \rho + n = 7$ и

$$\text{rank} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Z_1} S \right) = \text{rank} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 2\chi_3' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4\chi_3'' & 2\chi_3' & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6\chi_3''' & 6\chi_3'' & 0 & 1 & 2\chi_3' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) = 7.$$

Таким образом, условие (3.3.14), а тем самым и условие 4) теоремы 3.5, выполнено, причем $Z_3 = \text{colon}(\chi_1''', \chi_2''', \chi_3^{IV})$, $Z_4 = \text{colon}(\chi_1^{IV}, \chi_2^{IV})$.

Для проверки предположения 5) достаточно получить оценку снизу для величины $l(\Delta_3) = \min_{\|\varkappa\|_{\mathbf{R}^{12}}=1} \|\Delta_3 \varkappa\|_{\mathbf{R}^{12}}$ и оценку сверху для

$L(\hat{\Delta}) = \max_{\|\hat{\mathcal{K}}\|_{\mathbf{R}^4}=1} \|\hat{\Delta}\hat{\mathcal{K}}\|_{\mathbf{R}^{12}}$. Для удобства выберем норму вектора

$\|\mathcal{K}\|_{\mathbf{R}^n} = \sum_{j=1}^n |\mathcal{K}_j|$ ($\mathcal{K}_j$ — компоненты вектора $\mathcal{K}$), которая индуцирует

матричную норму $\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}|$. Поскольку

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial t} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Z_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial t} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_1^{IV}} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_2^{IV}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то $\|\hat{\Delta}\hat{\mathcal{K}}\|_{\mathbf{R}^{12}} = 2|\hat{\mathcal{K}}_2| + |\hat{\mathcal{K}}_3|$. С учетом того, что $|\hat{\mathcal{K}}_2| \leq 1$ и $|\hat{\mathcal{K}}_3| \leq 1$, получаем оценку $L(\hat{\Delta}) \leq 3$.

Выпишем матрицу

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial y} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Z_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Z_3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_3} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_1'} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_2'} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_3'} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_1''} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_2''} \\ & & & & & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_3''} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_1'''} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_2'''} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_3'''} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi_3^{IV}} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 1 & 0 & & 0 & 0 & 2\chi'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 1 & 2\chi''_3 & 0 & 0 & 2\chi'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 0 & 2\chi'''_3 & 0 & 1 & 4\chi''_3 & 0 & 0 & 2\chi'_3 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 0 & 2\chi_3^{IV} & 0 & 0 & 6\chi'''_3 & 0 & 1 & 6\chi''_3 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\chi'_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}.$$

Справедливость неравенства $l(\Delta_3) > 0$ следует из обратимости матрицы Δ_3 при всех вещественных значениях аргументов. Пусть $\Delta_3 \mathbf{x} = \beta$, тогда $\mathbf{x} = \Delta_3^{-1} \beta$. Оценив по норме, получим $1 = \|\mathbf{x}\| = \|\Delta_3^{-1} \beta\| \leq \|\Delta_3^{-1}\| \|\beta\|$, откуда $\|\beta\| \geq \frac{1}{\|\Delta_3^{-1}\|}$. Таким образом, $l(\Delta_3) \geq \frac{1}{\|\Delta_3^{-1}\|}$. Матрица Δ_3^{-1} легко находится с использованием пакета MATLAB

$$\Delta_3^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 1 & 0 & & -2\chi'_3 & 0 & 2\chi'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \alpha_{1,1} & 1 & \alpha_{2,1} & -2\chi'_3 & 0 & 2\chi'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \alpha_{1,2} & 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} & 1 & \alpha_{4,2} & -2\chi'_3 & 0 & 2\chi'_3 \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & & \alpha_{1,3} & 0 & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} & 0 & \alpha_{4,3} & \alpha_{5,3} & 1 & \alpha_{6,3} \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\chi'_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{array},$$

где $\alpha_{1,1} = -2\chi''_3 + 2\chi'_3$, $\alpha_{1,2} = -2\chi'''_3 + 4\chi''_3 - 2\chi'_3$, $\alpha_{1,3} = -2\chi_3^{IV} + 6\chi'''_3 - 6\chi''_3 + \chi'_3$, $\alpha_{2,1} = 2\chi''_3 - 4\chi'_3$, $\alpha_{2,2} = 2\chi''_3 - 8\chi'_3 + 4\chi'_3$, $\alpha_{2,3} =$

$$2\chi_3^{IV} - 12\chi_3''' + 12\chi_3'' - 2\chi_3', \alpha_{3,2} = -4\chi_3'' + 2\chi_3', \alpha_{3,3} = -6\chi_3''' + 6\chi_3'' - \chi_3', \\ \alpha_{4,2} = 4\chi_3'' - 4\chi_3', \alpha_{4,3} = 6\chi_3''' - 12\chi_3'' + 2\chi_3', \alpha_{5,3} = -6\chi_3'' + \chi_3', \alpha_{6,3} = 6\chi_3'' - 2\chi_3'.$$

Легко получить оценку

$$\|\Delta_3^{-1}\| \leq 2(6 + 6|\chi_3'| + 11|\chi_3''| + 7|\chi_3'''| + |\chi_3^{IV}|) \leq \\ \leq 2(6 + 11\|(x_1, y, Z_1, Z_2)\|).$$

Тем самым, $L(\hat{\Delta})/l(\Delta_3) \leq L(\hat{\Delta})\|\Delta_3^{-1}\| \leq 6(6 + 11\|(x_1, y, Z_1, Z_2)\|)$. Очевидно, что функция $v(s) = 6(6 + 11s)$ обладает всеми свойствами, обеспечивающими выполнение предположения 5) теоремы 3.5.

Проверим оставшиеся условия 3) - 5) теоремы 3.9. Для этого нам требуется построить эквивалентную форму для системы первого приближения.

Найдем матрицы

$$A(t) = \frac{\partial F(t, x, y)}{\partial y}(t, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ B(t) = \frac{\partial F(t, x, y)}{\partial x}(t, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда ДАУ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1'(t) \\ \chi_2'(t) \\ \chi_3'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \\ \chi_3(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.4.13)$$

будет системой первого линейного приближения для системы (3.4.8).

Проверим выполнение предположений леммы 1.1. Очевидно, что условие 1) выполнено. Для проверки условий 2)-3) построим 2 дифференциальных продолжения системы (3.4.13)

$$\chi_2' = 0, \quad \chi_1' + \chi_3' = 0, \quad \chi_1'' + 2\chi_3'' - \chi_1' = 0,$$

$$\chi_2'' = 0, \quad \chi_1'' + \chi_3'' = 0, \quad \chi_1''' + 2\chi_3''' - \chi_1'' = 0.$$

Очевидно,

$$\text{rank } D_{2,z} = \text{rank} \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) = 4 = \text{const} \quad \forall t \in I.$$

Таким образом, выполнено условие 2).

Рамкой в матрице

$$D_{2,x} = \left(\begin{array}{c|ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (3.4.14)$$

выделены столбцы, которые входят в разрешающий минор. Таким образом, выполнено условие 3), и существует оператор вида (1.1.4) со свойством (1.1.5). Матрица перестановок столбцов Q_1 в нашем случае будет единичной. Для того чтобы найти оператор $\mathcal{R}$, выпишем матрицу

$$\Lambda_2(t) = D_{2,x}(t) \text{diag} \left(Q_1^{-1} \begin{pmatrix} O \\ E_2 \end{pmatrix}, Q_1^{-1}, \dots, Q_1^{-1} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 2 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Далее по формуле (1.1.6) получим значения коэффициентов оператора $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} (R_0(t) \ R_1(t) \ R_2(t)) &= (E_3 \ O \ \dots \ O) \Lambda_2^\top(t) (\Lambda_2(t) \Lambda_2^\top(t))^{-1} = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}. \quad (3.4.15)$$

Подействовав оператором (3.4.15) на ДАУ (3.4.13), получим эквивалентную форму для ДАУ (3.4.13)

$$\chi_1'(t) + \chi_1(t) = 0, \quad (3.4.16)$$

$$\begin{pmatrix} \chi_2(t) \\ \chi_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \chi_1(t) = 0, \quad (3.4.17)$$

при этом $d = 2$.

Спектр системы (3.4.16) состоит из одного числа $\lambda = -1$. Вычислим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } \tilde{B}(\tau) d\tau - d = 1 - d = -1.$$

Следовательно, система (3.4.16) правильна (см. определение 2.18), и все ее характеристические показатели отрицательны, т.е. выполнено условие 4).

Проверим условие 5) теоремы 3.9. Для этого вычислим характеристические показатели матрицы $J_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ из (3.4.17).

$$\chi[J_2(t)] = \chi[\|J_2(t)\|] = \chi[1] = 0.$$

Поскольку функция $F(t, x, x')$ и ее производные не зависят от t (следовательно, ограничены по t), то выполнены условия 3) и 5) теоремы 3.9.

Таким образом выполнены все условия теоремы 3.9. В соответствии с утверждением этой теоремы тривиальное решение системы (3.4.8) является асимптотически устойчивым.

Для проверки полученной эквивалентной формы найдем неявную функцию, удовлетворяющую системе (3.4.8) - (3.4.10),

$$\chi_2 = -\chi_1^2, \chi_3 = -\chi_1, \chi_1' = -\chi_1, \quad (3.4.18)$$

$$\begin{aligned} \chi_2' &= 2\chi_1\chi_1', \chi_3' = \chi_1, \chi_1'' = \chi_1, \chi_2'' = \chi_1(\chi_1''' - 3\chi_1), \\ \chi_3'' &= -\chi_1, \chi_3''' = 1/2(\chi_1 - \chi_1'''). \end{aligned}$$

Тогда эквивалентная форма для системы (3.4.8) имеет вид

$$\chi_1'(t) = -\chi_1(t), \quad (3.4.19)$$

$$\begin{aligned} \chi_2(t) &= -\chi_1^2(t), \\ \chi_3(t) &= -\chi_1(t), \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

где $x_1(t) = \chi_1(t)$, $x_2(t) = \text{colon}(\chi_2(t), \chi_3(t))$.

Система (3.4.8) имеет общее решение

$$\chi_1(t) = ce^{-t}, \chi_2(t) = -c^2e^{-2t}, \chi_3(t) = -ce^{-t},$$

где $c \in \mathbf{R}$ — произвольная константа.

Очевидно, что тривиальное решение ДАУ (3.4.8) экспоненциально устойчиво.

Заключение

В диссертационной работе для исследования свойств как линейных, так и нелинейных ДАУ, была использована структурная форма, называемая эквивалентной, в которой разделены “алгебраическая” и “дифференциальная” подсистемы. Преимущества такого подхода обусловлены тем, что эта структурная форма эквивалентна исходной системе в смысле решений, автоматически решает задачу о согласовании начальных данных, и при ее построении не используется замена переменных. Кроме того, в линейном случае построение эквивалентной формы отличается конструктивностью, а существование этой формы для нелинейных ДАУ допускает исследование качественных свойств по линейному приближению при произвольно высоком индексе неразрешенности.

В первой главе для сопряженной линейной ДАУ построена эквивалентная структурная форма и доказано, что оператор, преобразующий к этой форме, обладает правым обратным. Также была доказана теорема об одновременной разрешимости исходной системы ДАУ и соответствующей сопряженной системы. Эти результаты носят законченный характер.

Во второй главе для линейных ДАУ получены условия R -управляемости и R -наблюдаемости, в том числе в терминах матриц управляемости и наблюдаемости. Доказаны теоремы, связывающие эти понятия. Для систем индекса 1 получены условия детектируемости. На основе приведения линейной ДАУ с векторным управлением к системе со скалярным управляющим воздействием были получены

условия стабилизируемости. В условиях существования эквивалентной формы были получены критерии правильности и приводимости ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности.

За рамками диссертационной работы осталось исследование других типов управляемости ДАУ, например, импульсной управляемости, сильной управляемости, управляемости на бесконечности, задач стартового управления и др. Техника, использованная для получения условий стабилизируемости, т.е. переход к системе со скалярным входом, может быть в дальнейшем использована для получения условий детектируемости ДАУ произвольного индекса.

В третьей главе были получены условия локальной R -управляемости в ноль для нелинейной системы ДАУ и локальной R -наблюдаемости. Также были доказаны теоремы об устойчивости по первому приближению и стабилизируемости ДАУ со скалярным входом.

Полученные критерии создают предпосылки для исследования задач оптимального управления. Перспектива дальнейших исследований также связана с изучением других типов управляемости и наблюдаемости нелинейных систем, в частности, с исследованием ДАУ с векторным управлением.

Литература

- [1] Бояринцев Ю.Е., Бояринцева Т.П. *Замечание о неявной разностной схеме, аппроксимирующей систему уравнений Стокса*// Численные методы анализа и их приложения. Иркутск: Изд-во СЭИ СО АН СССР, 1983. С. 127–131.
- [2] Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В. *Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы*. Сибирская издательская фирма РАН “Наука”, 2006.
- [3] Бояринцев Ю.Е. *Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*. Новосибирск: Наука, 1988.
- [4] Бояринцев Ю.Е. *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. Новосибирск: Наука, 1980.
- [5] Виноградов А.М., Красильщик Н.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1986.
- [6] Власенко Л.А., Руткас А.Г. *Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения* // Математические заметки. 1996. Т. 60, № 4. С. 597–601.
- [7] Влах И., Сингхал К. *Машинные методы анализа и проектирования электронных схем*. М.: Радио и связь, 1988.

- [8] Габасов Р., Кириллова Ф. *Качественная теория оптимальных процессов*. М.: Наука, 1971.
- [9] Гайшун И.В. *Введение в теорию линейных нестационарных систем*. Минск: Изд-во Института математики НАН Беларуси, 1999.
- [10] Гайшун И.В. *Канонические формы, управление показателями Ляпунова и стабилизируемость линейных нестационарных систем* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 6. С. 24–32.
- [11] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1988.
- [12] Д'Анжело Г. *Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез*. М.: Машиностроение, 1974.
- [13] Демиденко Г.В., Успенский С.В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*. Новосибирск: Научная книга, 1998.
- [14] Демиденко Г.В. *Изоморфные свойства одного класса матричных дифференциальных операторов* // Докл. Академии наук. 2003. Т. 391, № 1. С. 10–13.
- [15] Демиденко Г.В. *Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа* // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076.
- [16] Демиденко Г.В. *Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа. II* // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1060–1069.
- [17] Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967.
- [18] Еругин Н.П. *Приводимые системы*. Труды Математического института им. В.А. Стеклова. Т. 13. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946.

- [19] Зубова С.П. *Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами* // Математические заметки. 2010. Т. 88, вып. 6. С. 884–895.
- [20] Зубова С.П. *Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом* // Доклады РАН. 2012. Т. 447, № 6. С. 599–602.
- [21] Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховых пространствах*. М.: Наука, 1971.
- [22] Курина Г.А. *Управление в форме обратной связи для линейно-квадратичной задачи оптимального управления в случае вырожденного условия Лежандра* // Теория и системы управления. 2000. N 2. С. 85–89.
- [23] Логинов Б.В. *Об определении уравнения разветвления его группой симметрии* // Доклады РАН. 1993. Т. 331, № 6. С. 677–600.
- [24] Матвеева И.И. *Задача Коши для систем с вырожденной матрицей при производной по времени* // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1338–1356.
- [25] Матвеева И.И. *Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для систем не типа Коши-Ковалевской* // Сиб. журн. индустр. мат. 2001. Т. 4, № 2. С. 184–204.
- [26] Мельникова И.В., Альшанский М.А. *Корректность вырожденной задачи Коши* // Доклады РАН. 1994. Т. 336, № 1. С. 17–20.
- [27] Мельникова И.В., Ануфриева У.А. *Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами* // СМФН. 2005. № 14. С. 3–156.

- [28] Петренко П.С. *Детектируемость линейных систем дифференциально-алгебраических уравнений* // Известия ИГУ. Математика. 2013. Т. 6, № 3. С. 109–116.
- [29] Петренко П.С. *Детектируемость линейных систем дифференциально-алгебраических уравнений* // Тезисы докладов II Российско-монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению, Иркутск(Россия) - Ханх (Монголия). 25 июня - 1 июля 2013. С. 38.
- [30] Петренко П.С. *К вопросу об R -управляемости и R -наблюдаемости алгебро-дифференциальных систем* // Труды X Международной Четаевской конференции, Казань, КНИТУ-КАИ. 12-16 июня 2012. Том 1, Секция 1, Аналитическая механика. С. 409–410.
- [31] Петренко П.С. *Локальная R -управляемость в ноль нелинейных алгебро-дифференциальных систем* // Известия ИГУ. Математика. 2011. Т. 4, № 4. С. 101–115.
- [32] Петренко П.С. *О локальной управляемости и наблюдаемости нелинейных алгебро-дифференциальных систем* // Тезисы докладов “Ляпуновские чтения”, Иркутск, ИДСТУ СО РАН. 28-30 ноября 2011. С. 36.
- [33] Петренко П.С. *Стабилизируемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем* // Тезисы докладов III Международной школы-семинара “Нелинейный анализ и экстремальные задачи”, ИДСТУ СО РАН, Иркутск. 25 июня - 1 июля 2012. С. 38.
- [34] Петренко П.С. *Стабилизируемость систем дифференциально-алгебраических уравнений* // Тезисы докладов Международной

конференции “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений”, Новосибирск, ИМ им. Соболева СО РАН, НГУ. 18-24 августа 2013 г.

- [35] Петренко П.С. *R-наблюдаемость и R-управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем* // Тезисы докладов “Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий”, Иркутск, ИДСТУ СО РАН. 19-20 декабря 2010. С. 38.
- [36] Руткас А.Г. *Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$* // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1996–2010.
- [37] Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, N 4. С. 47–74.
- [38] Сенди К. *Современные методы анализа электрических систем*. М.: Энергия, 1971.
- [39] Сидоров Н.А., Романова О.А. *О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516–1526.
- [40] Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. *Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при старших производных* // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 23, № 4. С. 726–728.
- [41] Смирнов Е.Я. *Некоторые задачи математической теории управления*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
- [42] Тонков Е.Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.

- [43] Тонков Е.Л. *Стабилизация и глобальная управляемость почти-периодической линейной системы* // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 15, №4. С. 758–759.
- [44] Фалалеев М.В., Коробова О.В. *Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах* // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 916–927.
- [45] Фалалеев М.В. *Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах* // СМЖ. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
- [46] Федоров В.Е., Плеханова М.В. *Задача стартового управления для класса полулинейных распределенных систем соболевского типа* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 259–267.
- [47] Федоров В.Е., Рузакова О.А. *Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах* // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 618–628.
- [48] Федоров В.Е. *Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов* // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, N 3. С. 173–200.
- [49] Федоров В.Е. *Обобщение теоремы Хилле-Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах* // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426–448.
- [50] Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*. Новосибирск: Наука, 2003.
- [51] Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. *Управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем* // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 62–75.

- [52] Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.
- [53] Чистяков В.Ф. О расширении линейных систем, не разрешенных относительно производных // Сиб. мат. журнал. 1993. Т. 34, № 3. С. 209–221.
- [54] Шилов Г.Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных), части 1-2. М.: Наука, 1972.
- [55] Щеглова А.А., Петренко П.С. Правильные системы дифференциально-алгебраических уравнений // Известия ИГУ. Математика. 2013. Т. 6, № 4. С. 107–127.
- [56] Щеглова А.А., Петренко П.С. R -наблюдаемость и R -управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // Известия вузов. Математика. 2012. № 3. С. 73–91.
- [57] Щеглова А.А. Нелинейные алгебро - дифференциальные системы // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 4. С. 931–948.
- [58] Щеглова А.А. Стабилизируемость линейных алгебро-дифференциальных систем управления с одним входом // АиТ. 2010. № 9. С. 33–56.
- [59] Щеглова А.А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.
- [60] Щеглова А.А. Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 57–80.

- [61] Ascher U.M., Petzold L.R. *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. Philadelphia: SIAM, 1998.
- [62] Bajić V.B. *Partial exponential stability of semi-state systems* // Int. J. Contr. 1986. V. 44, N 5. P. 1383–1394.
- [63] Bender J., Laub A.J. *The linear-quadratic optimal regulator for descriptor system* // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. AC-23, № 1. P. 672–688.
- [64] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations (classics in applied mathematics; 14)*. Philadelphia: SIAM, 1996.
- [65] Bunse-Gerstner A., Mehrmann V., Nichols N.K. *Regularization of descriptor system by output feedback* // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. P. 1742–1748.
- [66] Campbell S.L., Gear C.W. *The index of general nonlinear DAEs* // Numer. Math. 1995. № 72. P. 173–196.
- [67] Campbell S.L., Griepentrog E. *Solvability of general differential algebraic equations* // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1995. N 16. P. 257–270.
- [68] Campbell S.L., Nichols N.K., Terrell W.J. *Duality, observability, and controllability for linear time-varying descriptor systems* // Circ, Syst. and Sign. Process. 1991. V. 10. P. 455–470.
- [69] Campbell S. L., Petzold L. R. *Canonical forms and solvable singular systems of differential equations* // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1983. N 4. P. 517–512.

- [70] Campbell S.L., Terrell W.J. *Observability of linear time varying descriptor systems* // CRSC Technical Report 072389-01. Center for Research in Scientific Computatuon, North Carolina University. 2003.
- [71] Campbell S.L. *Comments on 2-D descriptor systems* // Automatica. 1991. V. 27, N 1. P. 129–136.
- [72] Campbell S.L. *Linearization of DAEs along trajectories* // ZAMP. 1995. № 46. P. 70–84.
- [73] Campbell S.L. *Non-BDF methods for the solution of linear time varying implicit differential equations* // Proc. Amer. Contr. Conf. San Diego, Calif. 5–6 June, 1984. V. 3. P. 1315–1318.
- [74] Campbell S.L. *Singular systems of differential equations*. San-Francisco: Pitman, 1980.
- [75] Campbell S.L. *Singular systems of differential equations 2*. San-Francisco: Pitman, 1982.
- [76] Campbell S.L. *Uniqueness of completions for linear time varying differential algebraic equations* // Linear Algebra and Applications. 1992. № 161. P. 55–67.
- [77] Christodoulou M.A., Paraskevopoulos P.N. *Solvability, controllability, and observability of singular systems* // J. Opt. Cont. Theory and Appl. 1985. № 45. P. 53–72.
- [78] Cobb D.J. *Controllability, observability, and duality in singular systems* // IEEE Trans. Aut. Control. 1984. V. AC 29, № 12. P. 1076–1082.
- [79] Cristea M. *A note on global implicit function theorem* // Journal of inequalities in pure and applied mathematics. 2007. V. 8, № 4. Article 100.

- [80] CWI <http://www.cwi.nl/ftp/IVPtestset/>. Test Set for IVP Solvers.
- [81] Dai L. *Singular control system*. Lecture notes in control and information sciences, 118. Berlin, Heidelberg, N.Y: Springer-Verlag, 1989.
- [82] Duan G.R., Irwin G.W., Liu G.P. *Robust stabilization of descriptor linear systems via proportional-plus-derivative state feedback* // Proc. of the American Control Conference. San Diego, California. June 1994. P. 2981–2982.
- [83] Du N.H., Linh V.H., Mehrmann V. *Robust stability of differential-algebraic equations* // In: Surveys in Differential-Algebraic Equations I (Editors: A. Ilchmann, T. Reis). DAE-F. Springer, 2013. 63-95.
- [84] Eich-Soellner E., Führer C. *Numerical methods in multibody dynamics*. Stuttgart: B.G. Teubner, 1998.
- [85] Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces*. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, 1999.
- [86] Fraysse V., Gueury M., Nicoud F., Toumazou V. *Spectral portraits for matrix pencils* // CERFACS Tehnical Report TR/PA/96/19. CERFACS. 42av, Coriolis, 31057 Thoulouse Cedex, France, 1996.
- [87] Griepentrog E., Maerz R. *Differential-algebraic equations and their numerical treatment*. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlag gesellschaft, 1986.
- [88] Hanke M., Macana E.I., Maerz R. *On asymptotics in case of index-2 differential-algebraic equations*. Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik. Prepr. N 3. Berlin, 1997.
- [89] Hill D.J., Mareels I.M.Y. *Stability theory for differential-algebraic systems* // Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control. Basel: Birkhäuser. 1990. P. 237–268.

- [90] Ikeda M., Maeda H., Kodama S. *Estimation and feedback in linear time-varying systems: a deterministic theory* // SIAM J. on Contr. and Opt. 1975. Vol. 13, № 2. P. 304–326.
- [91] Ikeda M., Uezato E. *Stability and stabilizability conditions for linear time-varying descriptor systems* // Seigyo Riron Shinpojiumu. 2006. V. 35. P. 87–90.
- [92] Ilchmann A., Mehrmann V. *A behavioural approach to linear time-varying systems. I. General theory* // SIAM Journal on Control and Optimization. 2005. V. 44. P. 1725–1747.
- [93] Ilchmann A., Mehrmann V. *A behavioural approach to linear time-varying systems. II. Descriptor systems* // SIAM Journal on Control and Optimization. 2005. V. 44. P. 1748–1765.
- [94] Ji X.-F., Yang Z.-B., Sun Y.-K., Su H.-Y. *Robust stabilization for linear time-varying uncertain periodic descriptor systems* // Acta Automat. Sinica. 2008. V. 34, № 9. P. 1219–1220.
- [95] Johnson G.W. *A deterministic theory of estimation and control* // IEEE Trans. on Automatic Control. 1969. Vol. AC - 14, № 4. P. 380–384.
- [96] Kautsky J., Nichols N.K., Chu E.K.-W. *Robust pole assignment in singular control systems* // Lin. Alg. Appl. 1989. V. 121. P. 653–658.
- [97] Kunkel P., Mehrmann V. *Canonical forms for linear differential-algebraic equations with variable coefficients* // J. Comp. Appl. Math. 1995. N 56. P. 225–251.
- [98] Kunkel P., Mehrmann V. *Regular solutions of nonlinear differential-algebraic equations and their numerical determination* // Numer. Math. 1998. N 79. P. 581–600.

- [99] Lamour R., März R., Tischendorf C. *Differential-algebraic equations: A projector based analysis*. Differential-Algebraic Equations Forum 1. Berlin: Springer, 2013.
- [100] Lamour R., März R., Winkler R. *How Floquet-theory applies to differential-algebraic equations*. Berlin: Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, 1996 (Preprint 96-15).
- [101] Lamour R. *Index determination and calculation of consistent initial values for DAEs* // Computer and Mathematics with Applications. 2004.
- [102] Lewis F.L. *Fundamental, reachability, and observability matrices for discrete descriptor systems* // IEEE Trans. Aut. Control. 1985. AC-30. P. 502–505.
- [103] Linh V. H., Mehrmann V. *Lyapunov, Bohl and Sacker-Sell spectral intervals for differential-algebraic equations* // J. Dynamics and Differential Equations. 2009. Vol. 21. P. 153–194.
- [104] Lin C., Wang J.L., Yang G.-H., Lam J. *Robust stabilization via state feedback for descriptor systems with uncertainties in the derivative matrix* // Int. J. Control. 2000. V. 73, № 5. P. 407–415.
- [105] Lin W., Wang J.J., Soh C.-B. *Necessary and sufficient conditions for the controllability of linear interval descriptor systems* // Automatica. 1988. Vol. 34, № 3. P. 363–367.
- [106] Liu X., Ho D.W.C. *Stabilization of non-linear differential-algebraic equation systems* // Int. J. Control. 2004. V. 77. P. 671–684.
- [107] März R., Tischendorf C. *Recent results in solving index-2 differential algebraic equations in circuit simulation* // SIAM J. Sci. Comput. 1997. V.18, № 1. P. 139–159.

- [108] März R. *Differential algebraic systems with properly stated leading term and MNA equations*. Berlin, 2002. (Preprint / Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin; N 13).
- [109] März R. *On linear differential-algebraic equations and linearizations* // APNUM. 1995. № 18. P. 267–292.
- [110] McClamroch N.H. *Feedback stabilization of control systems described by a class of nonlinear differential-algebraic equations* // System & Control Letters. 1990. V. 15. P. 53–60.
- [111] Mehrmann V., Stykel T. *Descriptor systems: a general mathematical framework for modelling, simulation and control* // Automatisierungstechnik. 2006. V. 8. P. 405–415.
- [112] Melnikova I.V., A. Filinkov. *Abstract Cauchy problems: Three Approaches*. Chapman-Hall, CRC, 2001.
- [113] Mertzios B.G., Christodoulou M.A., Symos B.L., Lewis F.L. *Direct controllability and observability time domain conditions for singular systems* // IEEE Trans. Aut. Control. 1988. AC-33. P. 788–790.
- [114] Mueller P.C. *Linear control design of linear descriptor systems* // 14th Triennial World Congress, Beijing, P.R. China. 1999. P. 31–36.
- [115] Mueller P.C. *Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: A survey* // Appl. Math. And Comp. Sci. 1998. V. 8, N 2. P. 269–286.
- [116] Muller P.C. *Stability of linear mechanical systems with holonomic constraints* // Appl. Mech. Rev. 1993. V. 46, N 11, part 2. P. S160–S164.
- [117] Rabier P.J., Rheinboldt W.C. *Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. Handbook of Numerical Analysis. V. VIII*. Amsterdam, 2002.

- [118] Riaza R., Tischendorf C. *Qualitative features of matrix pencils and DAEs arising in circuit dynamics* // Dynamical Systems. 2007. Vol. 22, No. 2. P. 107–131.
- [119] Riaza R., Tischendorf C. *Structural characterization of classical and memristive circuits with purely imaginary eigenvalues* // Int. J. Circ. Theor. Appl. 2013. № 41. P. 273–294.
- [120] Rosenbrock H.H. *Structural properties of linear dynamical systems* // Int. J. Contr. 1974. V. 20. P. 191–202.
- [121] Shcheglova A.A., Petrenko P.S. *Stabilizability of solutions to linear and nonlinear differential-algebraic equations* // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 196, №4. P. 596–615.
- [122] Shields D.N. *Feedback stabilization of a class of singular nonlinear systems* // IMA J. Mathematical Control & Information. 1993. V. 10. P. 305–322.
- [123] Sidorov N., Loginov B., Sinytsyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt method in nonlinear analysis and applications*. Dordrecht Harbound: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [124] Stykel T. *On criteria for asymptotic stability of differential-algebraic equations* // Z. Angew. Math. Mech. 2002. Vol. 82, № 3. P.147–158.
- [125] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. VSP, Utrecht, 2003.
- [126] Takaba K., Morihira N., Katayama T. *H_∞ control for descriptor systems — a J -spectral factorization approach* // Proc. of the 33th Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, Florida, December 1994. P. 2251–2256.

- [127] Takaba K. *Robust H^2 control descriptor system with time varying uncertainty* // Int. J. Control. 1998. V. 71, № 4. P. 559–579.
- [128] Tischendorf C. *On stability of solutions of autonomous index-1 tractable and quazilinear index-2 tractable DAEs* // Circuits Systems Signal Process. 1994. Vol. 13, № 2–3. P. 139–154.
- [129] Trefethen L.N., Trefethen A.E., Reddy S.C., Driscoll N.N. *Hydrodynamic stability without eigenvalues* // Science. 1993. Vol. 261. P. 578–584.
- [130] Van Dooren P.M. *The generalized eigenstructure problem in linear systems theory* // IEEE Trans. Aut. Control. 1981. V. AC-26. P. 111–129.
- [131] Van Dorsselaer J.L.M. *Pseudospectra for matrix pencils and stability of equilibria* // BIT. 1997. Vol. 37, No. 4. P. 833–845.
- [132] Varga A. *On stabilization methods of descriptor systems* // Syst. & Control Lett. 1995. V. 24. P. 133–138.
- [133] Verghese G.C., Levy B.C., Kailath T. *A generalized state-space for singular systems* // IEEE Trans. Aut. Control. 1981. V. AC-26. P. 811–831.
- [134] Wang H.-S., Yung C.-F., Chang F.-R. *H_∞ control for nonlinear descriptor systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2006.
- [135] Wang Y.Y., Frank P.M., Clements D.J. *The robustness properties of the linear quadratic regulators for singular system* // IEEE Trans. Automat. Control. 1993. V. 38. P. 96–100.
- [136] Wen X.C., Liu Y.Q. *Study on robust stabilization for a class of continuous-time uncertain singular systems* // Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics. 1996. V. 176. P. 377–381.

- [137] Wu H., Mizukami K. *Stability and robust stabilization of nonlinear descriptor systems with uncertainties* // Proc. of the 33th Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, Florida, December 1994. P. 2772–2777.
- [138] Wu J., Lu G., Wo S., Xiao X. *Exponential stability and stabilization for nonlinear descriptor systems with discrete and distributed delays* // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2013. Vol. 23, № 12. P. 1393–1404.
- [139] Yang C., Zhang Q., Zhou L. *Practical stabilization and controllability of descriptor systems* // Int. J. Information and Systems Sciences. 2005. V. 15, № 3–4. P. 455–465.
- [140] Yip E.L., SINCOVEC R.F. *Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems* // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. AC-26. P. 702–707.
- [141] Yongqing L., Yuanqing L. *Stabilization of nonlinear singular systems* // Proc. of the American Control Conference. Philadelphia, Pennsylvania, June 1998. P. 2532–2533.
- [142] Zhang Q.L., Xu X.H. *Robust stabilization of descriptor systems* // Proc. of the 33th Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, Florida, December 1994. P. 2981–2982.