

ОБРАЩЕНИЕ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ*

В.А. Дыхта

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

dykhta@icc.ru

Рассматривается экстремальная задача

$$f_0(x, u) \rightarrow \min, \quad F(x, u) = 0, \quad x \in S, \quad u \in U(x), \quad (P)$$

где S – непустое множество, U – многозначное отображение с непустыми значениями, $F: S \times U(S) \rightarrow Y$ – оператор со значениями в вещественном векторном пространстве Y (никаких топологических предположений на данном этапе не делается). Хорошо известно, что если задача (P) выпукла, в смысле [1], т.е. выпукло множество

$$C = \{(\alpha, y) \in R \times Y \mid \exists x \in S, u \in U(x): \alpha \geq f_0(x, u), F(x, u) = y\},$$

то выполнение для допустимой точки $(\bar{x}, \bar{u})$ принципа Лагранжа (ПЛ) – $\exists \lambda = (\alpha_0, y') \neq 0: \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}, \lambda) = \min \{ \mathcal{L}(x, u, \lambda) \mid x \in S, u \in U(x) \}$, где $y' \in Y'$, $\mathcal{L}(x, u, \lambda) = \alpha_0 f_0(x, u) + y' F(x, u)$ – необходимо для минимума, а при условии нормальности $\alpha_0 > 0$ – достаточно.

Заметим, что утверждение о достаточности справедливо без предположения выпуклости задачи (P), но все же является слишком жестким, так как формулируется с помощью одного (нормированного) набора множителей Лагранжа λ с условием нормальности (эквивалентным равенству $\alpha_0 = 1$). Между тем, общий запас Λ нормированных наборов λ , обеспечивающих экстремальность точки $(\bar{x}, \bar{u})$, может оказаться бесконечным, и естественные достаточные условия должны учитывать эту неединственность. Следующее обращение (ПЛ) учитывает это требование.

Пусть E – любое множество, содержащее допустимое множество D задачи (P), т.е. $E \supseteq D$, а $Y'_+(F, E)$ – множество функционалов $y' \in Y'$, удовлетворяющее следующему условию монотонности на E : $y' F(x, u) \leq 0 \quad \forall (x, u) \in E$. Заметим, что в каждом нормальном наборе $\lambda \in \Lambda$ непременно $y' \in Y'_+(F, D)$. Если множество $Y'_+(F, E) \neq \emptyset$, то рассмотрим следующую задачу $(P_+(E))$:

$$\begin{cases} f_0(x, u) \rightarrow \min, & x \in S, u \in U(x), \\ y' F(x, u) \leq 0 & \forall (x, u) \in E, y' \in Y'_+(F, E). \end{cases}$$

Без труда доказывается

Предложение. Если множество $Y'_+(F, E) \neq \emptyset$ и точка $(\bar{x}, \bar{u})$ оптимальна в соответствующей задаче (P_+) , то она оптимальна и в задаче (P).

1. Магерил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 176 с.
2. Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 110. С. 76–108.

* Работа поддержана РФФИ, проекты 07-01-00741, 05-01-00187.